4.4. Talleres

4.4.1. Relações entre Geometria e Álgebra com ferramentas do software Geogebra

María José Ferreira da Silva
Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

Resumen

A presente oficina tem como objetivo explorar construções geométricas utilizando o Geogebra com o intuito de articular geometria e álgebra e está dirigido a professores do nível secundário, que não precisam ter conhecimentos do software. Entendemos que as ferramentas e recursos do Geogebra podem ser utilizados para tanto para dar interpretações geométricas para expressões algébricas, quanto o contrário e, ressaltamos que não é necessário ter conhecimentos do software para participar desta oficina. As atividades que serão desenvolvidas na oficina foram trabalhadas em uma formação continuada de professores em Geometria realizada em São Paulo. Elas serão realizadas em duas seções. Na primeira serão exploradas aplicações do teorema de Pitágoras e Thales bem como algumas atividades envolvendo proporcionalidade. Na segunda seção serão tratadas atividades que ainda exploram propriedades de circunferências e geometria espacial. O material pode ser trabalhado com os alunos e esperamos que sirva de inspiração para outras atividades.

Introdução

O Geogebra, como um software gratuito, é de fácil acesso para professores e alunos como uma ferramenta que ajuda o aluno a levantar e validar conjecturas, além de conduzir à representações dinâmicas que se constituem em classes de representações de um mesmo objeto ou situação em detrimento à unicidade obtida com lápis e papel. Por outro lado, de acordo com Silva, Gaita e Salazar (2017, p. 6), citando Gascón (1995), o ensino de álgebra "não deve se ater apenas a problemas aritméticos, mas ao estudo de campos de problemas que envolvam outras áreas da matemática, como é o caso da Geometria e do desenho geométrico. A álgebra escolar já é questionada por Chevallard, em 1989, quando aponta o abandono do uso de parâmetros e do desenvolvimento de fórmulas.

Alguns trabalhos vêm sendo desenvolvidos nesse sentido. Almeida (2010) sugere o ensino dos sólidos arquimedianos, via truncatura, utilizando o Cabri 3D. Silva e Almouloud (2013) constroem um cuboctaedro, a partir de truncaturas de um octaedro regular, para desenvolver uma organização didática para o estudo de uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume. Santos (2016) parte das construções apresentadas por Euclides, para os poliedros regulares convexos, para obter a decomposição e composição do icosaedro e dodecaedro em pirâmides congruentes e, com isso, determinar fórmulas para o cálculo da medida de seus volumes. Silva, Gaita e Salazar (2017) analisam a articulação entre geometria e álgebra em uma situação de cálculo da medida do volume de um icosaedro considerando as etapas do processo de algebrização. No mesmo sentido, mas com foco na geometria plana, Almouloud, Silva e Farias (2017) publicam sequências para o ensino de geometria no ensino básico, resultantes de uma formação continuada de professores, que privilegiam o uso de um software de representação dinâmica. Assim, essas referências nos inspiraram a construir esta oficina, mas buscando um referencial que ampliasse as questões do ensino de álgebra e de geometria.

Referencial teórico

Vários estudos discutem o ensino de álgebra, mas os iniciados por Chevallard (1984, 1989, 1990) fazem uma crítica ao ensino da álgebra escolar considerando que seu ensino privilegia o cálculo algébrico e situações que configuram apenas uma aritmética generalizada. Chevallard (1989) afirma que o principal papel da álgebra é a de modelizar sistemas intra ou extramatemáticos promovendo uma dialética entre o cálculo algébrico e os sistemas numéricos, por exemplo, em vez apenas de generalizar a aritmética. Acrescenta que o cálculo algébrico deve funcionar como ferramenta útil e em seu texto de 1990 esquematiza o processo de modelização desenvolvido em três etapas que partem da identificação de variáveis; da construção de modelos a partir de relações entre essas variáveis e, por fim, um trabalho com o modelo que produza novos conhecimentos a respeito do sistema em estudo. Para o autor a modelização está presente em toda atividade matemática e ainda, a aritmética é um conhecimento oral cujas ferramentas são a linguagem natural e o cálculo com números que, eventualmente, podem ser escritos.

Nesse sentido, Bolea, Bosch e Gascón (2001) apresentam quatro indicadores para reconhecer o grau de algebrização de uma organização matemática: tratar com tipos gerais de problemas, em vez de problemas isolados, o que é possível com a introdução de parâmetros que permitem manipular a estrutura global de tipos de problemas; reconhecer condições para que um determinado tipo de problema tenha solução; unificar diferentes tipos de problemas, técnicas e justificativas, além da geração de novos tipos de problemas.

Baseando-se também nos estudos de Chevallard, Munzon, Bosch e Gascón (2010, 2015) apresentam três etapas para o processo de algebrização. Para os autores esse processo, de fato, se inicia com programas de cálculo como uma sequência de operações aritméticas que se pode efetuar "passo a passo", mas deve avançar para a hierarquia das operações e normas para uso de parênteses que fazem surgir a noção de expressões algébricas e programas de cálculos equivalentes. Na segunda etapa devem ser trabalhadas situações em que apenas as técnicas de simplificação ou expressão de um programa de cálculo não são suficientes, isto é, devem surgir relações entre os dados e a incógnita para caracterizar a igualdade entre dois programas de cálculo. Seria nesta etapa que a equação deve ser trabalhada como um novo objeto matemático e implicaria em novas técnicas como as equações equivalentes e o cancelamento. Segundo os autores a álgebra escolar dominante não supera esta etapa quando foca apenas na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica e para a solução da equação obtida. É necessário atingir a terceira etapa com a introdução de relações entre programas de cálculo com várias variáveis, que podem ser interpretados como fórmulas, nos quais desaparece a distinção entre parâmetros e incógnitas.

Silva, Gaita e Almouloud (2018) entendem que as quatro etapas do processo de modelização algébrica proposto por Chevallard deve ser desenvolvido na terceira etapa do processo de algebrização, para que efetivamente o ensino de álgebra aconteça. A primeira etapa desse processo se caracteriza por uma situação problemática inicial do sistema que será modelizado da qual se tem questões que não tem respostas imediatas. A seguir, é necessário identificar e designar as variáveis e as relações entre elas que se concretizará em um modelo algébrico de um sistema de várias variáveis ou parâmetros ou de um sistema de dados e incógnitas. É na terceira etapa que ocorre o trabalho manipulativo que culminará em um modelo final e na interpretação dos resultados obtidos. Finalmente, na última etapa, devem ser enunciados novos problemas para ampliar o conhecimento do sistema estudado e ocorrer a organização dos resultados obtidos.

Assim, com essa referência buscamos atividades que pudessem romper com protótipos amplamente utilizados para o ensino de geometria plana, mas que privilegiasse uma dialética real entre geometria e álgebra, que apresentaremos na sequência.

A oficina

O objetivo da oficina é conceber e explorar construções geométricas utilizando o Geogebra e sua relação com a álgebra. A oficina está dividida em duas seções de, aproximadamente uma hora e cinquenta minutos cada uma. Na primeira seção, iniciamos com duas atividades que tratam de aplicação direta do teorema de Pitágoras, com o objetivo de associar o quadro geométrico ao quadro algébrico. Na primeira atividade deve ser percebido que se um segmento mede $p = \sqrt{a^2 + b^2}$, sendo a e b medidas de segmentos então o segmento solicitado é a hipotenusa de um triângulo retângulo pois $p^2 = a^2 + b^2$. Da mesma forma no item seguinte, o segmento procurado é o cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo a e o outro cateto medindo b.

A segunda atividade tem como objetivo a construção de uma figura e, a partir de sua observação, e de cálculos algébricos determinar medidas de segmentos. Construções auxiliares ajudam a encaminhar a justificativa algébrica, como mostra a figura 1, e às duas possibilidades de resultado: BC = 2 e CD = 9 ou BC = 9 e CD = 2.

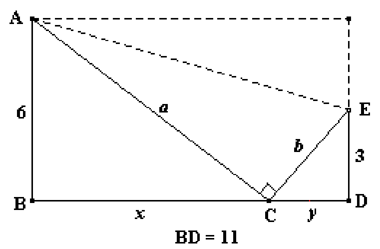

Figura 1: resolução geométrica da atividade 2

Fonte: produção dos autores

A atividade 3 tem como objetivo constatar que a medida da área da superfície do triângulo de maior lado é igual à soma das medidas das áreas das superfícies dos outros dois. Além disso, perceber que essa relação permanece se, sobre os lados do triângulo ABC forem construídos polígonos regulares ou semicírculos.

As atividades seguintes tratam de proporcionalidade e do teorema de Thales. A quarta atividade tem por objetivo a aplicação direta do teorema para a solução geométrica de um problema. A construção consiste em traçar pelo ponto P uma reta t, paralela à reta r que intercepta a reta s no ponto E. Determinando o ponto A simétrico de O em relação ao ponto

C, este se torna ponto médio do segmento AO. Ao traçar uma reta pelos pontos A e P, obtemos na intersecção com a reta r, o ponto B. Se t // s e AC = CO então AP = PB e P é ponto médio de $\overline{AB}$. As atividades 5 e 6, têm como objetivo a determinação geométrica da quarta e da terceira proporcional, ou seja, a partir de uma proporção, dada algebricamente, obter uma representação geométrica e justifica-la. No primeiro caso, como mostra a figura 2, dados três segmentos, com medidas a, b e c temos que determinar o segmento de medida $x = \frac{b \cdot c}{a}$ que será obtido com a aplicação do teorema de Thales.

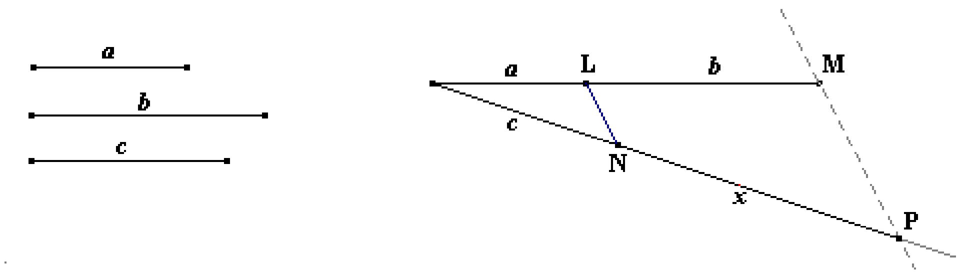

Figura 2 – Solução da atividade 5

Fonte: produção dos autores

Como $\overline{LN} // \overline{MP}$, por Thales, x é a quarta proporcional entre as medidas a, b e c, isto é $x = \frac{b \cdot c}{a}$. De maneira análoga temos a solução da atividade 6.

Na segunda seção apresentamos cinco situações que tratam de propriedades da circunferência e uma que trata da determinação de fórmulas para medidas de volumes. Numerando na sequência da seção 1, a atividade sete trata de observar que qualquer ponto P, sobre um dos arcos determinados pela corda $\overline{AB}$, determina o ângulo APB que tem medida constante. Este arco recebe o nome de arco capaz do ângulo APB sobre o segmento AB por ser considerado como o arco "capaz" de "ver" o segmento AB sob um determinado ângulo. Além disso perceber também, a partir da movimentação da construção, que se um ponto N pertence ao outro arco, determinado pela mesma corda, a medida do ângulo ANB é constante e igual a $180° - med(A\widehat{M}B)$. No item final da atividade é solicitada uma ação inversa, isto é, a construção do arco capaz a partir de um ângulo e de um segmento dados, como mostramos na figura 3. Dados o ângulo FHE e o segmento CD, traçamos pelo ponto A uma reta paralela à reta CD. A seguir determinamos o ponto B tal que AB = CD e traçamos por A uma paralela à semirreta HF para determinar o ângulo BAR = FHE.

Para determinar o centro da circunferência traçamos a mediatriz da corta AB e traçamos a reta AQ, perpendicular à reta AR, que intercepta a mediatriz no ponto O, centro da circunferência procurada.

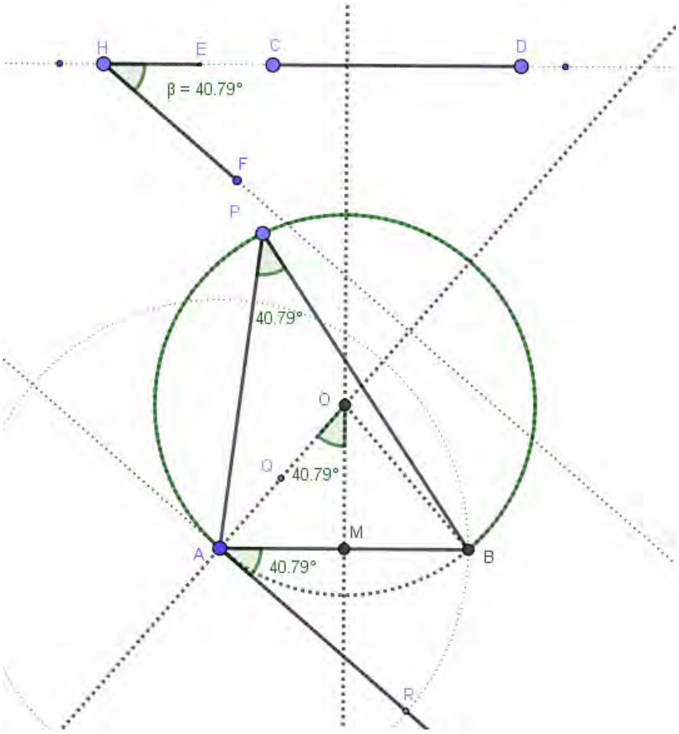

Figura 3 – construção do arco capaz a partir de um ângulo e de um segmento.

Para justificar essa construção observamos que como o ângulo BAR = β o ângulo BAQ = 90º - β. Se considerarmos que se o ponto M, é médio do segmento AB e o triângulo AMO é retângulo em M então o ângulo AOM = β. Assim, como AOB = 2β (ângulo central) temos que para qualquer ponto P do arco AB, APB = β (ângulo inscrito). A atividade 8 tem como objetivo explorar as relações entre as medidas dos segmentos formados por duas cordas concorrentes de uma circunferência, a partir de uma representação dinâmica. A conjectura é a obtenção de uma propriedade que pode ser enunciada como: *dadas duas cordas, AB e CD, que se interceptam no ponto P, o produto das medidas dos segmentos formados em uma corda (PA* x *PB) é igual ao produto das medidas dos segmentos formados na outra corda (PC* x *PD).* De maneira análoga, na atividade 9 busca-se definir potência de um ponto em relação a uma circunferência: *se as retas suportes de duas cordas, AB e CD de uma circunferência concorrem em um ponto P, interior ou exterior a essa circunferência, o produto PA* x *PB é igual ao produto PC* x *PD. O produto PA* x *PB é constante para qualquer secante que passe pelo ponto P.* Na atividade 10, busca-se a relação entre tangentes a uma circunferência e na atividade 11 a relação entre tangente e secante a uma circunferência.

Na atividade 12 trabalhamos com geometria espacial e buscamos determinar uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro regular a partir de um cubo. Nesta atividade, de acordo com nosso referencial, estamos trabalhando efetivamente com álgebra, no que tange à determinação de fórmulas, ao uso de parâmetros e ao raciocínio funcional. Após a construção, como mostra a figura 4, é possível perceber, com a ajuda do software, que cada uma das pirâmides retiradas do cubo representa 1/6 do volume do cubo. Como são retiradas quatro dessas pirâmides então são retirados 4/6 ou 2/3 do volume do cubo o que significa que o tetraedro representa um terço do volume do cubo, ou seja $V_T = a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3$. Assim, temos uma fórmula para calcular a medida do volume do tetraedro em função da medida *a* da aresta do cubo que o originou.

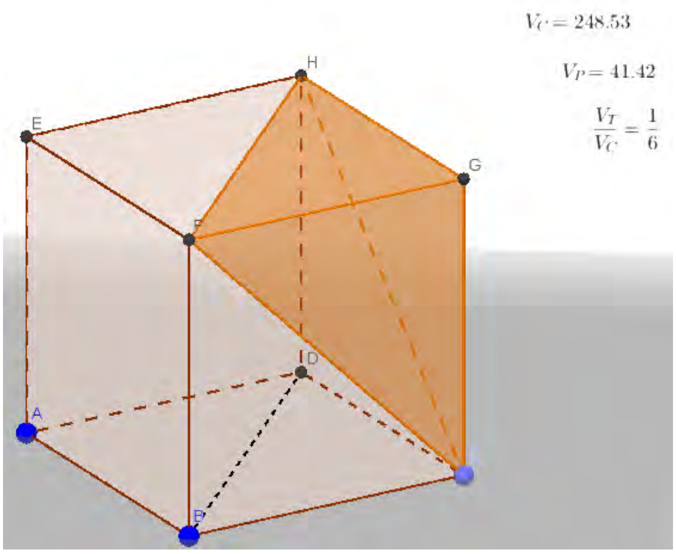

Figura 4 – parte da solução da atividade 12

Fonte: produção dos autores

Mas o tetraedro é um poliedro regular de aresta medindo $x = a\sqrt{2}$ e para calcular a medida do volume de um tetraedro regular qualquer precisamos de uma fórmula em função da medida de sua aresta e não do cubo que o origina. Dessa forma podemos fazer uma mudança de parâmetro considerando que $a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ que substituído na fórmula obtida anteriormente obtemos $V_T = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$.

A partir dessa atividade poderia ser discutido a trissecção do prisma e a generalização da fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide qualquer.

Referências

Almeida, T. C. S. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: Um estudo de truncaturas baseadas no renascimento.* PUC-São Paulo, 185 p, Dissertação (Mestrado profissional em ensino de Matemática).

Almouloud, S. A. & Silva, M. J. F. & Farias, L. M. S. (org.). (2017). *Sequências para o ensino de geometria no ensino básico.* Salvador: EDUFBA.

Bolea, P. & Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidade. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n. 21(3), p. 247-304.

Chevallard, Y. (1984) Le passage de l´arithmetique a l´algebrique dans l´ensegnement des mathematiques au college**.** Premiere partie, l´evolution de la transposition didactique. *Petit x*, n. 5, p. 51-94.

Chevallard, Y. (1990). Lepassage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Troisième partie. Voies d'attaque et problemas didactiques. *Petit x*, n 23, p. 5-38.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Munzón, N. & Bosch, M. & Gascón, J. (2015). El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, *Vol 4*(2), 106-131, 2015.

Munzón, N. & Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introcución del álgebra em secundaria. In: M.M.Moreno et al (Eds.), *Investigación em Educación Matemática* XIV, p.545-556, Lleida: SEIEM.

Santos, A. A. dos (2016) *Construção e medida do volumen dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática*. PUC-São Paulo, 167p, Tese (Doutorado).

Silva, M. J. F & Gaita, C. & Salazar, J. F. (2017). A articulação entre Geometria e Álgebra na construção de fórmulas para o cálculo de medidas de volume. In: *Revista Educação Matemática em Foco.* V6, n.1, pp.4-20.

Silva, M. J. F. & Gaita, C. & Almouloud, S. A. (2018). Una articulación teórica entre competencia algebraica, proceso de algebrización y modelización algebraica. In: *Revemat (no prelo).*

Silva, M. J. F. & Almouloud, S. A. (2013). Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. In: *Actas del VII CIBEM,* ISSN 2301-0797, pp. 7658-7665.

Volver al índice de autores