Épsilon - Revista de Educación Matemática 2016, Vol. 33 (3), nº 94, 7-18

Tres enfoques históricos para la resolución del problema de los *n* herederos con reparto equitativo, desconociéndose la cantidad de herederos y el total a repartir

Maria T. Sanz y Bernardo Gómez
Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia

Resumen: *En este trabajo se estudia un tipo de problemas descriptivos con fracciones que ha estado presente en los libros de texto desde tiempo inmemorial. El objetivo de este trabajo es presentar los tres métodos de resolución encontrados en los libros de texto históricos, así como sus lecturas analíticas, todo esto a través de un estudio histórico-epistemológico. Se completa el trabajo con un estudio preliminar en el aula, con una muestra de 27 estudiantes con alta formación matemática que realizan un cuestionario con los problemas objeto de estudio. Con esto se determina que el método de resolución dominante es el algebraico, además de resaltar dificultades del alumnado en la traducción al lenguaje matemático, así como en algunos casos operatoria con fracciones.*
Palabra Clave. *Métodos de resolución, Lectura analíticas, Fracciones, Problemas descriptivos*

Three historical approaches to solve the problem of *n* heirs with equal distribution, where the number of heirs and the total amount is unknown

Abstract: *In this paper, a descriptive fraction problem, which has been presented in textbooks from time immemorial, is studied. The aim of this paper is to present three resolution methods, which have been found in historical textbooks, and their analytical readings, all through a historical and epistemological study. The work is completed with a preliminary study in the classroom, with a sample of 27 students with high mathematics level who made a questionnaire with the fraction problems that are analyzed in this work. The main conclusions with the preliminary study are the following: the method that prevails is the algebraic resolution and the students have difficulties with the translation to the mathematical language, and in some cases with fraction operations.*
Keywords: *Resolution methods, analytical reading, fractions, descriptive problems*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el currículum escolar propone la resolución de problemas como una destreza básica en el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico, y son los métodos de resolución históricos los que permiten enriquecer y mostrar la diversidad de los mismos, siendo parte esencial en este desarrollo.

Para indagar sobre los distintos métodos de resolución de que son susceptibles los problemas escolares hay que acudir al análisis histórico y epistemológico de los libros de texto, en tanto análisis de la formación de los objetos matemáticos y de su enseñanza a lo largo de su historia. Este análisis necesita de una metodología de aproximación global basada en el análisis de contenido propio del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), ya que la metodología de estudiar textos aislados es insuficiente en la medida en que ignora las raíces y evolución del objeto de estudio. En este sentido adquiere sentido situar las subunidades del análisis de contenido en una selección de libros y documentos representativos de las etapas principales en que se puede dividir la historia de las matemáticas. En el caso de los problemas descriptivos, la subunidad fundamental que centran el estudio es la lectura analítica.

La lectura analítica orienta y determina el método para resolver el problema. En general, debe entenderse que la lectura analítica es la declaración de un problema reducido a una lista de números y la relación entre cantidades, de manera que puede conducir a una ecuación o una fórmula. La ecuación se obtiene como un resultado de búsqueda de dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad obtenida para describir las relaciones aritméticas, que una cantidad representada con expresiones algebraicas tiene con otros que han sido previamente representados por una letra o una expresión algebraica (Puig, 2003). La fórmula se obtiene encontrando el valor de la incógnita se expresa en términos generales, o lo que es lo mismo, las operaciones deben ser realizadas con la lista de datos. Las fórmulas traducidas al lenguaje ordinario dan lugar a reglas generales de resolución.

Este trabajo se centra en los problemas de los n herederos con reparto equitativo donde se desconoce tanto la cantidad a repartir como el número de herederos. Se trata de problemas de fracciones, donde el reparto se va encadenando, es decir uno depende del anterior.

En los libros de texto hay una gran variedad de estos problemas de fracciones cuya historia se remonta a las antiguas culturas de Mesopotamia, las matemáticas, la egipcia, china e hindú. Las declaraciones de estos problemas han evolucionado con el tiempo para adaptarse a los cambios sociales, los desarrollos matemáticos, y las teorías educativas dominantes en todo momento, al tiempo que conserva un contenido común matemática.

Estos problemas fueron usados como una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, ya que estaba cambiando el modelo educativo, se disminuye la confianza en el poder educativo de estos problemas, hasta el punto de que muchos de ellos han desaparecido de los libros de texto actuales, o se han reducido a un mero entretenimiento.

Con la intención de recopilar evidencia histórica de los métodos de resolución de problemas descriptivos de fracciones, esta investigación se dirige, no sólo con el propósito de transmitir el conocimiento, sino con el objetivo de prestar atención a los aspectos de la resolución de los problemas que tienen por objeto la producción de conocimiento significativo para el alumno.

A partir de aquí el trabajo consta de las siguientes partes: Lecturas Analíticas del Problema. Metodología y Estudio Preliminar, dónde se explica la muestra escogida y la metodología a seguir. Resultados, se analiza con detalle las respuestas de los estudiantes y por último las Conclusiones del trabajo.

LECTURAS ANALÍTICAS DEL PROBLEMA

En este trabajo se analiza el problema titulado por Singmaster (1998) como "el problema de herencias dando 1+ 1/7 de lo que queda y todo se llevan la misma cantidad". Se trata de problemas verbales de varias etapas donde el todo es desconocido y las partes están relacionadas con el complemento aditivo.

Tal como dice Singmaster (1998) aparece este problema por primera vez en Fibonacci (1202/2002):

> El legado de la fortuna de un hombre. Un hombre en sus últimos días decide hacer testamento entre sus hijos mayores de la forma siguiente. Al primero le dijo, te daré un bezante y un séptimo del resto, a otro le dijo, te daré 2 bezantes y un séptimo del resto, a un tercero le dijo, te daré 3 bezantes y un séptimo del resto, y así sucesivamente con todos sus hijos. Uno de los hijos dijo que el reparto no era justo. Pero el padre dijo que todos tenían el mismo dinero

La relación fundamental entre las cantidades para poder resolver estos problemas se puede plantear desde tres puntos de vista diferentes, y esto es lo que se va a analizar a lo largo de este apatado a través de lo que ha quedado reflejado en los libros de texto de diferentes . Para la revisión de los libros de texto se ha hecho uso de tres momentos históricos: Edad Temprana, el período medieval y los tiempos modernos (libros impresos y de enseñanza) (Gómez, 2011).

1. Todos se llevan la misma cantidad

En todos los problemas de este tipo se dice que el reparto es equitativo, así pues, todas las personas se llevarán la misma cantidad. A modo de ejemplo se presenta el problema escrito y resuelto por Aurel (1552)

> Ducados y 1/10. También ducados. Un enfermo hace su testamento, y manda que su hacienda sea partida entre sus hijos, igualmente, que tanto haya el uno como el otro. Muerto el padre, dan al hijo mayor un ducado, y $\frac{1}{10}$ de lo que queda; al segundo, 2 ducados y $\frac{1}{10}$ de la resta; al tercero 3 ducados y $\frac{1}{10}$ de lo que quedó; así a cada hijo un ducado más que al otro y $\frac{1}{10}$ de la resta. De esta manera es satisfecha la voluntad del padre, porque vino a cada uno tanto como al otro. Demando, ¿cuántos ducados dejó, y cuántos hijos tenía?

Pongo, que dejo x ducados de los cuales toma el mayor, o primer hijo 1 ducado, quedan $x-1$, el $\frac{1}{10}$ de esta resta es $\frac{x-1}{10}$, lo cual junta con 1 ducado, y vendrán $\frac{x+9}{10}$, tantos ducados vienen al hijo primero. Estos quita de x, y quedará para los otros hijos $\frac{9x-9}{10}$ ducados, de los cuales toma el segundo, 2 ducados, quedaran $\frac{9x-29}{10}$, cuyo $\frac{1}{10}$ es $\frac{9x-29}{100}$ el cual junta con los 2 ducados que el 2º tomó, y vendrán $\frac{9x+171}{100}$ tantos ducados vienen al 2º. Y pues el uno heredó tanto como el otro, conviene que los ducados del uno sean iguales a los ducados del otro. Por lo cual digo que $\frac{x+9}{10}$ ducados del primero son iguales a $\frac{9x+171}{100}$ ducados del segundo. Reduce la igualación a entero (que es multiplicar en cruz) y vendrán $100x + 900 = 90x + 1710$. Iguala y parte y vendrá x a valer 81. Tantos ducados dejó el padre. Ahora para saber cuántos hijos eran mira qué viene a cada uno de esta manera, toma 1 ducado de los 81, quedarán 80, cuyo 1/10 es 8, el cual junto con el 1, y serán 9 ducado [que son los que] vienen a cada uno (Aurel, 1552, fo. 92)

Notar que en la solución escrita en este trabajo se usa la "x" en lugar del símbolo cósico utilizado por Marco Aurel.

Aurel resuelve el problema planteando una ecuación que representa que los dos primeros hijos heredan la misma cantidad, *Y debido a que cada uno heredaba tanto como el otro, ha acordado que los ducados de uno son iguales a los otros ducados*

$$\frac{x+9}{10} = \frac{9x+171}{100}$$

El desarrollo de la resolución de la ecuación se realiza paso a paso a partir de este planteamiento (últimas cinco líneas del problema).

2. La diferencia entre lo que se llevan dos es cero

Euler utiliza el método cartesiano, al igual que Aurel, pero en su lectura analítica plantea la condición crítica de este tipo de problemas en términos de la diferencia entre lo que se llevan los dos primeros hijos es cero. En este caso, la tabla que incorpora el autor en su solución explica el método de resolución.

Las libras. Un padre deja a su muerte varios hijos, quienes comparten sus bienes de la siguiente manera: el primero recibirá 100 libras y la décima parte del resto, el segundo recibirá 200 libras y la décima parte del resto, el tercero 300 libras y la décima parte del resto, el cuarto recibirá 400 libras y la décima parte del resto, así sucesivamente. Así se obtiene que la herencia queda dividida equitativamente entre sus hijos. Se requiere saber, cuántos hijos eran y cuánto recibió cada uno.

 Épsilon, 2016, Vol. 33 (3), nº 94, 7-18, ISSN: 2340-714X

Supondremos que el total de la fortuna sea z libras; y que cada hijo recibirá la misma parte a la cual la llamamos x, con lo cual el número de niños vendrá determinado por $\frac{z}{x}$.

Ahora pasamos a la resolución del problema.

Suma o herencia que es dividida	**Orden de los hijos**	**Parte de cada hijo**	**Diferencias**
z	1º	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
z-x	2º	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-2x	3º	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-3x	4º	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-4x	5º	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-5x	6º	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	y así sucesivamente…

Hemos insertado en la última columna las diferencias, las cuales se han obtenido cada parte menos la anterior, dado que todas las partes son iguales esta diferencia es igual a 0. Con lo que resolviendo esta ecuación $100 - \frac{x-100}{10}$ se obtiene que x=900.

Así pues ahora sabemos que cada hijo recibirá 900 libras, cogiendo cualquiera de las fórmulas de la tercera columna obtenemos $x = 100 + \frac{z-100}{10}$ que z=8100 libras, y en consecuencia, el número de hijos 8100/900=9. (Euler, 1770/1821, p. 173).

3. La diferencia entre la cantidad que queda antes de la última distribución y el último reparto, es cero.

Solución del problema de Fibonacci, *The Bequest of a Man's Fortune*

Por los séptimos que él da a cada hijo tienes 7 y le quitas 1, entonces el resto son 6 y estos son el número de hijos que multiplicados por si mismos da 36 que es el número total de bezantes. (Fibonacci, 1202/2002, p.399).

Aunque, no hay nada en el texto que permita deducir cuál es la regla que utiliza Fibonacci, se va a suponer que la relación fundamental que utiliza el autor es que la diferencia entre la cantidad que queda antes del último reparto y este mismo es 0.

Esta relación se muestra con el lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$$\mathrm{C} - \left(1 \cdot \mathrm{n} + \frac{1}{7}(\mathrm{C} - 1 \cdot \mathrm{n})\right) = 0, \qquad (1)$$

donde $1 \cdot n + \frac{1}{7}(C - 1 \cdot n)$, $n \geq 2$, es la cantidad que recibe el ultimo niño, y n es el número de hijos y C son los bezantes que quedan tras el penúltimo reparto. De la relación fundamental (1) se sigue,

$$7C - C - 7n + n = 0 \rightarrow (7 - 1)\, C = (7 - 1)\, n \leftrightarrow C = n \qquad (2)$$

Si C=N, la herencia, H, deber ser igual a n^2 (n niños and n bezantes cada uno de ellos). Ahora se necesita encontrar el valor de n, que se puede hacer, por ejemplo, resolviendo la ecuación de lo que recibe el primer hijo:

$$1 + \frac{1}{7}(\mathrm{n}^2 - 1) = \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{n} = 6. \qquad (3)$$

Se puede pensar que Fibonacci no hizo uso de las ecuaciones de segundo grado para obtener su resultado, pero tal vez si que usó un método basado en la factorización y proporción, debido a que estos métodos eran más típico en aquellos tiempos. El siguiente ejemplo ayuda a ilustrar esta idea.

> El mercader. Un mercader estando enfermo hizo testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda, ordenando que al hijo primero le diesen la sexta parte de su hacienda, y 300 ducados más; al segundo la sexta parte del restante, y 600 ducados más; y al tercero la sexta parte del restante y 900 ducados más, y con este orden en los demás, dando siempre a cada uno la sexta parte del restante, y 300 ducados más al uno que al otro. Muerto el padre, partieron la hacienda, y hallaron que tanto vino al uno como al otro: pídese cuántos hijos dejó el padre, cuánta hacienda, y cuanto vino por cada uno
>
> Quita el numerador del quebrado del denominador; esto es, 1 de 6 y quedaran 5 y tantos hijos dejó, luego multiplica los 300 ducados, que se dan de más a cada hijo, por 6, denominador del quebrado y montaran 1800 ducados y tantos ducados le tocaron a cada uno, los cuales multiplicados por los 5 hijos montaran 9000 ducados y tanta hacienda dejó el padre; pruébalo y hallarás ser verdad (Puig, 1715/2001, p. 209).

Razonando tal como se ha hecho con el problem anterior, con el lenguaje simbólico, lo que recibe el último niño,

$$300n + \frac{1}{6}C,\ \mathrm{n} \geq 2 \qquad (4)$$

donde n es el número de niños y C es lo que queda tras el penúltimo reparto,

$$C - (300n + \frac{1}{6} C) = 0, \tag{5}$$

$$6C - C = 6 \times 300n, \tag{6}$$

$$(6 - 1)\ C = 6 \times 300n, \tag{7}$$

El número de niños y la cantidad heredada deben ser números enteros. Si se observa la igualdad anterior y se continúa pensando en términos de factorización y proporción, la relación $\frac{6 \times 300}{6 - 1} = \frac{C}{N}$ muestra que $n = 6\text{-}1$ y $C=6\times300$, es una solución posible, y esta es la idea de que tal vez Fibonacci aplicó.

ESTUDIO COGNITIVO

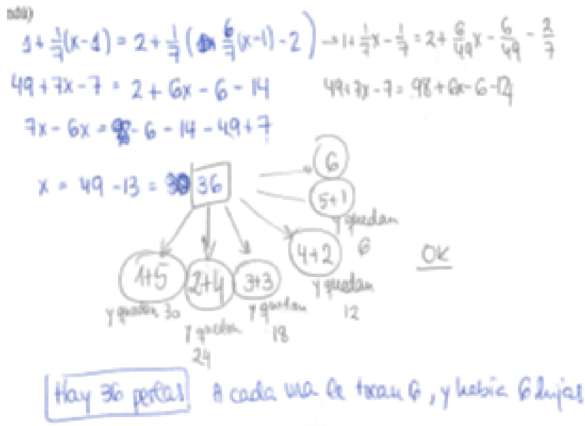
Una vez identificadas las lecturas analíticas "históricas", interesa conocer cuáles son las formas de proceder de los estudiantes actuales en la resolución de este tipo de problemas, ya que nunca antes se ha tenido ocasión de reflexionar propiamente sobre esto y su preparación es por tanto escasa. Así pues sería interesante para una posterior propuesta de enseñanza a los futuros profesores en la que se tengan en cuenta las dificultades, rigideces o rutinas de los estudiantes en relación con la resolución de los problemas verbales de fracciones.

Para ello se les presenta un problema, similar a los anteriores pero con un texto más motivador, titulado "The Raja's pearls" que se encuentra en "El hombre que calculaba" (Tahan, 1993),

> Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y ordenó que el reparto se hiciese del siguiente modo: a la hija mayor correspondería una perla más un séptimo de las que quedasen; la segunda tomaría dos perlas y un séptimo de las restantes; la tercera recibiría tres perlas y un séptimo de las que quedasen. Y así sucesivamente, para las restantes hijas. Las hijas más jóvenes presentaron su queja a un juez, alegando que por ese sistema complicado ellas serían fatalmente perjudicadas. El juez –dice la tradición–, que era hábil en la resolución de problemas, respondió rápidamente que las demandantes estaban equivocadas, y que la división propuesta por el Rajá era justa y perfecta. El juez tenía razón. Hecha la división, cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. Se pregunta: ¿Cuál es el número de perlas? ¿Cuántas las hijas del Rajá? (Tahan, 1993, p. 76)

La muestra de 27 alumnos pertenece a estudiantes del Máster en Educación Secundaria, en adelante MES, procedentes de la Universidad de Valencia.

Los ítems que se estudian de las resoluciones de los alumnos son, el método de resolución y la relación fundamental entre cantidades que utilizan (1, 2 o 3 del apartado anterior).



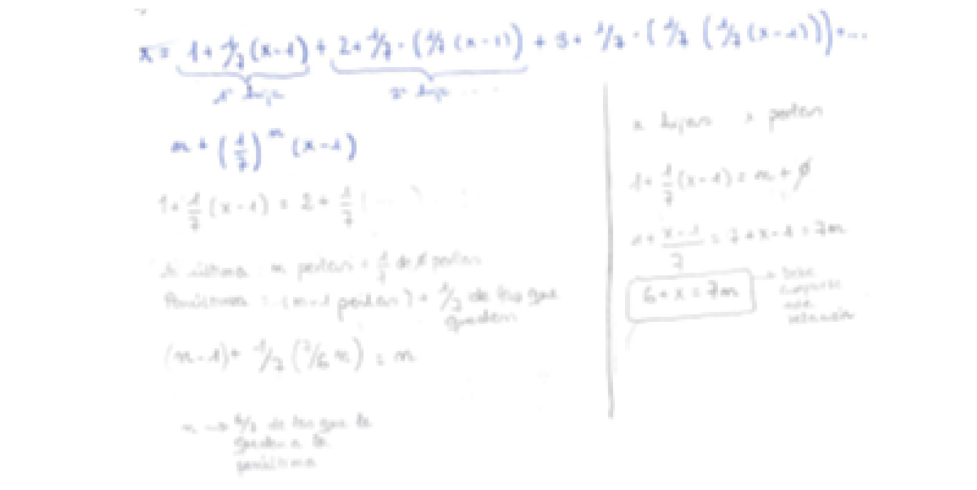
$$1+\frac{1}{7}(x-1)=2+\frac{1}{7}(\frac{6}{7}(x-1)-2$$

x = número de perlas al inicio
Solución. *Hay 36 perlas y 6 hijas, cada una con 6 perlas.*

Figura 1. Ejemplo de resolución algebraica con criterio fundamental 1.

*Como se va dividiendo por 7, es de suponer que el número inicial menos una perla, ser*á divisible por 7.
Empezamos suponiendo que hay 15. 15-1 = 14. 14/7=2. La primera hijatene 3, quedan 12, 12-2=10, no es divisible por 7, seguimos.
El estudiante realiza pruebas hasta llegar a 36,
36-1=35, 37/5=5. La primera hija tiene 6 perlas, el resto es 30, 30-2=28, 28/7=4. La segunda hija vuelve a tener 6 perlas, y el resto es 24. 24-3=21, 21/7=3. La tercera hija tiene 6 perlas y el resto son 18, 18-4=14, 14/7=2. La cuarta hija tiene 6 perlas y el resto es 12, 12-5=7, 7/7=1. La quinta hija tiene 6 perlas y el resto es 6. La sexta hija tiene 6 perlas y el resto es 0.

Figura 2. Ejemplo de resolución aritmética.



x = número de perlas al inicio

Se observan dos problemas:

- El estudiante calcula de forma correcta lo que le toca a la primera hija, pero ya no lo hace bien para la segunda (círculo)
- No es capaz de plantear una ecuación, correcta.

El estudiante escribe:

La última hija: *n perlas+1/7 Ø perlas*

La penúltima hija:

(n-1 perlas) +1/7 de las que queden.

$$(n-1)+\frac{1}{7}\left(\frac{7}{6}n\right)=n$$

n hijas, x perlas

$$1+\frac{1}{7}(x-1)=n+\text{Ø}$$

$$1+\frac{x-1}{7}=7+x-1=7n$$

6 + *x* = *n Se debe cumplir esta relación*

Figura 3. Resolución con incorrecciones matemáticas. Círculo: Expresión de lo que queda.

RESULTADOS

El problema fue resuelto por 11 estudiantes (MES). Usaron el método algebraico, llamando *x* a la cantidad inicial a repartir. Además escogieron la relación fundamental que indica que todas las partes son iguales. Así pues, todos realizan un primer reparto, un segundo reparto, e igualan ambos, para obtenr la cantidad inicial. En la Figura 1 se incluye la solución de uno de los alumnos.

De entre las soluciones, se destaca la de dos estudiantes (MES) que lo resolvieron suponiendo que la cantidad total menos uno debía ser un múltiplo de siete, y resuelven el problema empezando desde el último reparto. Esto lleva a pensar que tal vez Fibonacci pudiera haber realizado el mismo proceso, aunque no se asume debido a que se trata de ensayo y error. Ambos alumnos van realizando pruebas con múltiplos de siete hasta que llegan a la solución.

El resto de estudiantes de la muestra considerada no resolvieron con éxito el problema por diferentes razones. Siete de ellos (MES) no entendieron algunos términos específicos del enunciado. Por un lado, no supieron traducir al lenguaje matemático la sentencia “de lo que queda” (círculo en la Figura 3). Por otro lado, existen otro alumnos de este grupo que no entendieron la frase “un bezante y un séptimo de lo que queda”, ellos traducen esto al lenguaje matemático como, 1+(1/7)x en vez de 1+(1/7)(x−1). Por último, hay estudiantes que tienen problemas con las operaciones aritméticas y con el planteamiento de la ecuación.

El resto de la muestra no realiza nada coherente, con lo que no cabe destacar nada.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha estudiado un problema descriptivo de fracciones sobre herencias a través del análisis histórico y epistemológico. Para la selección de los problemas se han revisado libros de texto de distintas épocas o momentos históricos. Estos problemas formaban parte sustancial de la enseñanza de las matemáticas y se consideraron como la culminación del aprendizaje de la aritmética. Del estudio de las lecturas analíticas se desprende que estos problemas se han resuelto a través de tres relaciones fundamentales y dos métodos de resolución, uno artmético y otro algebraico.

Al presentar este tipo de problemas a una muestra de 27 estudiantes, con alta formación matemática, se ha observado como traducían al lenguage matemático la relación entre las cantidades y qué métodos de resolución utilizaban. Los resultados preliminares muestran una prevalencia en el método algebraico sobre el aritmético, como era de esperar dado la importancia que se otorga al método cartesiano en la enseanza actual, y la relación fundamental que marca que todas las personas tienen la misma cantidad. Remarcar que los estudiantes tenían problemas con un sintagma característico de este problema „de lo que queda“ ya que les costaba la traducción al lenguaje matemático.

El hecho de que los problemas descriptivos puedan resolverse fácilmente y en general con el método cartesiano, como se demuestra en el estudio empírico aquí realizado, ha contribuido a perder de vista que estos problemas han servido para comunicar los usos, las técnicas, enfoques, métodos y el razonamiento de las matemáticas. Toda esta información puede ser útil para enseñar a utilizar los problemas como un objeto de estudio y no subproducto de otro tipo de aprendizaje. En la enseñanza tradicional, la resolución de problemas se presenta como „ejercicio y práctica“ para consolidar o aplicar el conocimiento previamente adquirido y no como estudio en si mismo. Además, también puede ser útil para el investigador, ya que proporciona un modelo de la historia epistemológica para el estudio de los problemas clásicos, no como partes individuales de un contenido matemático, sino en relación con sus raíces y análisis de la evolución.

Por otra parte, el reto de los profesores e investigadores es mantener viva esta riqueza de conocimientos, para evitar que se caiga en el olvido. Se debe tener en cuenta el objetivo del plan de estudios, que considera la resolución de problemas en una competencia básica y adaptarse a la enseñanza y las características de los alumnos.

REFERENCIAS

Aurel, M. (1552) *Libro primero, de arithmetica algebraica*. Valencia: En casa de Ioan de Mey Flandro.

Euler, L. (1770/1821) *Introduction to the Elements of Algebra. Selected from the Algebra of Euler,* by John Farrar. Cambridge: Hilliard, (2ª Ed.)

Fibonacci, L. (1202/2002). Liber Abacci. In: Sigler, L.E. *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon 28(1), 77*, pp.9-22.

Puig, Andrés. (1715/2001). *Arithmetica especulativa y practica y Arte de Algebra*. Barcelona: Por Joseph Giralt. Impresor, y Librero. (Facsímil). Valladolid: Maxtor.

Puig, L. (2003) *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa*. En E. Castro, P. Flores, P.; T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la SEIEM*. Granada: U. de Granada. p. 97-108.

Singmaster, D. (1998) *Chronology of recreational mathematics*. http://utenti.quipo.it/base5/introduz/singchro.htm

Rico, L.; Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación matemática*. Granada: Comares

Tahan, M. (1993) The Man Who Counted - a collection of mathematical adventures. Translated by Leslie Clark and Alastair Reid, W.W. Norton & Co. New York, London.