Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras

Juliana Troyano Dueñas
Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada

Resumen: *La enseñanza del teorema de Pitágoras pretende tanto su comprensión como su aplicación. Este artículo profundiza en el teorema de Pitágoras a partir del Análisis Didáctico, y plantea una tarea para la comprensión del teorema. Hemos llevado esta tarea a una clase de secundaria y analizado la forma en que los alumnos comprenden el teorema de Pitágoras, apreciándose que está muy ligada a la fórmula.*
Palabras Clave: *Teorema de Pitátoras, tareas, percepción, educación secundaria.*

Students' perception of the Pythagorean theorem

Abstract: *The teaching of the Pythagorean theorem seeks both its understanding and its application. This article delves into Pythagorean theorem of didactic analysis, and shows a task for the understanding of the theorem. We have taken this task to a high school class and analyzed how students understand the Pythagorean theorem, appreciating that it is closely linked to the formula.*
Keywords: *Pythagorean theorem, tasks, perception, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

El teorema de Pitágoras es un contenido habitual de las matemáticas de secundaria, que todo el mundo parece conocer, identificándose más con la fórmula que por el significado. Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje del currículo de matemáticas de secundaria (MECD, 2015), proponen en esta etapa la comprensión del teorema y su utilización para obtener medidas y resolver problemas. Es difícil enseñar el teorema de Pitágoras para que lo comprendan, identifiquen cuándo pueden emplearlo, y lo apliquen.

Se necesita profundizar en qué significa este teorema para seleccionar tareas matemáticas con que enseñarlo. En este artículo relatamos una experiencia que hemos realizado en este sentido. Comenzamos por profundizar en el significado del teorema empleando el Análisis Didáctico (Rico, 2009). Posteriormente presentamos una tarea matemática escolar encaminada a que los alumnos comprendan mejor dicho teorema. Ponemos en práctica la tarea y examinamos las respuestas de los alumnos, para apreciar cómo lo comprenden y a qué profundidad llegan. Cerramos con algunas conclusiones sobre la experiencia realizada.

SIGNIFICADO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Para enseñar a comprender un concepto matemático el profesor tiene que disponer de una idea completa del mismo, para ello es importante realizar un análisis didáctico. Una forma de análisis con intención didáctica la propone Rico (2009), dividiendo la profundización en cuatro análisis parciales: contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. En nuestra experiencia hemos realizado los tres análisis primeros, que describimos.

El análisis de contenido pretende apreciar los significados del concepto matemático, que tiene una naturaleza abstracta, y examina tres componentes: estructura conceptual, fenomenología y formas de representación (Gómez, 2002).

La estructura conceptual de un tema matemático es la forma en que se organiza en los textos, preferentemente matemáticos (que suministran elementos, organización y focos de contenido) y textos legales, que establecen cómo hay que contemplarlo en la enseñanza. Realizando esta búsqueda sobre el teorema de Pitágoras apreciamos los contenidos especificados en el currículo de matemáticas de secundaria (MECD, 2015): triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras, justificación geométrica y aplicaciones. Los libros de texto suelen comenzar enunciando el teorema, su fórmula y llegan a la demostración geométrica con áreas. A continuación, se identifican triángulos con el teorema de Pitágoras, enunciándose como el recíproco de este teorema. Finalmente aparecen las aplicaciones del teorema para calcular distancias desconocidas (diagonal de un rectángulo, altura de un triángulo isósceles, entre otras).

Los contenidos muestran diferencias cognitivas entre los aprendizajes que debemos lograr, diferenciando contenidos conceptuales y procedimentales. De los contenidos anteriores destacamos como focos conceptuales los triángulos rectángulos, enunciado del teorema de Pitágoras y justificación geométrica. Estos focos distinguen aspectos métricos (como longitud y área), formas geométricas (cuadrado, triángulo rectángulo), elementos de las figuras (catetos, hipotenusa), relaciones (igualdad, desigualdad), y clasificaciones (de triángulos según sus ángulos), entre otras. Entre los procedimientos son importantes destrezas para aplicar el teorema al resolver problemas relacionados con triángulos.

El teorema de Pitágoras no puede reducirse a una frase del tipo *suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa*, que es una de las expresiones del teorema, que puede representarse de forma simbólica ($h^2 = c_1^2 + c_2^2$). Los conceptos matemáticos no pueden confundirse con la forma de representarlos. Apreciar el significado de los conceptos requiere examinar los sistemas de representación que se emplean para expresarlos, y cobran especial relevancia en su comprensión. Las representaciones de un objeto, concepto o idea, son todas las formas de hacerlo presente (Rico, 2009).

La representación gráfica del teorema de Pitágoras aparece con la diversidad de demostraciones gráficas que se han hecho sobre el mismo (Cañadas, 2001), especialmente con cuadrados sobre los lados de triángulos rectángulos. Materializar estas representaciones facilita su expresión física, bien mediante puzles o construcciones con otros materiales.

Por último, el análisis de contenido examina los problemas, fenómenos y situaciones en que se aplica el teorema de Pitágoras (Rico, 2009). Examinadas estas dimensiones distinguimos significados del teorema muy relacionados entre sí:

- Relación métrica entre las superficies de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo (el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados los catetos).
- Relación métrica entre longitudes de lados del triángulo rectángulo (el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos). Útil para determinar longitudes empleando triángulos rectángulos.
- Condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo (Un triángulo es rectángulo sí, y sólo sí, verifica las condiciones anteriores). Útil para construir ángulos rectos, segmentos perpendiculares.

El análisis cognitivo organiza las capacidades que pretende que los alumnos desarrollen sobre el tema, partiendo del análisis de contenido (Lupiáñez y Rico, 2008). Este análisis examina las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje (Rico, 2009, Lupiáñez y Rico, 2008).

Expectativas son los objetivos que se pretenden alcanzar. En los documentos curriculares identificamos los siguientes objetivos acerca del teorema de Pitágoras (MECD, 2015): Reconocer y construir triángulos rectángulos; Aplicar correctamente el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas; Construir cuadrados sobre los lados de un triángulo; Determinar la relación entre el área de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo; Asociar la relación entre el área de los cuadrados a la relación entre los lados del triángulo; Deducir y enunciar el teorema.

Entre las dificultades de aprendizaje, las investigaciones muestran que es complejo apreciar la doble implicación entre condiciones y relaciones numéricas, las dificultades para identificar triángulos rectángulos cuando sus catetos no son paralelos a los bordes del papel, y la de relacionar los enunciados analíticos y geométricos del teorema de Pitágoras (Cañadas, 2001).

Como consecuencia de estas dificultades surgen errores como son, aplicar el teorema de Pitágoras en cualquier tipo de triángulo o construir cuadrados sobre los lados de un triángulo sin que sus lados sean perpendiculares o tengan la misma longitud. Otros errores son aplicar el teorema de forma incorrecta, sin diferenciar los catetos y la hipotenusa. Son frecuentes los errores de cálculo al despejar.

Hemos revisado materiales didácticos para la enseñanza del teorema de Pitágoras, especialmente los dirigidos a alcanzar objetivos conceptuales de comprensión. Entre ellos está el papel cuadriculado o el geoplano, los materiales físicos (puzles u otros objetos, para construir cuadrados sobre la hipotenusa con cuadrados sobre los catetos), y otros recursos, como el programa geogebra.

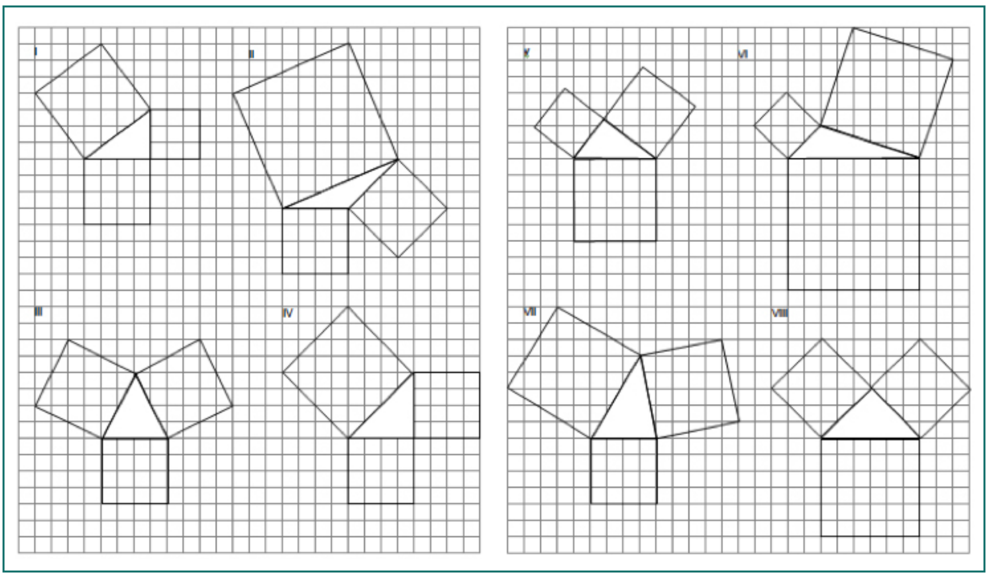
Estudiar materiales y otras oportunidades, nos ha llevado a plantear una tarea, que se presentará a continuación, para contribuir al logro de algunos objetivos y atendiendo a dificultades y errores. Esto ha constituido el análisis de instrucción, que es la parte del análisis didáctico en la que se identifican los procesos de modelización y de resolución de problemas, así como los materiales y recursos disponibles (Gómez, 2002).

Tareas dirigidas a comprensión no pueden limitarse a promover la reproducción, sino que requieren establecer relaciones y buscar regularidades, correspondiendo a los grados de complejidad de conexión y reflexión, según el estudio PISA (Rico, 2009). La tarea propuesta en este artículo promueve la reflexión, relacionar conocimientos y generalizar y justificar resultados obtenidos.

TAREA MATEMÁTICA ESCOLAR PARA COMPRENDER EL TEOREMA DE PITÁGORAS

La experiencia realizada analiza cómo los alumnos comprenden el teorema de Pitágoras, cuando van construyendo el teorema, comprobando propiedades métricas ligadas a tipos de triángulos, formulando el teorema de Pitágoras de varias formas.

Comprende dos partes. La primera consiste en obtener las medidas de lados y áreas de cuadrados construidos sobre triángulos, identificando el tipo de triángulo, llegando a una regularidad que generaliza el teorema de Pitágoras. La segunda es inversa, a partir de dibujar y calcular longitudes y áreas según el tipo de triángulo, para terminar estudiando tipos de triángulos de lados conocidos y formulando de varias formas el teorema de Pitágoras (figura 1).



Ejercicio 1: Completa la siguiente tabla:

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Longitud de lado	**Pequeño**								
	Mediano								
	Grande								
Área de cuadrado sobre	**Lado Pequeño**								
	Lado Mediano								
	Lado Grande								
Clase Triángulo									

Ejercicio 2: Expresa la propiedad que haya obtenido, que expresa la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos.

Ejercicio 3: Empleando papel cuadriculado, dibuja cada triángulo, los cuadrados sobre sus lados y completa la siguiente tabla:

		A	B	C	D
Longitud de lado	**Cateto Pequeño**	1		2	
	Cateto Mediano	2			
	Hipotenusa			6	
Área de cuadrado sobre	**Cateto Pequeño**		36		
	Cateto Mediano		64		24
	Hipotenusa				81
Clase Triángulo		RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO

Ejercicio 4: Averigua cuál de los siguientes triángulos es rectángulo:
a) lados: 9, 12 y 15 b) lados: 2, 2 y 3 c) lados: 4, 5 y 6

Ejercicio 5: Enuncia de varias formas el Teorema de Pitágoras.

Figura 1: Enunciado de la tarea

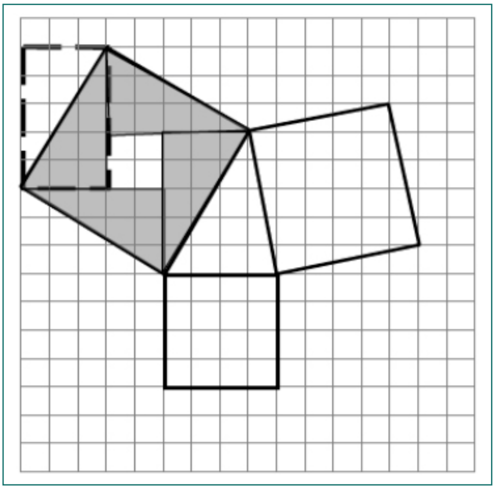


Figura 2: Forma de determinar el área de los cuadrados.

Se espera que los alumnos calculen el área de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos contando cuadritos, aprovechando el papel cuadriculado. Pueden emplear diversos métodos, como contar cuadritos completamente interiores al cuadrado y apreciar cómo y cuáles de los demás se complementan, o bien descomponer cuadrados en diversas figuras, como triángulos rectángulos aprovechando las líneas de la cuadrícula, y contando los cuadritos interiores, bien por el método anterior o determinando el número de cuadrados del rectángulo que lo contiene y dividiendo por dos (Figura 2).

Una vez obtenidas las áreas, aplicando la fórmula del área del cuadrado obtienen la longitud de los lados. Esto es relativamente fácil en figuras con vértices en la cuadrícula, pero notablemente más difícil si no tiene todos los vértices en la cuadrícula (figura V).

Las figuras usadas son triángulos rectángulos (I, IV, V y VIII), con vértices en cuadrícula (I, IV y VIII), catetos en líneas de la cuadrícula (I y IV), hipotenusa sobre la cuadrícula (V y VIII). Dos acutángulos (III y VII) y obtusángulos (II y VI).

La tarea pretende que los alumnos hagan los siguientes razonamientos:

- Si la suma de áreas de cuadrados sobre dos lados es igual al área del cuadrado sobre el tercero, entonces el triángulo es rectángulo (especialmente interesante en VIII, que no deja claro el ángulo recto; y el V, más difícil de obtener longitud de catetos).
- Si la suma de áreas de los cuadrados sobre dos lados es mayor que el área del cuadrado sobre el tercero, entonces el triángulo es acutángulo (agrupando figuras III y VII).
- Si la suma de áreas de cuadrados sobre dos lados es menor que el área del cuadrado sobre el tercero, entonces el triángulo es obtusángulo (demás casos).

Experiencia de enseñanza

La experiencia se ha llevado a cabo en un I.E.S. de Granada, durante el período de prácticas del Máster de Formación Profesional de Profesorado de Matemáticas, proponiéndola en una clase de 3º E.S.O., de 33 alumnos con buen rendimiento en Matemáticas (sólo 6 suspendieron la segunda evaluación y un repetidor), trabajadores y con muchas ganas de aprender. Se propuso en el tercer trimestre, al comienzo de la unidad, sin enseñanza previa, resuelta en grupos de tres durante 50 minutos.

Para analizar la comprensión se utilizan anotaciones tomadas durante la enseñanza (razonamientos de alumnos, dudas, etc.), y respuestas de los alumnos.

Se organizan los datos mirando los siguientes aspectos:

i. *Medición de lados de cuadrados.*
ii. *Relación entre áreas de cuadrados y tipo de triángulo.*
iii. *Construcción de cuadrados sobre lados de triángulos.*
iv. *Diversidad de enunciados del teorema de Pitágoras.*

Medición de la longitud de lados de cuadrados

Cuando los lados de los cuadrados están en la cuadrícula obtienen su longitud contando los cuadritos. Los otros lados los obtienen aplicando la versión métrica de longitudes del teorema de Pitágoras, buscando triángulos rectángulos que los tengan como hipotenusas, como en la figura V. Con ello han pasado a figuras diferentes de las dadas, mediante aproximaciones.

Algunos alumnos empezaron a resolver la tarea a partir de la determinación del área, para determinar longitudes de lados que no están en las líneas de la cuadrícula, y con ello obtener la longitud aplicando la fórmula del área del cuadrado. Pero al comparar con sus compañeros y ver que ellos obtenían el mismo resultado de manera más rápida, acabaron buscando también triángulos rectángulos sobre los que aplicar la forma métrica de longitudes del teorema de Pitágoras.

La forma en la que los alumnos han resuelto la tarea denota que tienen muy asentada la fórmula aritmética del teorema de Pitágoras y ya la dan por supuesta, para ellos es sólo una fórmula que les permite calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo. Por tanto, el teorema de Pitágoras de longitudes, se ha convertido en la herramienta principal para obtener los datos, dejando de lado otras formulaciones.

Aun teniendo en cuenta que la tarea no ha sido resuelta por el método esperado, la mayoría de los alumnos han medido de forma correcta los lados de los cuadrados, exceptuando el caso de la figura V, cuyas medidas no han sido tomadas adecuadamente por ninguno de los alumnos.

Relación entre las áreas de los cuadrados y tipo de triángulo

Son muy pocos los alumnos que han expresado perfectamente esta relación. Aún así, podríamos decir que aproximadamente la mitad de los alumnos han obtenido la relación entre las áreas, siempre en el caso del triángulo rectángulo, aunque no todos la han expresado correctamente, debido a imprecisiones en el lenguaje matemático. Por ejemplo, una de las respuestas ha sido: "*En un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los lados pequeños es igual al área del lado mayor*".

Se observa que los alumnos se contentan con descubrir la relación entre las áreas en el triángulo rectángulo, no sienten la necesidad de expresar esta relación para otro tipo de triángulos, y por tanto no discuten la relación entre las áreas en función de la amplitud de los ángulos de los triángulos. Algunos alumnos han afirmado que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado grande, pero no han especificado que esto ocurre sólo en el caso de que el triángulo sea rectángulo.

Otros alumnos han escrito que cuando los triángulos son rectángulos se verifica el teorema de Pitágoras, pero no hacen referencia al área de los cuadrados. Se pone de manifiesto lo interiorizada que tienen los alumnos la fórmula aritmética entre las longitudes de los lados, para el teorema de Pitágoras, pero en este caso se han obligado a añadir la condición de que el triángulo debe ser rectángulo.

Construcción de los cuadrados sobre los lados de los triángulos

En el ejercicio 3 de la tarea se dan informaciones directas, a partir de las medidas de las longitudes de dos de los lados (dos catetos A, o un cateto y la hipotenusa, C), o mediante las áreas de los cuadrados construidos sobre estos elementos (dos catetos, B; o un cateto y la hipotenusa, D). Los dos primeros pueden construirlos con facilidad, dibujando los catetos sobre las líneas de la cuadrícula, bien directamente los catetos (1 y 2, en A), o determinando esta longitud de catetos, a partir del área del cuadrado (6 y 8 en B, que además forman parte de una terna pitagórica). La construcción de los otros dos resulta muy complicada (para hacerla precisa hay que dibujar la hipotenusa sobre una línea de la cuadrícula y el "arco capaz", o determinando antes la longitud del otro cateto), lo que se complica, al tener los catetos longitudes irracionales.

Éste ha sido el ejercicio en el que los alumnos han tenido más errores. Aquellos que han resuelto esta cuestión como se esperaba, han procedido de forma similar a la primera pregunta, esto es, han construido los lados de los cuadrados trazando previamente los catetos que junto al lado buscado forman un triángulo rectángulo.

Diversidad de enunciados del teorema de Pitágoras

Al enunciar el teorema de Pitágoras, la forma más frecuente ha sido la fórmula aritmética del teorema, en longitudes de hipotenusa y catetos, aunque también ha sido mayoritario el enunciado que hace referencia a las áreas de los cuadrados.

Un ejemplo de un enunciado dado por uno de los alumnos es el siguiente: "*La suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado, en los triángulos rectángulos*". Aplica perfectamente el teorema de Pitágoras, pero expresa de manera incorrecta la relación métrica entre longitudes.

En general, los alumnos no son precisos en la formulación, y sólo unos pocos mencionan la condición de que el triángulo debe ser rectángulo. Ninguno menciona la doble implicación del teorema de Pitágoras entre tipo de triángulo y relación métrica.

CONCLUSIONES

Como se mencionaba al principio de este escrito, en esta etapa educativa se pretende que los alumnos comprendan el teorema de Pitágoras y que ello les lleve a aplicar para resolver problemas. Con esta experiencia hemos podido comprobar que los alumnos tienen mucho más trabajado e interiorizado la aplicación, menos la comprensión.

En general, la tarea ha contribuido a ampliar algo la comprensión del teorema de Pitágoras por parte de los alumnos, pese a que les ha obligado a afrontarlo de una manera más completa. Hubiera sido interesante llevar a cabo una sesión de reflexión y puesta en común de los resultados, tanto para favorecer que algún grupo expusiera otra forma de actuar que ha sido menos frecuente, como para obligarlos a que expresen los razonamientos matemáticos, percatándose así de la necesidad de las hipótesis. Desgraciadamente la tarea planteada no ha favorecido apreciar la doble implicación del teorema, lo que nos obliga a revisar su formulación matemática o la forma de aplicarla.

REFERENCIAS

Cañadas, M. C. (2001). Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos. En J. M. Cardeñoso, A.J. Moreno, J. M. Navas & F. Ruiz, (Eds.). *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad*, (pp. 111-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.

Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE núm. 3, de 3 de enero de 2015*, 169 – 546.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.