4.1.2. Sistemas de Equações Lineares: organização matemática local (conferencia especial)

Dra. Maria José Ferreira da Silva
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

O presente artigo é um dos resultados de um projeto de pesquisa conjunto entre os grupos PEA-MAT e DIMAT, respectivamente, da PUC-SP e PUCP que tem como objetivo apresentar duas organizações matemáticas locais relacionadas ao ensino de sistemas de equações lineares. O referencial teórico é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e a motivação para tal estudo foi a constatação de que tanto os professores que participaram da formação continuada no âmbito desse projeto, quanto os livros textos dos dois países privilegiarem o saber-fazer desse conteúdo sem explicitar suas justificativas. Apresentamos aqui duas praxeologias locais partindo de duas tarefas e de técnicas possíveis de resolvê-las, as justificando por meio de um discurso tecnológico-teórico, em geral, ausente no ensino de tal conteúdo.

Introdução

No âmbito do projeto Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos, desenvolvido de forma colaborativa pelos grupos de pesquisa PEA-MAT, da PUC-SP e DIMAT do *Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas* (IREM) da PUC-Peru, um dos temas era investigar o ensino e a aprendizagem da álgebra escolar. Um objetivo era apoiar professores na organização de conteúdos em diferentes pontos de vista e ressaltar o desenvolvimento de sequências didáticas que favorecesse uma rotina de aula produtiva. Com esse propósito, entre outros, realizamos formações continuadas no Brasil e no Peru com professores de Matemática do Ensino Básico.

A primeira, realizada em São Paulo, tinha como objetivo discutir, de forma colaborativa, questões do ensino de álgebra escolar. Depois de alguns encontros e discussões gerais os professores começaram a focar em Sistemas de Equações Lineares. As principais questões eram referentes às técnicas de resolução e as dificuldades dos alunos. No entanto, quando questionados a respeito de como justificavam as técnicas para os alunos, não souberam explica-las e perceberam que conheciam diferentes técnicas, mas não as justificavam, nem para si, nem para os alunos. Dessa forma, conduzimos a formação com os professores peruanos focando nesse tema e, da mesma forma, as justificativas não ocorreram completamente. Depois do tema ser escolhido em São Paulo fizemos uma revisão bibliográfica (Gaita e Silva, 2018, no prelo) e notamos que esse conteúdo tem sido muito estudado por vários pesquisadores que, em grande parte se preocuparam ou com as dificuldades apresentadas pelos alunos ou em aplicar uma sequência com o objetivo de sanar tais dificuldades. É raro encontrar trabalhos que questionem o currículo ou os conhecimentos dos professores para ensinar.

Baseando-nos na Teoria Antropológica do Didático buscamos nessas formações que os professores desenvolvessem um discurso tecnológico-teórico para as técnicas de resolução que apresentavam, isto ocorreu parcialmente nos dois casos, pois alguns professores já haviam desenvolvido suas próprias formas de lidar com o tema em sala de aula, ou seja, já tinham hábitos difíceis de serem reformulados. Assim, neste artigo, temos como objetivo fazer uma reflexão a respeito de possíveis justificativas para algumas técnicas utilizadas pelos professores em tal formação sob o ponto de vista de organizações matemáticas locais. Com esse intuito apresentaremos, no que segue, o referencial teórico que embasou a formação e, em seguida, estudaremos, a partir de um problema, diferentes soluções apresentadas pelos professores organizados matematicamente.

Referencial teórico

Para Chevallard (1999) o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento. O conhecimento e o saber, entendido como certa forma de organizar conhecimentos, entram em jogo com a noção de relação, pois um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece. A noção de "relação" trata então das práticas sociais que se realizam em uma instituição e que envolvem o objeto em questão. Assim, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de, pelo menos, uma pessoa ou instituição com esse objeto.

De acordo com Almouloud (2015) a Teoria Antropológica do Didático – TAD – estuda condições, possibilidades e funcionamento de sistemas didáticos, ou seja, das relações entre sujeito, instituição e saber. Em outras palavras a TAD estuda o homem frente a situações matemáticas, ou melhor, ao saber matemático. Para Chevallard (1999) sua teoria é "antropológica" porque situa a atividade matemática e o estudo de matemática no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Uma das primeiras contribuições da TAD, segundo Bosch e Gascón (2002, p. 6), foi "evidenciar que não é possível interpretar de maneira adequada os fenômenos didáticos sem considerar a relatividade institucional da atividade matemática".

Na TAD, segundo Chevallard (1999), um saber refere-se a uma organização ou praxeologia que funciona como uma máquina de produção de conhecimento, na qual as noções de tipos de tarefa, de técnica (maneira de fazer), de tecnologia (justificativa para a técnica) e teoria (saberes científicos que justificam a tecnologia) permitem modelizar as práticas sociais, em particular, a atividade matemática. Dessa forma, para existir em uma instituição, qualquer técnica deve ser compreensível, legível e justificada, ou seja, é necessário existir um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas (tecnologia). Mas, por sua vez, esta tecnologia também precisa de uma justificativa que se dá no âmbito da teoria. Uma praxeologias será considerada pontual se uma determinada técnica resolve um conjunto de tipos de tarefas; será considerada local se agrupa várias praxeologias pontuais em torno de uma mesma tecnologia e será regional quando agrupa várias organizações locais com a mesma teoria justificando as tecnologias associadas.

Para o autor é a instituição que caracteriza um problema que deve ser resolvido, por exemplo a necessidade de reconstruir tarefas e, no caso da sala de aula, caracteriza uma questão didática. O autor distingue então dois tipos de praxeologias ou organizações a matemática, que corresponde à realidade matemática que se pode construir para uma sala de aula e a didática que corresponde à maneira de se construir essa organização matemática. No caso dos sistemas de equações lineares, como objeto de ensino, encontramos diferentes técnicas de resolução e diferentes alcances, algumas extremamente custosas para sistemas com um número maior de equações. No ensino básico o discurso tecnológico-teórico está nas equações e sistemas equivalentes que nem sempre são explicitados durante o ensino das técnicas. Em termos de teoria esse discurso seria justificado no estudo de definições e propriedades dos polinômios.

Para Chevallard (1999) é necessário examinar os diferentes espaços em que o objeto matemático e os saberes associados a ele são encontrados, ou seja, seus *habitats*. Para isso introduz a noção de ecologia de uma praxeologia para referir-se às condições de sua construção e vida nas instituições que a produz, utiliza ou transpõe apoiando-se em ideias da ecologia biológica para explicar as relações entre objetos matemáticos no estudo de um objeto matemático específico. Assim, a ecologia didática dos objetos matemáticos se apresenta como um meio de questionamento da existência de tais objetos na instituição, ou seja, o que existe ou não existe e por quê? E, ainda se poderia existir e em que condições. Enfim, permite evidenciar e analisar as estruturas ecológicas dos objetos matemáticos, suas relações hierárquicas. No caso dos sistemas de equações lineares poderíamos perguntar: que saberes os alimentam, que outros objetos matemáticos se relacionam com eles? Qual a função do ensino de sistemas de equações lineares? Seria a resolução de problemas?

Não pretendemos responder tais questões neste momento, por falta de espaço para todas as discussões necessárias, mas as iniciaremos apresentando duas praxeologias locais no sentido de focar seu discurso tecnológico-teórico que, como evidencia Gaita e Silva (2018, no prelo) não aparecem nos livros textos utilizados, tanto no Brasil, quanto no Perú. Faremos tal análise a partir de dois problemas, discutidos nas formações de professores desenvolvidas nos dois países, que envolvem o saber-fazer aritmético e algébrico. Os resultados aqui apresentados referem-se às duas formações e não os identificaremos especificamente porque foram semelhantes, embora os professores peruanos tivessem arriscado mais no discurso tecnológico teórico.

Análise do primeiro problema

Com o objetivo de explicitar uma organização matemática local iniciaremos com um problema que envolve equação retirado de Bolea (2002, p. 173): ***Encontrar três números cuja soma seja 164, tais que o segundo supera o primeiro em 14 e que o terceiro seja a soma dos dois primeiros. Resolva aritmeticamente.***

A partir do tipo de tarefa: determinar aritmeticamente um valor desconhecido, os professores, em sua maioria do Ensino Fundamental II (Secundaria), resolveram primeiro algebricamente. Solicitados a resolverem aritmeticamente permaneceram em silêncio, mas depois de algum tempo, um professor apresentou a solução e, os outros, influenciados pela solução algébrica, feita inicialmente, começaram a discutir. A primeira solução coincide com a solução apresentada por Bolea (2002, p.173), que caracteriza as soluções aritméticas por meio de um discurso: o *segundo número é igual ao primeiro aumentado de 14. O terceiro número, sendo a somo dos outros dois, vale o primeiro mais o primeiro aumentado de 14, quer dizer, duas vezes o primeiro mais 14. A soma 164 refere-se então em quatro vezes o primeiro aumentado em 28. Se tirarmos 28 de 164, o resto, 136, será o quádruplo do primeiro número. Portanto, o primeiro número é 34 e, portanto, o segundo número é*

34 mais 14 ou 48 e o terceiro a soma de 34 e 48, quer dizer, 82. Essa técnica aritmética, que, de acordo com a autora o aluno deveria aprender a dominar, se caracteriza por uma técnica oral que destaca o papel funcional do cálculo mental nas operações aritméticas, que podem, eventualmente, ser registradas no sentido de não perder a condução do raciocínio: $164 - 28 = 136$ e $136 \div 4 = 34$; $34 + 14 = 48$; $34 + 48 = 82$.

Uma segunda resolução aritmética foi apresentada, por outro professor: *se o terceiro representa a soma dos dois primeiros, podemos dizer que esse número é a metade de 164, e a soma do primeiro com o segundo representam a outra metade. Então o terceiro número é 82. Retirando 14 de 82 obtemos 68 que representa duas vezes o primeiro número. Logo, sessenta e oito dividido por dois, resulta em 34 e podemos concluir que esse é o primeiro número. O segundo número seria então trinta e quatro mais catorze que resulta em 48 e o terceiro 82 que é a soma dos dois.* O registro dos cálculos seria: $164 \div 2 = 82$; $82 - 14 = 68$; $68 \div 2 = 34$; $34 + 14 = 48$ que, sem o discurso, pode tornar-se incompreensível.

Na terceira solução apresentada, como mostra a figura 1, o professor apresentou as operações que realizou explicando-as. Esta solução teve que ser explicada várias vezes para os outros professores, pois não entendiam o caminho escolhido pelo colega, colocamos entre parênteses o discurso que o professor utilizou para explicar sua técnica.

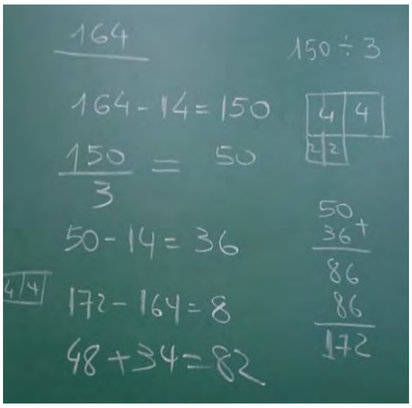

Figura 1: Terceira resolução aritmética apresentada

Primeiro, retirou 14 de 164 (porque o segundo número é maior que o primeiro em 14), dividiu o resultado por 3 (pois o terceiro é a soma dos dois primeiros) resultando em 50. Retirou então 14 de 50 (porque o segundo número é maior que o primeiro em 14) obtendo

36, que é o primeiro número. Considerou então que o primeiro número era, 36, o segundo 50 e o terceiro a soma dos dois, 86. Mas, como a soma desses três números resulta em 172 (oito a mais que 164) considerou que a cada metade deveria ser retirado 4 (o primeiro e o segundo número, representam uma metade do valor total e o terceiro a outra metade). Ou seja, o primeiro número é $36 - 2 = 34$ e, o segundo número, é $50 - 2 = 48$.

Assim, apresentamos uma tarefa do tipo “determinar um valor desconhecido aritmeticamente” a partir de um problema que conduziu a três técnicas aritméticas diferentes para sua solução que foram associadas a uma explicação (tecnologia) e que poderia ser justificada pelas propriedades das operações aritméticas (teoria). Com isso temos uma praxeologia local constituída por três praxeologias pontuais, pois apresentamos três técnicas que podem ser justificadas pelo mesmo discurso tecnológico teórico, as propriedades das operações aritméticas.

Agora, trataremos o mesmo problema do ponto de vista algébrico que, durante a formação, foi resolvido pelos professores sem problemas, mas cuja técnica não foi justificada por eles. Apresentaremos a discussão da resolução algébrica desse problema dada por Chevallard e discutido por Bolea (2002) quando diz que esse tipo de resolução deve vir para mostrar que o emprego de símbolos torna mais fácil a solução, pois o método aritmético é amplo e pode ser penoso em alguns casos. Acrescenta, que o emprego de signos para indicar as operações a serem feitas pode simplificar consideravelmente a solução e mostrar que “a álgebra proporciona outros instrumentos de pensamento e de ação (p.174)”. Assim, considerou a separação com o signo + das quantidades que serão somadas, a separação pelo signo = para as igualdades e a representação do primeiro número pela letra *x*, obtendo então que:

primeiro número: x

segundo número: $x + 14$

terceiro número: $x + x + 14$

e, portanto, $x + x + 14 + x + x + 14 = 164$ ou $4x + 28 = 164$.

Subtraindo 28 aos dois membros da igualdade se obtém: $4x = 136$. De onde vem que $x = 136 \div 4 = 34$; $x + 14 = 48$ e $x + x + 14 = 82$.

Se encontra aqui uma técnica, muito familiar, com suas etapas: escolher a incógnita principal, *x*; expressar as outras incógnitas com a ajuda de *x*; escrever a equação; resolver a equação em *x* e calcular os valores das outras incógnitas. (Bolea, 2002, p. 174).

No entanto, o discurso tecnológico-teórico que justifica essa técnica está na definição dada para equação polinomial e suas propriedades. Escolhemos buscar tal discurso em um livro para a segunda série do ginásio (atual 7º ano do Ensino Fundamental, 12 anos) do final da década de 50. Sangiorgi (1959, p. 115-116) depois de apresentar um capítulo dedicado ao estudo do cálculo literal e de polinômios define igualdade algébrica como sendo "um conjunto de duas expressões algébricas ligadas pelo sinal de =". A identidade como "a igualdade que se verifica para qualquer valor atribuído às letras que nela figuram". A equação como "a igualdade que se verifica somente para alguns valores particulares atribuídos a todas ou algumas letras que nela figuram". Mais à frente, define que duas ou mais equações, que tem o mesmo número de raízes, dizem-se equivalentes, quando as suas raízes têm os mesmos valores" e passa a tratar a resolução de equações de primeiro grau com uma incógnita "resolver uma equação significa determinar as suas soluções, caso existam, ou verificar a sua impossibilidade. Para este fim empregamos certos princípios, denominados princípios de equivalência, que permitem transformar a equação dada em uma equação equivalente de resolução imediata." (Sangiorgi, 1959, p. 117).

Na sequência, apresenta esses princípios, seguidos de exemplos. "Primeiro princípio: somando-se ou subtraindo-se aos membros de uma equação, uma mesma expressão, obtém-se uma equação equivalente à equação dada (p. 118)." "Segundo princípio: multiplicando-se ou dividindo-se os membros de uma equação por uma mesma expressão diferente de zero e que não contenha a incógnita, obtém-se uma equação equivalente à equação dada (p. 119)." Para cada um dos princípios apresenta um exemplo resolvido justificando cada passagem para a obtenção de equações equivalentes e as consequências dos princípios como, por exemplo: "pode-se passar (ou transpor) um ou vários termos de um membro para outro de uma equação desde que se troquem os seus sinais" (p.118). Nos parece que esta consequência como regra é o que predomina hoje no ensino e não o princípio de equivalência. Na página 125 o autor apresenta o que chama de *discussão de uma equação do primeiro grau com uma incógnita* afirmando que "discutir uma equação é verificar se ela tem ou não solução, isto é, se é possível ou não a sua resolução", apresenta então uma equação do primeiro grau em sua forma reduzida "$ax = b$ onde a (coeficiente da incógnita) e b (termo conhecido) são dois números." O autor evidencia tal discussão a partir de três hipóteses: $a \neq 0$ e nesse caso $x = \frac{b}{a}$ e a equação é possível e determinada; $a = 0\ e\ b \neq 0$ e agora a equação se reduz a $0 \cdot x = b$ o que implica que a equação não tem solução, é impossível; $a = 0\ e\ b = 0$ que conduz à equação $0 \cdot x = 0$ que caracteriza uma identidade, "qualquer número atribuído a *x* pode verifica-la".

No entanto, para Bolea (2002) essa técnica também não é perfeita, pois o resultado é isolado e não revela nada a respeito de sua origem, pois os dados desaparecem enquanto se busca o valor da incógnita o que obriga a recomeçar o mesmo raciocínio para resolver outro problema semelhante em que apenas os números são alterados.

Para Bolea (2002) a contribuição da álgebra vai além, quando introduzimos parâmetros, porque estes possibilitam a generalização do problema e de sua solução. Afirma que, segundo Chevallard, esse problema, com o uso de parâmetros, passa a ser enunciado da seguinte forma: e***ncontrar três números cuja soma seja S, tais que o segundo supera o primeiro em a e que o terceiro seja a soma dos dois primeiros.***

Apresentamos tal problema aos professores em formação que rapidamente chegaram à expressão $x = \frac{S-2a}{4}$ e de imediato afirmaram que o valor de *x* deveria ser um número múltiplo de 4 e, ainda, que *S* deveria ser maior que *2a*. Mas, solicitados à apresentar um discurso tecnológico-teórico que justificasse a técnica escolhida as discussões não avançaram e não perceberam que a técnica foi a mesma utilizada quando o problema apresentava números. Para a autora esse resultado mostra que o primeiro número é igual a quarta parte do excesso da soma com o dobro da diferença dos dois primeiros números e esse resultado permite resolver todos os problemas que só se diferenciam pelo valor numérico de seus dados. Para a autora a utilização de parâmetros permite trabalhar números conhecidos como se fossem desconhecidos e dá à álgebra elementar um pleno alcance porque manifesta a função das expressões algébricas.

Na discussão com os professores ficou claro que trabalhamos com os alunos apenas a resolução dos problemas isoladamente, sem a utilização de parâmetros nem discussões ou justificativas para as técnicas utilizadas, pois estas são apenas apresentadas.

Análise do segundo problema

O segundo problema envolve sistemas de equações lineares, também discutido com os professores, que para sua solução apresentaram todas as técnicas possíveis, mas nenhum discurso tecnológico teórico. Explicitaremos tal discurso apenas para duas técnicas utilizadas, no sentido de exemplificar o que seria uma praxeologias local. O problema é o seguinte, em sua versão em espanhol: **Diego ahorró S/. 15 en monedas de 2 y 1 soles. Si en total son 9 monedas, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene Diego?**

Os professores apresentaram suas soluções no quadro negro e a primeira técnica foi chamada de método da igualdade, como mostra a figura 2.

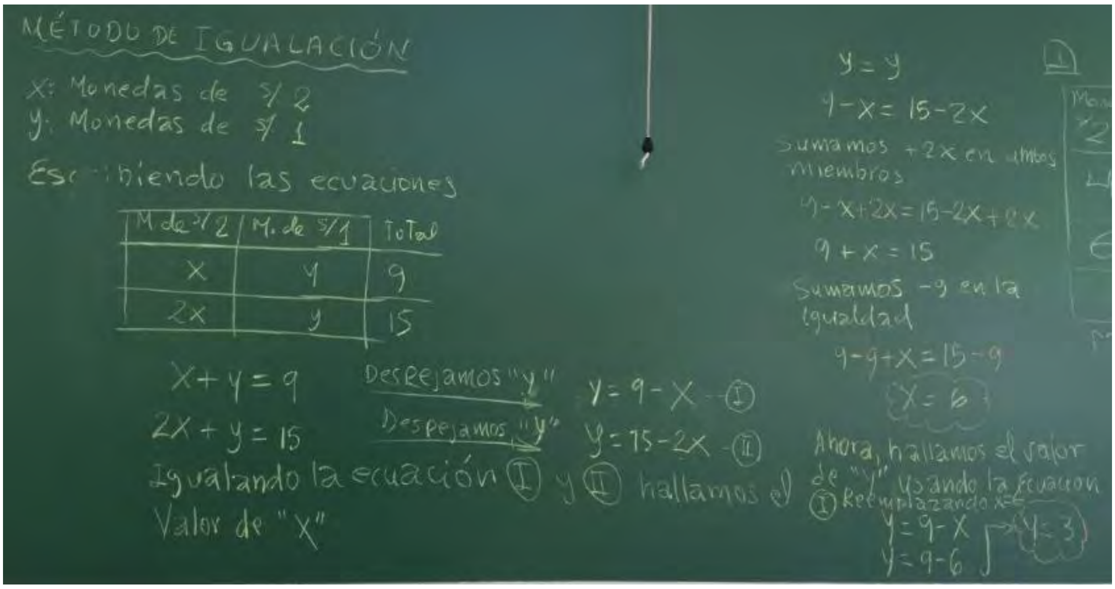

Figura 2: Resolução de sistema de equações lineares pelo método da igualdade

A técnica consiste em chamar de *x* a quantidade de moedas de 2 soles e de *y* a quantidade de moedas de 1 sol representando então o contexto do problema por um sistema de equações lineares em que a primeira é $x + y = 9$ e a segunda $2x + y = 15$ que é apresentada pelo professor sem a chave inicial que caracterizaria a relação de simultaneidade entre as duas igualdades.

A seguir, foi isolado o valor de *y*, em ambas as equações, para que fosse possível trabalhar com a seguinte igualdade: $9 - x = 15 - 2x$. A partir da resolução dessa equação encontra-se o valor de $x = 6$ que possibilita encontrar o valor $y = 3$. Podemos perceber na resolução apresentada na figura 2, um esboço de tecnologia quando o professor, por exemplo, escreve “despejamos “y”” ou “isolamos y” para justificar a igualdade que ele apresenta como “y=y” e o método escolhido.

Além disso, explica os passos da resolução da equação obtida quando escreve “sumamos +2x a los dos miembros”; “sumamos -9 em la igualdad” e “ahora, hallamos el valor de “y” usando la ecuacion I reemplazando x=6”, mas não voltou ao problema para responde-lo. Tal técnica, conhecida como método da igualdade, foi explicada pelo professor sem referência alguma à equivalência de equações ou de sistemas de equações lineares.

A segunda técnica é conhecida como método de substituição e a solução apresentada por outro professor está na figura 3. Na apresentação de sua solução o professor não explicita o que será representado por A ou B, mas entendemos que A representa as moedas de 2 soles e B as de 1 sol. Depois de apresentar as duas equações $2A + B = 15$ e $A + B = 9$, o professor isola B na segunda equação e escreve $B = 9 - A$.

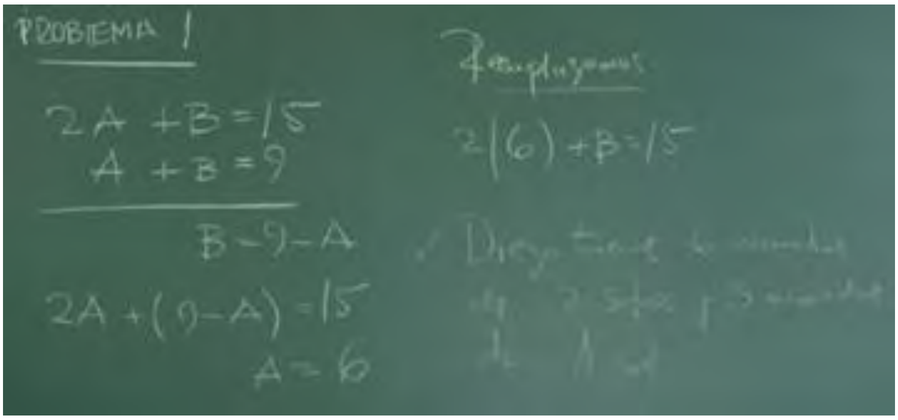

Figura 3: Solução de um sistema de equações lineares pelo método de substituição

Imediatamente substitui o valor de B na primeira equação e encontra que $A = 6$. A seguir, escreve “reemplazamos” ou “substituímos” e escreve: $2(6) + B = 15$ e logo apresenta a resposta do problema: Diego tem 6 moedas de 2 soles e 3 moedas de 1 sol.

Questionados a respeito da justificativa que poderiam dar para o método não souberam explicitar. Um discurso simples, tecnologia, que poderia justificar tal técnica poderia ser: isolo B na segunda equação para substituir na primeira equação porque isso me dá uma equação equivalente, que me permite determinar o valor de B. Tendo este valor volto na equação e substituo este valor para encontrar o valor de A.

O discurso teórico está na definição que se dá para sistemas de equações lineares e suas propriedades. Ainda em Sangiorgi (1959) encontramos o discurso necessário para justificar teoricamente as duas técnicas apresentadas. O autor inicia o tópico *sistemas lineares com duas incógnitas* definindo uma equação desse tipo: "as equações do primeiro grau com duas incógnitas são aquelas que apresentam: um termo do primeiro grau em uma das incógnitas, um termo do primeiro grau na outra incógnita e um termo conhecido (p. 140)." A seguir afirma que:

duas ou mais equações são simultâneas ou formam um sistema quando se verificam para um mesmo conjunto de valores de suas incógnitas. Se as equações que compõem o sistema são do primeiro grau, diz-se que o sistema é linear. Chama-se solução de um sistema o conjunto de valores das incógnitas que satisfazem as equações do sistema. (p. 141)."

Imediatamente define sistemas equivalentes como sendo aqueles "que admitem a mesma solução" e expressa a "forma geral para um sistema linear de duas equações com duas incógnitas: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ onde a, b, a', b' são, respectivamente, os coeficientes das incógnitas x e y, e, c e c' os termos conhecidos (p. 142)." Em continuação discute a resolução de um sistema linear com duas incógnitas e descreve o método da substituição, o da adição e o da comparação. No entanto não explicita as operações necessárias para a obtenção de sistemas equivalentes e, com isso, justificar os métodos adotados. Essas operações elementares nos permitem permutar duas equações do sistema, multiplicar uma equação por um número real diferente de zero, substituir uma equação pela soma dessa equação com outra multiplicada por um número real diferente de zero com outra equação ou ainda eliminar uma equação que seja proporcional ou combinação linear de outra.

Assim, apresentamos duas praxeologias pontuais para um problema que envolvia a solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas que foi resolvido por duas técnicas diferentes, justificadas pelo mesmo discurso tecnológico teórico que caracteriza então parte de uma praxeologias local, porque esse mesmo discurso poderia justificar outras técnicas.

Considerações finais

O tema sistemas de equações lineares está no currículo para o Ensino Básico, no entanto, a ênfase é dada apenas ao bloco do saber-fazer, isto é, às suas técnicas de resolução. As justificativas que validam tais técnicas, bem como seu alcance estão ausentes. Algumas delas têm um alcance muito restrito, como é o caso da resolução gráfica que só atende a sistemas com duas equações e duas incógnitas. Por outro lado, os problemas são apresentados apenas para que essas técnicas sejam memorizadas e não efetivamente como situações problemáticas que permitam mobilizar os sistemas como um caminho de resolução. Muitas vezes, resolvido o sistema não se volta ao contexto do problema para constatar que efetivamente esta é sua solução. Assim, o bloco composto de tarefa e técnica são trabalhados, mas o bloco do saber composto de tecnologia e teoria não e, ainda, a razão de ser desse conteúdo no ensino que, geralmente, é associada à resolução de problemas também não ocorre. Necessitamos de problemas melhor elaborados para esse fim. Tratamos aqui apenas de duas técnicas, no entanto há muitas outras que estão presentes nos conhecimentos dos professores que necessitam um estudo mais aprofundado. É necessário, segundo a TAD que sejam justificadas teoricamente o que implicaria um discurso tecnológico teórico acessível a esse nível de ensino, bem como relacioná-lo com a teoria dos polinômios que, em geral, é vista no ensino superior para formação de professores.

Referências

Almouloud, S. A. (2015). Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. *UNION – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 42, 09-34.*

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tese de doutorado, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, Espanha.

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Organiser l´étude 2. Théories & empiries. In Dorier, J.L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). *Actes de la 11e École d´Été de Didactique des Mathématiques,* Grenoble: La Pensée Sauvage, 23-40.

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes em Théorie Anthropologique du Didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Gaita, C. e Silva, M. J. F. (2018). Perspectivas em Didática e Álgebra. Em *Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia*. Capítulo 4, São Paulo, Brasil (no prelo).

Sangiorgi, O. (1959). Matemática para a segunda série ginasial. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Volver al índice de autores