Ubaldo Cayllahua Yarasca
Félix Amadeo Canales Conce
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

Resumen

El propósito de esta socialización es reestructurar el pensamiento de los estudiantes sobre el coseno y seno de la diferencia y suma de ángulos. Esta propuesta ha sido experimentada con estudiantes del II ciclo, carrera profesional de matemática, usando la metodología del descubrimiento y debate. Los resultados de esta experiencia son que aproximadamente 96% de los estudiantes logran con facilidad el aprendizaje previsto. Por tant,o se concluye que, a partir de la deducción de la fórmula del coseno de una diferencia de ángulos, se puede obtener las otras fórmulas de funciones trigonométricas de ángulos compuestos, produciendo un impacto positivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por su validación experimental

COSENO Y SENO DE LA DIFERENCIA Y SUMA DE ÁNGULOS

Se pide a los estudiantes observar atentamente la siguiente igualdad:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta - \cos\alpha$$

Después de analizar en parejas, se pide que respondan: ¿Es verdadero o falso?

Más del 50% de estudiantes responden que es verdad la igualdad.

Y esto es un error recurrente en la construcción de conceptos matemáticos (Alarcón, 2005). Así pues, "El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar (…); sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revelan falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo" (Brousseau, 1998, citado en Chamorro, 2005, p. 32). Es decir, hay una estrecha conexión entre cierto tipo de errores y la constitución de obstáculo, que son generalmente de tipo epistemológico, que están estrechamente ligados al saber matemático.

Para verificar el error de los estudiantes, se va a un ejemplo como el siguiente:

Sean los ángulos $\beta = \pi/3$ y $\alpha = \pi/6$. Luego se tiene que:

$$\cos(\pi/3 - \pi/6) = \cos\pi/3 - \cos\pi/6$$

Operando se tiene que: $\cos(\pi/6) = \cos\pi/3 - \cos\pi/6$

$$\sqrt{3}/2 = ½ - \sqrt{3}/2 \; \ldots\ldots \; ¡\text{ Falso }¡$$

Y esta falsedad resulta de suponer como verdadera la igualdad inicial, por tanto:

$$\cos(\beta - \alpha) \neq \cos\beta - \cos\alpha$$

Entonces ¿a qué es igual $\cos(\beta - \alpha)$?

Para responder esta pregunta se hace uso del aprendizaje por descubrimiento de Bruner, donde el propio estudiante encontrará la verdad, siguiendo las actividades de aprendizaje diseñadas por el docente. Aquí el estudiante tiene una participación activa y directa en la construcción del conocimiento. El docente sólo orienta y facilita los medios necesarios para que los estudiantes descubran por su cuenta el conocimiento nuevo, haciendo uso de sus conocimientos previos (Universidad Internacional de Valencia, 2015).

Luego, para la deducción de identidades de funciones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos (Stewart, Redlin y Watson, 2007), se procede de la siguiente manera:

1º. Recordar la fórmula de la distancia entre 2 puntos en el plano cartesiano.

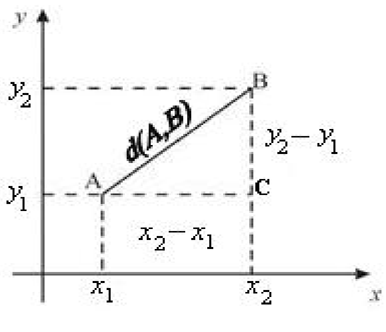

Fig. 1. Distancia entre 2 puntos α

A partir de la figura 1, por Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2º. Angulo en posición normal en un círculo trigonométrico

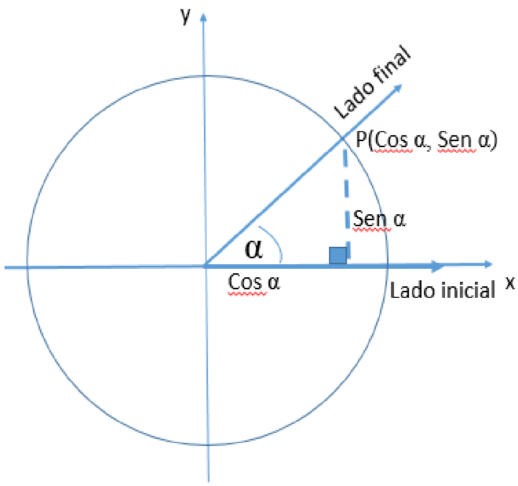

Fig 2. Angulo en posición normal

3º. El sen y cos de ángulos negativos según Prado y otros (2006) es:

$\mathrm{Sen}(-\alpha) = -\mathrm{sen}\ \alpha$ ….. Función impar

$\mathrm{Cos}\ (-\alpha) = \cos \alpha$ ….. Función par

4º. El cuadrado de un binomio es: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

5º. Identidades pitagóricas: $\mathrm{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\mathrm{sen}^2\ (\alpha-\beta) + \cos^2 (\alpha-\beta) = 1$$

Ahora se toma un pedazo de cartón del tamaño de papel A4 y al medio graficar un sistema de ejes cartesiano xy con el auxilio de un par de escuadras. Luego cortar un círculo de papel de radio 6 a 8 cm y colocarlo con un chinche sobre el sistema de ejes de tal manera que coincida el centro de círculo con el origen del sistema de ejes como indica la figura 3.

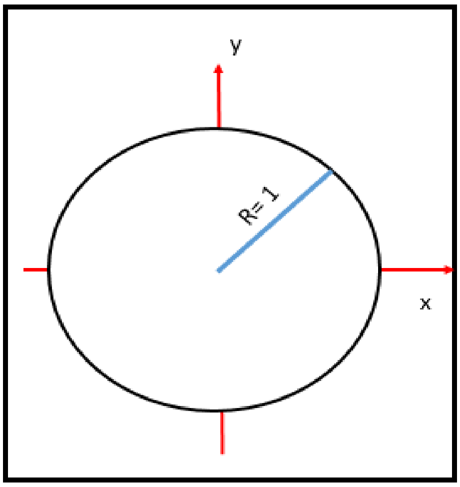

Fig. 3. Círculo trigonométrico

Sobre el círculo unitario tracemos los ángulos en posición normal α y β como muestra la fig. 4

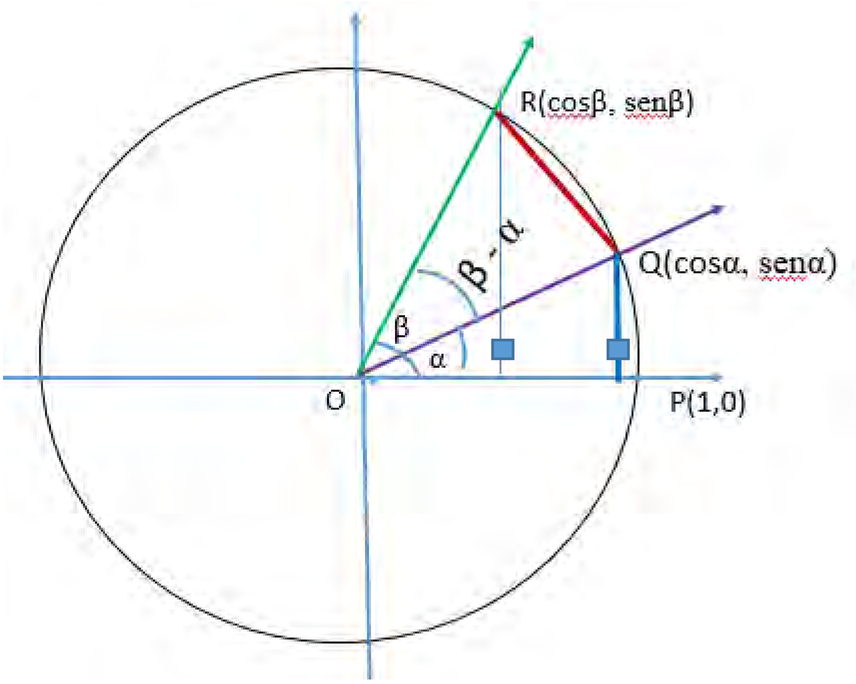

Fig. 4. Ángulos en posición normal

Las coordenadas de los puntos P, Q y R son: P(1,0), Q(cosα , senα) y R(cosβ, senβ). Pero de acuerdo a la fórmula de distancia entre 2 puntos, la medida del segmento QR es:

$$QR= [(\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)^2]^{1/2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Luego girar el círculo en el sentido de las agujas del reloj, hasta que el vértice Q del triángulo ORQ coincida con el punto P, como indica la figura 5.

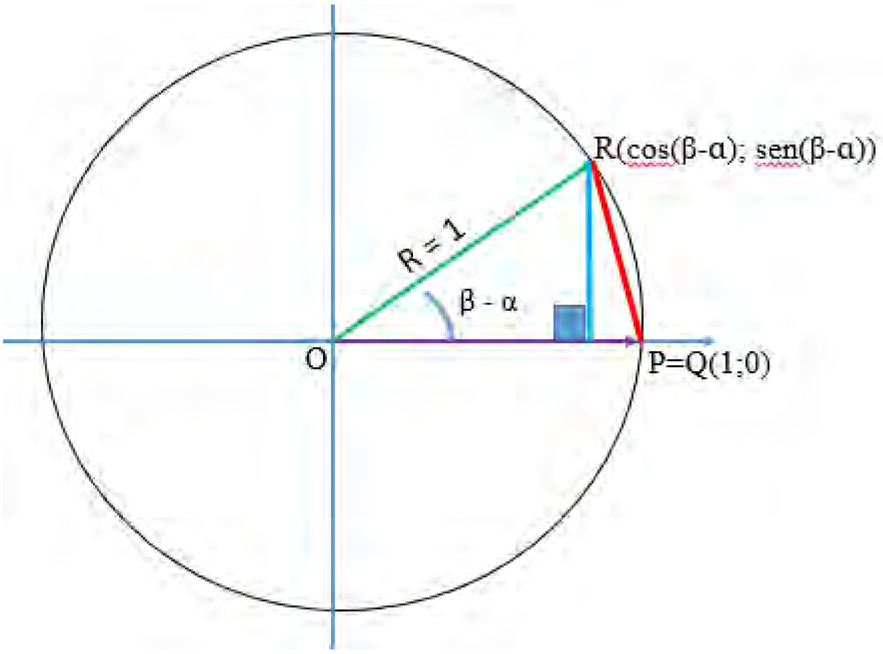

Fig 5. Triángulo ORQ en nueva posición

Ahora hallando la nueva distancia QR, basado en los datos que muestra la figura 5 se tiene que:

$$QR= [(\cos(\beta-\alpha)-1]^2 + [(\operatorname{sen}(\beta-\alpha)-0]^{1/2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Como las distancias QR en las dos posiciones es la misma, igualamos las expresiones (1) y (2):

$$(\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)^2]^{1/2} = [(\cos(\beta-\alpha)-1]^2 + [(\operatorname{sen}(\beta-\alpha)-0]^{1/2}$$

Operando los 2 miembros se tiene que:

$$\operatorname{Cos}^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2(\beta-\alpha)-2\cos(\beta-\alpha)+1+\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)$$

Simplificando se tiene que:

$$\mathbf{\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha}$$

Coseno de la suma de ángulos

De acuerdo con Miller, Heeren y Hornsby (2006), para deducir la fórmula de cos $(\beta+\alpha)$ sustituimos α por **-** α en cos $(\beta-\alpha)$:

Cos $(\beta-\alpha)$ **=** $\cos\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$

Cos $(\beta-(-\alpha)) = \cos\beta\cos(-\alpha)+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(-\alpha)$ …. Pero por función par e impar resulta que:

$$\mathbf{Cos\ (\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha}$$

Seno de la suma de ángulos:

Para obtener la fòrmula de sen $(\beta + \alpha)$ se debe recurrir al concepto de cofunciones (Stewart, Redlin y Watson, 2007):

$\operatorname{sen}\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$

$\cos\alpha = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$

Luego: $\operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \cos(\pi/2 - (\beta + \alpha))$ ….. operando el segundo miembro:

$= \cos((\pi/2 - \beta) - \alpha)$ …. Por coseno de una diferencia de ángulos

$= \cos(\pi/2 - \beta)\cos\alpha + \operatorname{sen}(\pi/2 - \beta)\operatorname{sen}\alpha$ …. Por cofunciones

$$\mathbf{\operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha}$$

Seno de la diferencia de ángulos

Para obtener la fórmula correspondiente también recurrimos al concepto cofunciòn:

$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \cos(\pi/2 - (\beta - \alpha))$ …. Operando el segundo miembro

$= \cos((\pi/2 - \beta) + \alpha)$ ….. por coseno de una suma de ángulos

$= \cos(\pi/2 - \beta)\cos\alpha - \operatorname{sen}(\pi/2 - \beta)\operatorname{sen}\alpha$ …. Por cofunciones

Luego se tiene que: $\mathbf{\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha}$

Referencias

Alarcón, S. (2005). *Evidencia de un obstáculo epistemológico*. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5062942.pdf

Chamorro, C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

Miller, C.; Heeren, V. y Hornsby, J. (2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* México: Pearson/Addison Wesley

Prado, C.; Santiago, R.; Aguilar, G. (2006). *Precálculo*: *enfoque por competencias*. México: Pearson/Prentice-Hall

Stewart, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemática para el cálculo.* México: Cengage-Learning

Universidad Internacional de Valencia (2015). *¿Qué se entiende por aprendizaje por descubrimiento?*. Disponible en: https://www.universidadviu.es/que-se-entiende-por-aprendizaje-por-descubrimiento/

Volver al índice de autores