MATEMÁTICA Y ASTRONOMÍA EN EL AULA: ¿CÓMO SE CALCULA LA MASA DE UNA GALAXIA?

Mauricio Mendivelso Villaquirán[1], *Sandra M. Leiva Buitrago*[2]

[1]*Gimnasio La Montaña, Bogotá*
[1]*Gimasio William McKinley, Bogotá*

RESUMEN

Usando curvas de rotación de galaxias espirales es posible estimar la masa de un sistema de esta clase y con un modelo sencillo, el número de estrellas que contiene. El uso del software de tratamiento de imágenes de uso libre y la integración (hecha a través de una hoja de cálculo) permiten desarrollar esta propuesta con estudiantes de matematica de grado undécimo. Se muestra así la utilidad de la integral de Riemann en un contexto práctico.

Palabras claves: galaxia espiral, curvas de rotación, enseñanza de la astronomía

Introducción

La enseñanza de la matemática se ha servido de ejemplos prácticos en diversos contextos para desarrollar sus contenidos con mayor eficacia: ingeniería, economía y biología son algunosde ellos. Sin embargo, algunos otros contextos son igualmente útiles y poco explorados en los libros de texto como la astronomía. Si bien el cálculo de la masa de una galaxia espiral resulta depender de un modelo con frecuencia complejo, puede estimarse una cota superior para este valor y para el número de estrellas que contiene usando curvas de rotación disponibles en artículos técnicos (pero adsequibles por Internet), un modelo sencillo de galaxia, software de tratamiento de imágenes y la integración definida tal cual se construye en un curso de matemática escolar a través de las sumas de Riemann.

Intentamos mostrar en este artículo la pertinencia del uso de curvas de rotación para la estimación de una de las variables dinámicas de una galaxia espiral: la masa contenida hasta un radio r. Después de explicar el modelo de galaxia usado y el significado de la curva de rotación, mostraremos un cálculo que aproxima, en primera instancia, un estimado de la masa galáctica y del número de estrellas que contiene de acuerdo al modelo usado. Posteriormente se muestra cómo orientar una posible actividad con estudiantes, el fin primordial de la propuesta.

Curvas de rotación de galaxias espirales

Una galaxia espiral es un sistema compuesto de gas, polvo y estrellas con tres componentes principales: núcleo galáctico, disco y halo galáctico, que es una región que rodea por completo a las otras dos. Compuesta en su mayoría de cúmulos estelares, el halo galáctico es una región uniformemente poblada y de forma esférica. Dado que los puntos del halo galáctico emiten más débilmente que los puntos del disco, se considera que la manera como se mueven los elementos del disco es una muestra de cómo lo hacen los del halo. En síntesis, puede considerarse la galaxia modelada como un sistema esférico cuyo perfil de brillo obedece a la concentración de estrellas con objetos idénticos en tamaño y masa (equiivalentes a la del Sol). [a]

Cada punto halo y disco galácticos rota alrededor del núcleo con una rapidez que es función de su distancia al centro de la galaxia. Al hacer un diagrama v vs. r se obtiene una curva que se conoce como curva de rotación. En general, tal curva tiene comportamiento ascendente para puntos cercanos al núcleo y luego es decreciente o creciente con muy poca pendiente a medida que r aumenta.

Cálculo de la masa de una galaxia espiral

Con la curva de rotación a disposición, se utiliza un modelo para calcular la masa contenida hasta un cierto radio r. Bajo las condiciones impuestas para la galaxia en la sección anterior, suponemos que la masa es una cierta función del radio, esto es $M = M(r)$. Sea la densidad de masa $\rho = dM/dV$. Puede verse que la masa contenida hasta el radio r_t está dada por

$$M_t = \int_0^{r_t} \rho(r) 4\pi r^2 dr \tag{1}$$

dado que $dV = 4\pi r^2 dr$. Del teorema virial

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r} \tag{2}$$

y dado que $\frac{dM(r)}{dV} = \frac{dM(r)}{dr}\frac{dr}{dV}$ se deduce que

$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi r^2 G} \tag{3}$$

reemplazando en (1)

$$M_t = \int_0^{r_t} \frac{v^2(r)}{G} dr = \frac{1}{G}\int_0^{r_t} v^2(r) dr \tag{4}$$

Del resultado anterior puede verse que el área bajo la curva v^2 vs. r multiplicada por una constante da un estimado de la masa total de la galaxia. Dado el modelo de galaxia utilizado, si se calcula esta valor en masas solares se tendrá un estimado del número de estrellas en la galaxia.

Masa y número de estrellas en la galaxia

Evidentemente $v^2(r)$ no es una función continua por cuanto tales curvas se obtienen a partir de un número finito de datos que arroja un espectro. Sin embargo, en artículos técnicos aparecen como curvas continuas por lo que la custión de la continuidad resulta irrelevante.

Cada curva de rotación tiene un radio de alcance que depende de los espectros usados para su construcción. Siendo r_t la distancia máxima al centro hasta la que hay datos disponibles para la construcción de la curva. Así pues, se divide el intervalo $[0, r_t]$ en n intervalos iguales de tal modo que

$$\Delta r = \frac{r_t}{n} \tag{5}$$

Para los puntos $r_1 = \Delta r$, $r_2 = r_1 + \Delta r$, $r_3 = r_2 + \Delta r$, ... se buscan sobre la gráfica los valores v^2 imagen de cada uno. Con tales imágenes se construyen sendos rectángulos de area $A_i = \Delta r . v^2(r_{i*})$ donde r_{i*} es el valor de r que permita construir un rectángulo inscrito por la curva de rotación, de acuerdo al criterio usado en la integral de Riemann. De ese modo

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \int_0^{r_t} v^2(r)dr \tag{6}$$

de donde se concluye que la suma multiplicada por la constanye G^{-1} resulta ser la misma integral (4).

La constante G tiene unidades $M^{-1}L^3T^{-2}$. Puede expresarse la longitud en kilómetros, la masa en masas solares y el tiempo en segundos y usando los factores de conversión adecuados, (4) quedará expresada en masas solares. De acuedo al modelo escogido, este será también el número de estrellas estimado para la galaxia.

Referencias

[a] Se debe tener en cuenta que el modelo se usa para una estimación. La estructura de una galaxia espiral, si bien no dista mucho del modelo escogido, es más complejo que este.

[1] A. E. Roy and D. Clarke. *Astronomy: Principles and Practice* (Bristol, Adam Hilger, 1982).

[2] M. Mendivelso y M. Porras. *Rev. Col. Fis.*, **38**(1), 189, (2006).

[3] S. Leiva y M. Mendivelso. *About relation between astronomy and mathematics; astronomical concepts taken to the school* Libro de Memorias - Proceedings Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica COCOA - 2008 (Medellín, Universidad de Antioquia, 2008)