2.4.2. La inversa de una función de variable real en un entorno de geometría dinámica

Maritza Luna V.
Elton John Barrantes R.
Edwin Villogas H.
Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP, Perú

Resumen

Este taller tiene por objetivo dar a conocer una herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la inversa de una función de variable real haciendo uso de un programa dinámico. Para ello elaboramos actividades basadas en algunos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel, concretamente la génesis instrumental del objeto. Durante la aplicación se observará que el GeoGebra permite que los participantes descubran e identifiquen las propiedades particulares, para luego dar solución a dichas actividades. Mediante la socialización de experiencias entre los participantes, se espera que adopten una postura reflexiva valorando los aportes de la implementación del programa.

Introducción

En nuestra experiencia docente, observamos que los estudiantes presentan muchas dificultades para reconocer las características y propiedades propias de las gráficas de funciones inyectivas. En la búsqueda de alternativas para facilitar el aprendizaje de las funciones inversas encontramos que el uso de un entorno de geometría dinámica como el *software GeoGebra*, favorece la visualización de las principales características y propiedades de sus gráficas, así como la comprensión de estas. Asimismo, el potencial de arrastre que presenta este *software* permite realizar cambios de manera casi inmediata a las construcciones realizadas manteniendo invariante las propiedades geométricas existentes.

Existen funciones que por características generales no son inyectivas, pero restringiendo su dominio cumplen con las condiciones de la definición, el problema es determinar la regla de correspondencia, lo cual no es tan simple y muchas veces se comete error porque requiere un cierto análisis, es este problema el que debemos resolver.

Hacemos uso del enfoque instrumental, (Rabardel, 2002), ya que nuestro objetivo es enriquecer de manera progresiva el significado de la definición de la inversa de la función de variable real. Para ello hemos preparado actividades que permitirán la asimilación y acomodación de un nuevo esquema, llamado proceso de instrumentalización. Haremos un ligero intento en orientar la definición, que el participante instrumentalizó en las primeras actividades, para observar su proceso de instrumentación. Sin embargo, la génesis estará básicamente orientada a la instrumentalización de la definición de inversa de una función de variable real.

Como indica Bartolini y Mariotti (2008) la construcción y el uso de artefactos parece ser característica de las actividades humanas, pero una característica aún más humana parece ser la posibilidad de la contribución de tales artefactos a ir más allá de la práctica, y contribuir al nivel cognitivo. Por lo cual consideramos el enfoque instrumental de Rabardel que se basa en la diferencia entre artefactos e instrumentos. Esta distinción lleva al análisis, por separado, de las potencialidades de un artefacto y el uso actual que se hace a través de éste. No sólo se separa lo que se ha relatado de la intencionalidad del diseñador de lo que realmente ocurre en la práctica, sino también para enfatizar la distinción entre perspectivas objetivas y subjetivas. De acuerdo con las terminologías de Rabardel, el artefacto es el material u objeto simbólico en sí; a veces sólo una parte de un artefacto complejo puede estar en foco, que es designado según una meta particular, y por esa razón, encierra un conocimiento específico.

El instrumento es definido por Rabardel como una entidad mixta, hecha de ambos componentes del artefacto y componentes esquemáticos que llamamos esquemas de utilización. Esta entidad mixta nace de ambos, del sujeto y del objeto.

Es la entidad que constituye el instrumento que posee un valor funcional para el sujeto. La utilización de esquemas se elaborará progresivamente durante la utilización del artefacto en la realización de una tarea particular; así el instrumento es una construcción individual, que posee un carácter psicológico y está estrictamente relacionado al contexto, donde la tarea se origina y naturalmente se desarrolla. La elaboración del instrumento es un proceso largo y complejo que Rabardel llamó génesis instrumental. Los géneros instrumentales pueden ser articulados en dos procesos:

- Instrumentalización: concerniente a la aparición y evolución de diferentes componentes del artefacto, el progresivo reconocimiento de sus potencialidades y restricciones.

- Instrumentación: se refiere a la aparición y desarrollo de esquemas de utilización.

En este taller desarrollaremos actividades y este articulo presentaremos algunas de ellas.

Sesión 1

Actividades con GeoGebra y teniendo presente las siguientes definiciones.

Definición(Función)
Es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en la que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número.
Definición (Gráfica de función)
Es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$ para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.
Definición (Inyectividad)
Se dice que una función es inyectiva si cada número de su rango corresponde a exactamente un número de su dominio; es decir, para toda x_1, x_2 del dominio de f
si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ equivalentemente $f(x_1) = f(x_2)$ sólo cuando $x_1 = x_2$.
Leithold, (1998).

A modo de ejemplo, mostramos tres problemas propuestos a los estudiantes.

Actividad 1

Para cada una de las funciones cuyas reglas de correspondencia son las siguientes:

i) $f(x) = 3x + 2$

ii) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ \ 0 < x < 5$

iii) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ \ 2 < x < 5$

iv) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 2 \\ -x^2 + 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

Realice lo siguiente:

a) Haciendo uso del GeoGebra grafique y determine si es inyectiva. Justifique su respuesta.

b) Haciendo uso del GeoGebra, en el caso de que f es inyectiva trace la gráfica de la recta identidad ($y = x$), la función $y = f(x)$ y su simetría respecto a dicha recta.

c) Despeje la variable x en términos de y. Además, en la expresión obtenida cambie la variable y por x (y viceversa) y grafique la nueva función obtenida.

d) ¿Qué puede concluir de las gráficas obtenidas en las partes c) y d)? Además, piense en el nombre que le pondría a dicha función obtenida por simetría.

Solución.

a) Para la solución seguimos los siguientes pasos:

i) Ingresamos al Geogebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos

$f(x) = 3x + 2$ como se muestra en la figura 1.

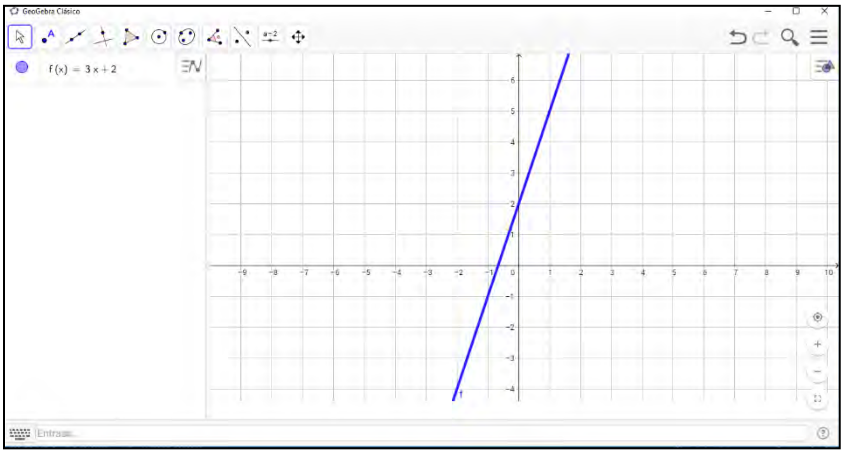
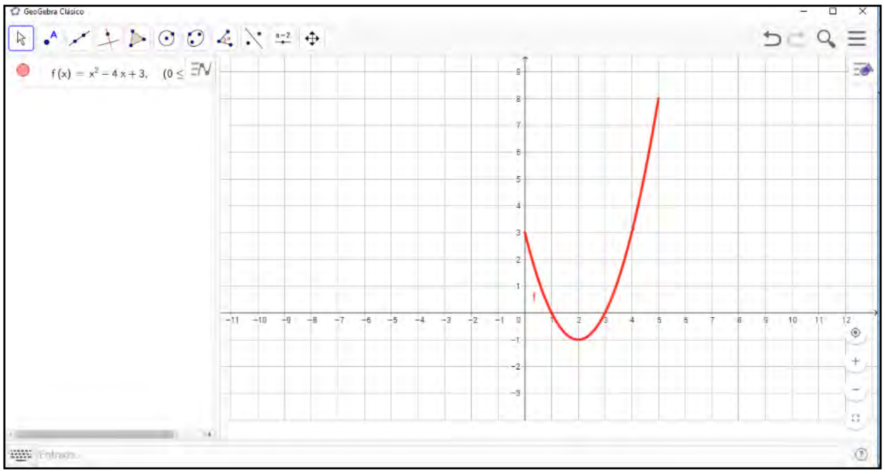


Figura 1. Trazo de la recta $y = 3x + 2$.

ii) Ingresamos al GeoGebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos $Función(x^2 - 4x + 3)$. De esta manera se obtiene la gráfica de la función como se muestra en la figura 2.



,

Figura 2.

iii) Ingresamos al GeoGebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos $Función(x^2 \ - 4x + 3)$. De esta manera se obtiene la gráfica de la función como se muestra en la figura 3.

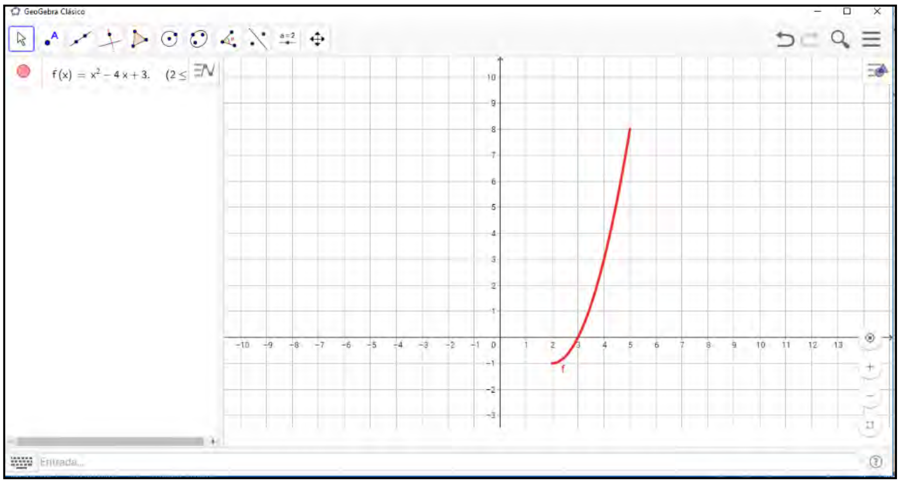


Figura 3.

iv) Ingresamos al GeoGebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos la regla de correspondencia de la lineal. Después escribimos la regla de correspondencia de la cuadrática. De esta manera se obtiene la gráfica de la función como se muestra en la figura 4.

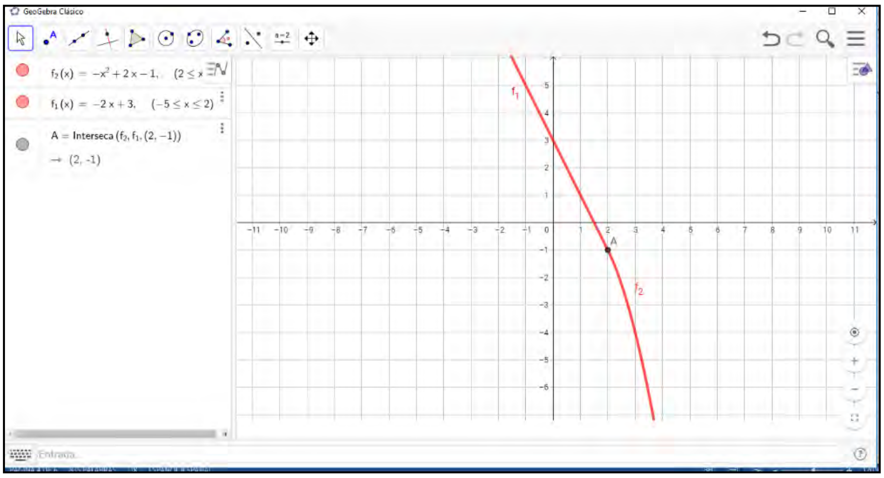


Figura 4. Gráfico final

b)

i) Paso 1. Ingresamos al GeoGebra, graficamos $f(x) = 3x + 2$ y digitamos $y = x$ para graficar la identidad como se muestra en la figura 5.

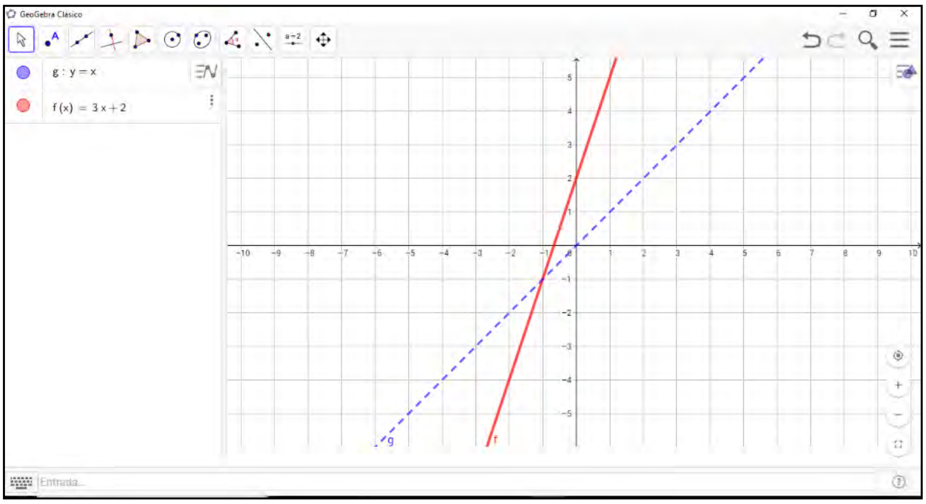


Figura 5.

Paso 2. Ubíquese en Geogebra y seleccione simetría axial. Obtendrá lo siguiente

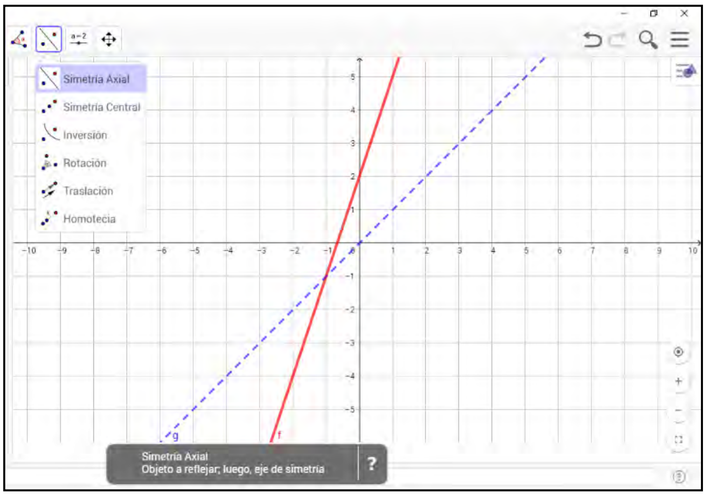


Figura 6.

Paso 3. Haga click en la gráfica de la función luego en el eje de simetría y obtendrá la gráfica de la función inversa

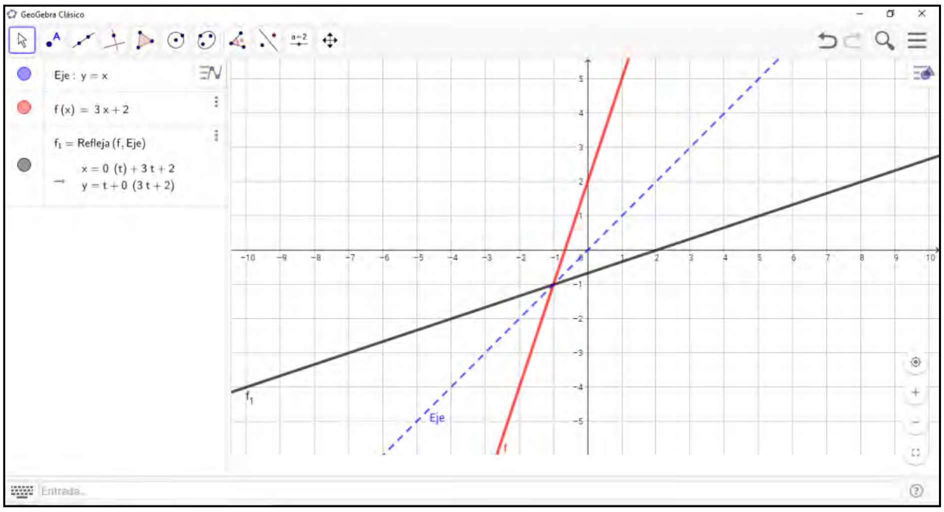


Figura 7.

Se observa que la gráfica de f es una recta que pasa por $(0,2)$ y (1,5) y la gráfica que se obtiene por simetría es una recta que pasa por $(2,0)$ y (5,1). En general, se observa que si la gráfica de f pasa por (a, b) entonces la otra gráfica pasa por (b, a).

ii) No es inyectiva

iii) Es análogo a lo mostrado en i) y se obtiene la figura 8.

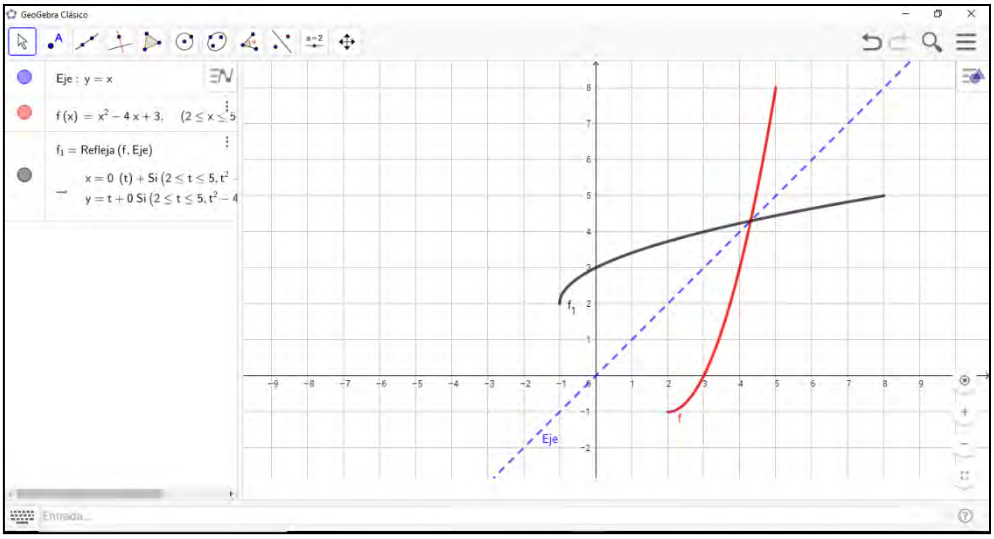


Figura 8.

Se observa que la gráfica de f es una semiparábola que pasa por $(2,-1)$ y (5,8) y la gráfica que se obtiene por simetría es también una semiparábola que pasa por $(-1,2)$ y (8,5). En general, se observa que si la gráfica de f pasa por (a,b) entonces la otra gráfica pasa por (b,a).

iv) Es análogo a lo mostrado en i) y se obtiene la figura 9.

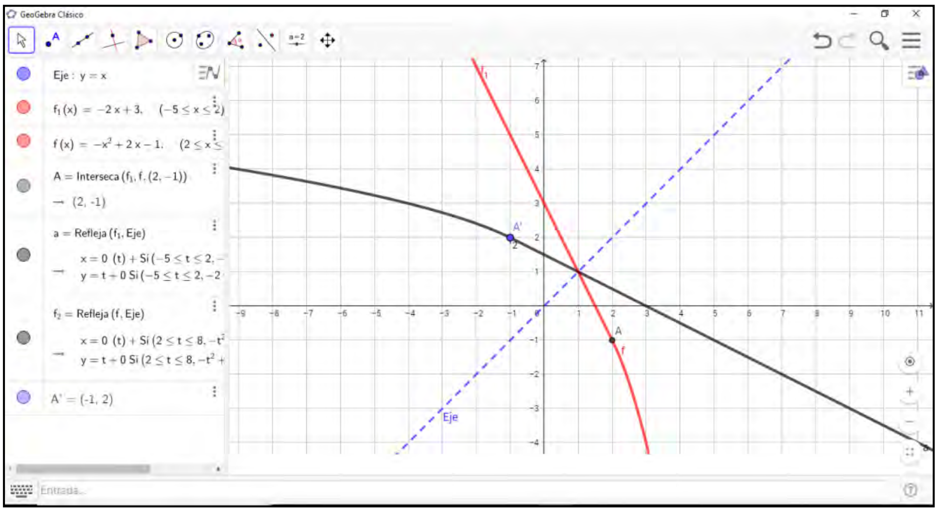


Figura 9.

Se observa que la gráfica de f está conformada por un tramo lineal y un tramo parabólico; y la gráfica que se obtiene por simetría también. En general, se observa que si la gráfica de f pasa por (a,b) entonces la otra gráfica pasa por (b,a).

Definición (Inversa de una función)
Si f es una función inyectiva considerada como el conjunto de pares ordenados (x,y), entonces existe una función $x = f^{-1}(y)$, llamada inversa de f, que es el conjunto de pares ordenados (y,x) definida por $x = f^{-1}(y)$ si y solo si $y = f(x)$.
El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de *f*. Leithold (1998).

Actividad 2

Indique cuál de las funciones de la actividad 1 cumplen la definición dada y halle la regla de correspondencia de f^{-1}.

Cada participante debe comentar su solución.

Actividad 3

Para la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 2, & 0 \le x < k, \\ kx + 2, & 3 \le x < 5. \end{cases}$$

a) Determine el mayor valor de k para el cual f es inyectiva.

b) Halle la regla de correspondencia de la función inversa de f.

c) Bosqueje las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano.

Solución

a) Aquí se trabaja con un contador k que va variando como se muestra en la figura 10.

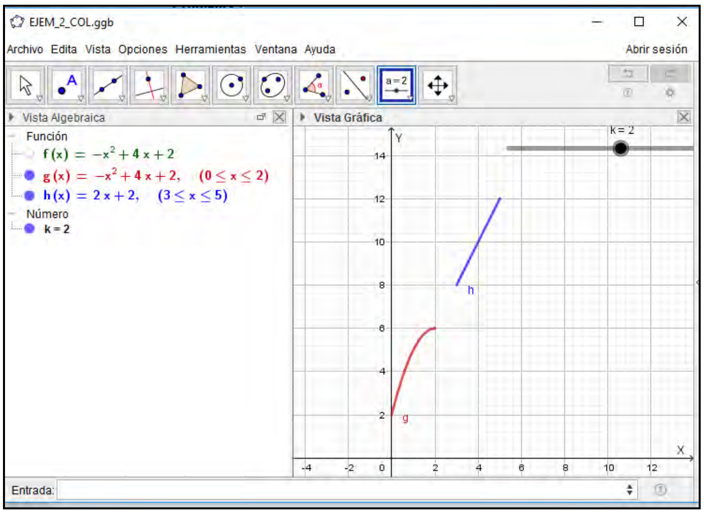


Figura 10.

En la figura se muestra que el mayor valor de k es 2. Este valor coincide con la abscisa del vértice.

A continuación, se presentan mas actividades para que continúen practicando e instrumentalizando el artefacto.

Actividad 4

Dada la función: $p = f\,(q) = -0{,}6q + 12$, en donde p representa precio y q la cantidad de un bien.

a) ¿Es una función de oferta o de demanda?

b) ¿Cuál es su dominio?

c) Grafique la función $p = f\,(q)$

d) Halle $q = f^{-1}$(p)

e) Grafique la función $q = f^{-1}$(p)

Actividad 5

Para la siguiente función:

$$f(x) = 2^x + 3$$

a) ¿Es cierto que f es inyectiva?

b) Si su respuesta es afirmativa en el ítem a), halle la función inversa de f y trace las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano.

Para reflexionar

Uno de los principios del enfoque instrumental es que la instrumentación de un artefacto no es un acto sino un proceso complejo. Según esto, mencione que actividades debiera enriquecer para que la definición de función inversa, en este caso mediada por el GeoGebra, se convierta en un instrumento que le permita resolver determinada tarea.

Conclusiones

Con este taller se espera lograr la Genesis instrumental de la definición de inversa de una función de variable real mediado por el GeoGebra, Además se espera tener la reflexión de los participantes al comentar su experiencia con la manipulación del artefacto y logrando la instrumentalización e instrumentación.

Referencias

Bartolini, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective.

Leithold, L. (1998) El Cálculo, Oxford University Press-Harla México, S.A de C.V. 7ma edición.

Rabardel, P. (2002). Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Univ. Paris 8. [traducción al inglés: Rabardel, P. (2002). People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments. Paris: Univ. Paris 8].