2.4.8. Resolución de problemas de ecuaciones diferenciales utilizando geometría dinámica

Maritza Luna Valenzuela
Elton Jhon Barrantes Requejo
Edwin Villogas Hinostroza
Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP, Perú

Resumen

En este taller se han diseñado actividades teniendo en cuenta la influencia de la tecnología en la educación matemática y la visualización de los contenidos, por tal motivo nos hemos basado en el enfoque instrumental de Rabardel que se ha utilizado en varias investigaciones. Nuestras actividades incluyen ejercicios y problemas de ecuaciones diferenciales lineales. Nuestro objetivo es identificar las acciones que realizan los participantes cuando exploran las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales, con el programa el GeoGebra. Mediante la socialización de experiencias entre los participantes, se espera que adopten una postura reflexiva valorando los aportes de la implementación del Software.

Metodología

El taller está dirigido a profesores de matemática del nivel universitario y en formación con conocimientos de GeoGebra a nivel básico. El desarrollo del taller se divide en dos sesiones (de 90 minutos cada una). En la primera sesión, los participantes explorarán el GeoGebra a partir de la resolución de algunas ecuaciones diferenciales lineales. Incluimos también la realización de gráficas de los campos de direcciones. En la segunda sesión, determinaremos la solución de problemas que requieren el uso herramientas y métodos para resolver ecuaciones diferenciales. Los participantes también realizarán simulaciones haciendo uso del CAS (Cálculo simbólico) del GeoGebra.

Marco teórico

Como nos interesa construir el campo de direcciones de una ecuación diferencial pensamos que las herramientas y recursos que ofrecen los entornos de geometría dinámica como el GeoGebra puede favorecer la visualización y la apropiación de algunas propiedades de objetos geométricos. Creemos también, que las herramientas y recursos de este ambiente, permiten que las propiedades de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), nuestro artefacto, pueden transformarse en instrumentos para sus usuarios (estudiantes y profesores) de acuerdo con el abordaje instrumental de Rabardel (1995).

Aspectos del Enfoque Instrumental

Para analizar las actividades descritas en este taller, hemos considerado el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En dicho enfoque tomaremos los términos que haremos uso en el presente artículo, y que consideramos pertinentes para su descripción.

El autor considera que todo objeto material fabricado no debiera denominarse objeto tecnológico, debido a que esta denominación está muy centrada en el enfoque tecnocéntrico que sitúa a la tecnología como elemento principal del sistema y no contiene ninguna referencia a lo humano. En este enfoque tecnocéntrico el hombre ocupa una posición residual, el hombre es ineficiente, costoso e inoperante. Su función es atender a aquellas necesidades que no pudieron ser sistematizadas. En contraposición, agrega el autor, los productos que provienen de la tecnología no son puramente técnicos, y deben ser atendidos desde el punto de vista antropotécnico, es decir, los objetos y los sistemas de los que estamos rodeados no deben solo ser aprehendidos a partir de las tecnologías que los han hecho nacer. En ese sentido, estamos de acuerdo con Castro (2012) cuando indica que el hombre es un ser orgánicamente desvalido, es decir, que su constitución biológica no le permite estar dotado con órganos que se adecúen al medio ambiente natural, mantiene una ausencia de especialización orgánica, no puede volar, su pelaje no está revestido para enfrentarse a la intemperie, tampoco posee órganos que le permiten enfrentarse a una pelea o a un ataque. Las circunstancias obligan a que el hombre cree un ambiente independiente de su estatus orgánico. En ese sentido la técnica cumple una labor muy importante en su ciclo biológico que le ha posibilitado sobrevivir en una naturaleza muy hostil. Sin embargo, no es la tecnología lo que ha conservado a la especie humana, no son las herramientas fabricadas por el hombre lo que ha permitido se sostenga durante su evolución, sino un conjunto de acciones y conductas organizadas con un objetivo preciso. Como lo indica el autor:

> *La técnica, en este caso, no son las herramientas que el hombre fabrica, sino el conjunto de acciones coordinadas, estratégicas, reglamentadas y orientadas al logro de una finalidad precisa. Podríamos decir que la técnica es producto de la inteligencia práctica del hombre, aquella que le permite "disponer" del entorno y someterlo a sus necesidades vitales. No es, entonces, que el hombre haga "uso" de la técnica, sino que el hombre es, en sí mismo, un animal técnico. (p.65)*

Rabardel (1995) considera que un objeto tecnológico debiera ser llamado artefacto, por tratarse de un término neutral, el cual se enriquece con las situaciones de acción donde ha sido insertado de manera circunstancial o intencional como medio de su acción. Según el autor, el artefacto, material o simbólico, no tiene ninguna relación con el objeto al que se dirige, pero ha sido elaborado con alguna intención para transformar a un determinado objeto al cual va dirigida la acción por medio del artefacto y concreta una solución a un problema dado o a un problema social. Además, indica que el sujeto lleva consigo ciertos esquemas de uso, destrezas o habilidades que su medio le ha consignado y con los cuales se dirige al artefacto. Entonces, con este conjunto de acciones se inicia el proceso de instrumentalización, en el cual el sujeto se dirige al artefacto al cual quiere conocer, movilizando sus esquemas de uso (EU). Además, el autor, lo describe como un proceso de instrumentalización, referido al surgimiento, evolución y atribución de las propiedades del artefacto. Simultáneamente, mientras va manipulando el objeto, emergen los esquemas de acción instrumentada (EAI) que son aquellas acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto. En nuestro caso, consideramos que los participantes llevan consigo una serie de recursos o destrezas, como propiedades de la EDO, usos de funciones básicas del GeoGebra, los cuales corresponden a los EU. Dichos esquemas serán coordinados en conjunto para redescubrir las propiedades de las componentes de las EDO en un ambiente de geometría dinámica, que corresponde al EAI. Ambos esquemas de utilización tienen orientaciones específicas, en un caso los EU, orientados a verificar que las propiedades de las EDO pueden ser redescubiertas con el GeoGebra, convirtiendo dichas propiedades en medios como EAI, aplicado en otros objetos sobre los cuales este objeto le permite actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, dirigida por sus esquemas que elabora.

Ecuaciones Diferenciales.

Resolver problemas de EDO a veces no es muy sencillo y en algunas ocasiones, se podría decir, imposible. En la gráfica del campo de direcciones de una ecuación diferencial se pueden apreciar todas las soluciones de la ecuación dada. Por el teorema de existencia y unicidad, cada curva solución se determina, ya sea dándole un valor a la constante c o de forma equivalente, estipulando un punto (x_0, y_0) del plano por donde pasa la solución. Pretendemos a través de este taller el participante tenga una herramienta muy útil para la resolución de los diferentes problemas de EDO.

Hacemos uso del enfoque instrumental, (Rabardel, 1995), ya que nuestro objetivo es enriquecer de manera progresiva el significado de la definiciones y teorema de EDO. Para ello hemos preparado actividades que permitirán la asimilación y acomodación de un nuevo esquema, llamado proceso de instrumentalización. Haremos un ligero intento en orientar la definición, que el participante instrumentalizó en las primeras actividades, para observar su proceso de instrumentación. Sin embargo, la génesis estará básicamente orientada a la instrumentalización de la definición y propiedades.

Definición 1. Una **Ecuación diferencial** es cualquier relación en la que interviene una o más variables dependientes y alguna(s) de sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

Si en una ecuación diferencial intervienen sólo derivadas de funciones de una variable, se dice que la ecuación diferencial es ordinaria **(EDO)**. Caso contrario, decimos que la ecuación diferencial es una ecuación diferencial en derivadas parciales **(EDP)**.

Una EDO se representa de la siguiente manera

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Definición 2. La función $y = \varphi(x)$ con al menos n derivadas definida en un intervalo I es una solución de la ecuación diferencial ordinaria $F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$ en I si y solo si $F\left(x, \varphi(x), \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$.

Definición 3. Un problema de valor inicial es la ecuación diferencial acompañada de condiciones iniciales.

En este trabajo estamos interesados en las ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición 4. La terna (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo direccional.

El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano XY. Se elige una rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones que tienen algún interés especial. (Nagle, Saff y Zinder, 2004)

Teorema. Dada la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ está definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0).

Si $f(x, y)$ satisface las condiciones:

a) $f(x, y)$ es continua en la región R

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en la región R.

Entonces existe un intervalo I con centro x_0 y existe una y solo una función $y = \varphi(x)$ definida en el intervalo I que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. (Zill, 2007)

Sesión 1.

Actividad 1. Dadas las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

a) Grafique el campo de direcciones.

b) Analice el comportamiento del campo de direcciones.

Solución

Se inicia con el proceso de instrumentalizar el artefacto, que en este caso el análisis del comportamiento del campo de direcciones mediado por el GeoGebra.

Para ello, ubíquese en la barra de entrada, escriba y seleccione Campo Direcciones $(f(x, y), n)$ como veremos en la figura 1.

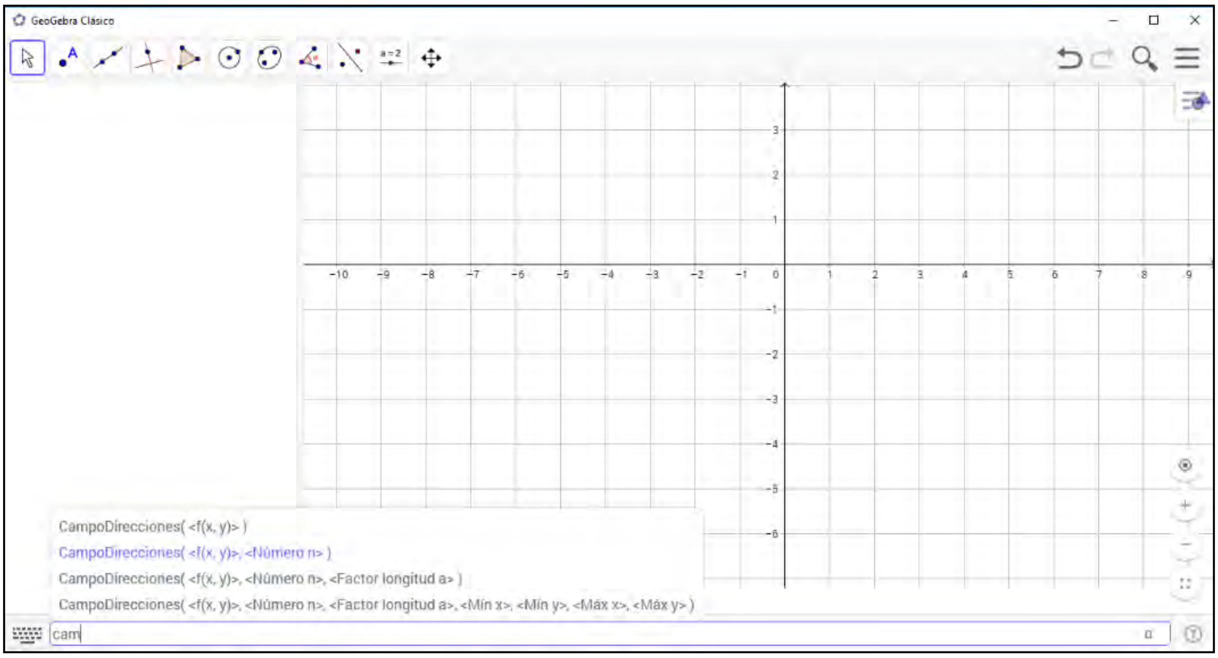

Figura 1. Inicio de construcción de Campo de Direcciones

Ahora digite $f(x, y) = 5x, n = 20$ y conseguirá pequeños segmentos de recta que varían su sentido según el punto donde se está evaluando como se muestra en la figura 2.

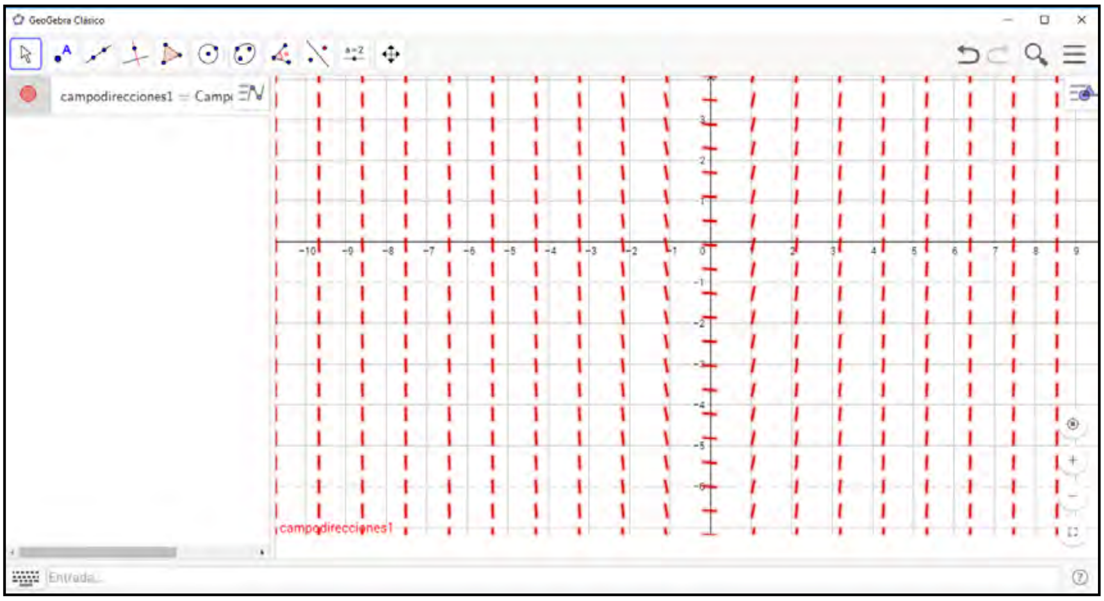

Figura 2. Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 5x$.

Actividad 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

a) Grafique el campo de direcciones

b) Analice el comportamiento del campo de direcciones

Solución

Ingrese "$CampoDirecciones(\frac{y}{2x}, 20)$" en la barra de entrada.

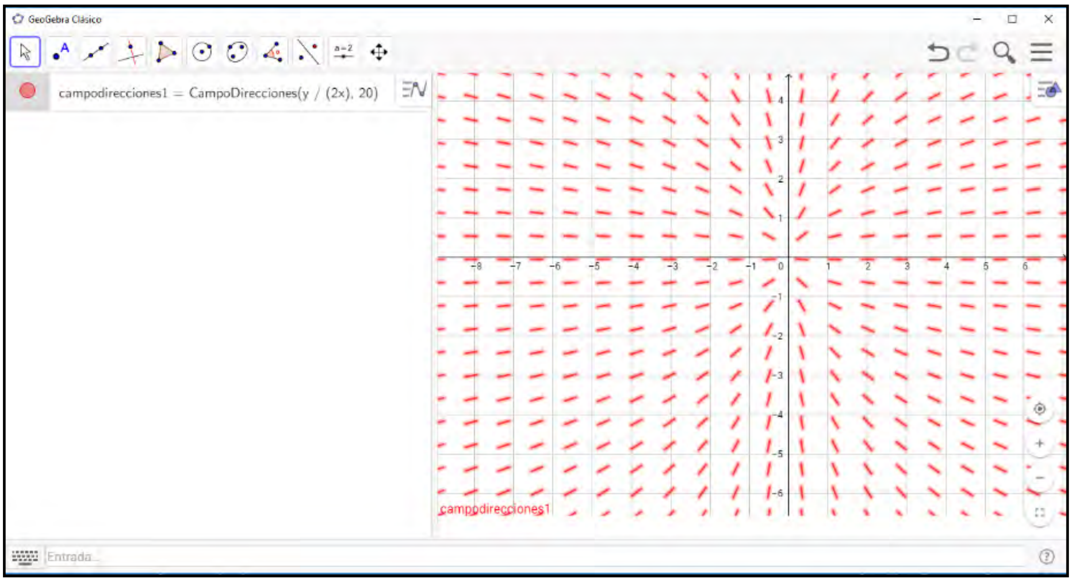

Figura 3. Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$.

Observando el campo de direcciones notamos que el primer cuadrante las pendientes de los segmentos de recta son positivas, esto nos hace inferir que la gráfica de la solución de la EDO es creciente. De manera similar podemos inferir que la gráfica de la solución de la EDO en el cuarto cuadrante es decreciente.

Actividad 3.

$$\frac{dy}{dx} = 0.03y(1 - \frac{y}{1000})$$

a) Grafique el campo de direcciones.

b) Analice el comportamiento del campo de direcciones. (Stewart, 2010).

Solución

Ingrese "$CampoDirecciones(0.03y(1 - \frac{y}{1000}), 20)$" en la barra de entrada.

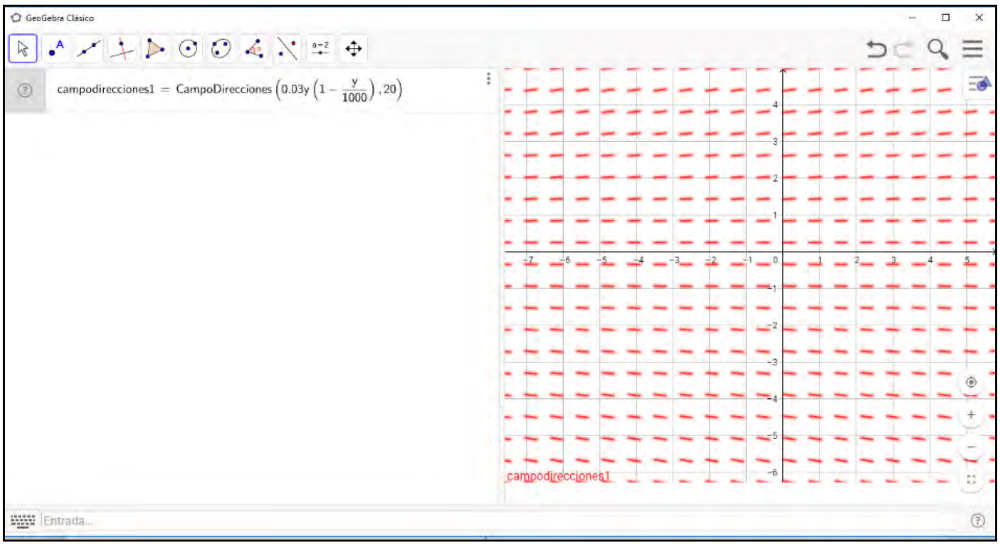

Figura 4. Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 0.03y(1 - \frac{y}{1000})$

Para notar mejor el comportamiento de la solución es necesario aumentar el valor "*n*" al ingresar el campo de direcciones en GeoGebra.

Sesión 2

Resuelve $\frac{dy}{dx} = 5x$.

Solución. En esta sesión se instrumentalizará la definición de una ecuación diferencial mediado por el CAS del GeoGebra.

- Activar la ventana del CAS

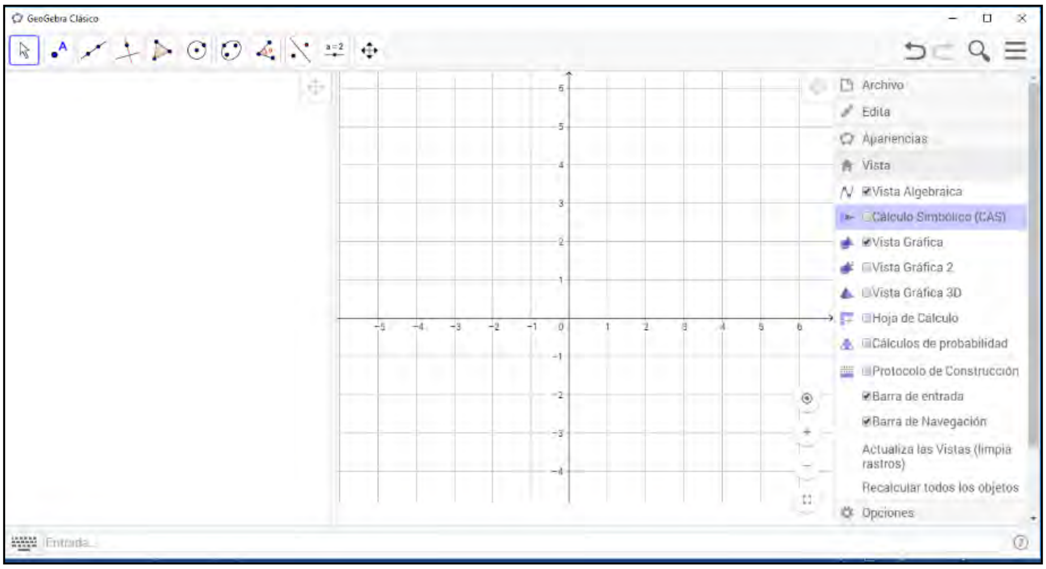

Figura 5. Ingresando al CAS-GeoGebra

- En la barra de entrada digite $CampoDirecciones(5x, 20)$”

- En la ventana del CAS digite y selecciones $ResuelveEDO(Ecuación)$

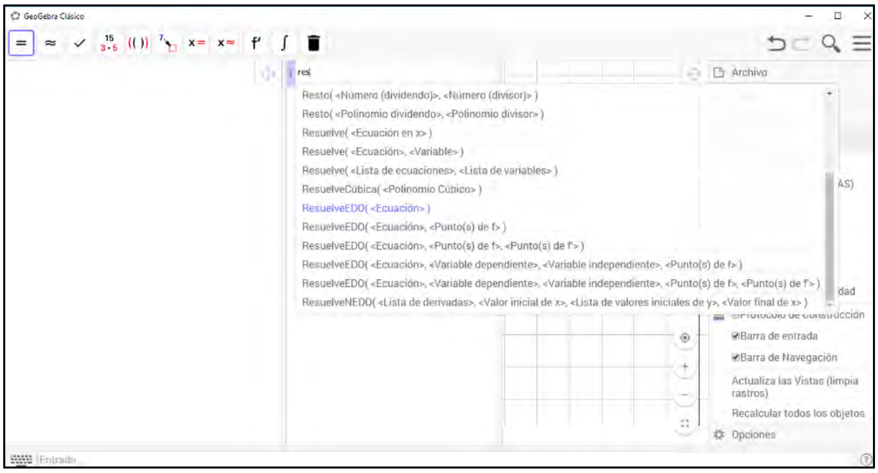

Figura 6. Solución de una EDO mediante CAS-GeoGebra

- Digite $ResuelveEDO(5x)$

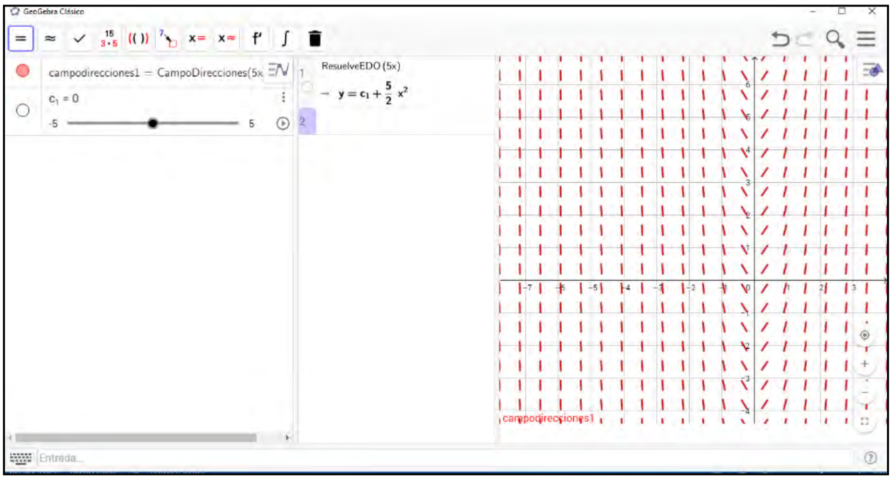

Figura 7. Gráfica del campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 5x$

- Gráfica del campo de direcciones y la solución de la EDO.

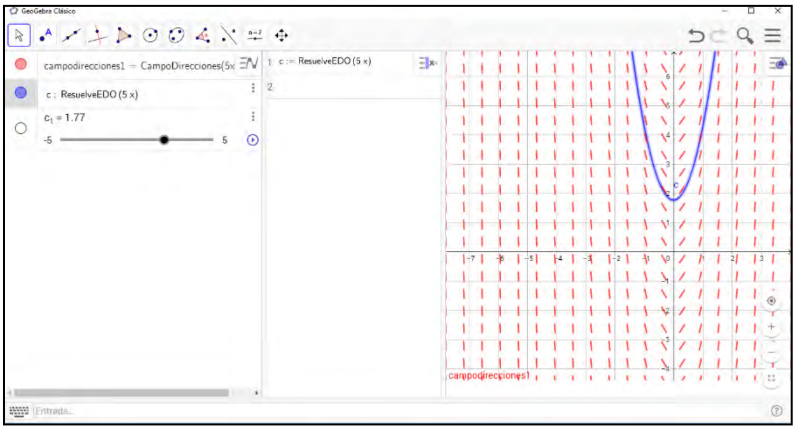

Figura 8. Gráfica del campo de direcciones y solución de $\frac{dy}{dx} = 5x$

Actividad 2. Resuelva $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2x}$ (Trayectorias ortogonales)

Actividad 3. Resuelva $\begin{cases} \frac{dx}{dy} = 0.03y\left(1 - \frac{y}{1000}\right) \\ y(0) = 100 \end{cases}$

Reflexiones

Se espera tener respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Una secuencia de actividades mediadas por el GeoGebra permite que los alumnos instrumentalicen las EDO y los campos direcciones?

2. ¿Considera al programa GeoGebra una herramienta complementaria en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las EDO?

3. ¿Qué esquemas de usos o conocimientos previos deberían traer consigo los estudiantes para que en coordinación con uso del GeoGebra puedan incorporar algunas propiedades de la EDO?

Conclusión

Estas actividades, permiten llevar las EDO, a un pensamiento y lenguaje matemático, pero desde un entorno de geometría dinámica. Durante la aplicación de las actividades, se observará que el GeoGebra permite que los estudiantes descubran e identifiquen las propiedades particulares de las EDO, las cuales formaban parte de sus EU. Cuando construyeron los campos direcciones, lo esquematizaron como un EAI, y luego dicho esquema evolucionó a un EU que, en combinación con otros esquemas como el CAS, se movilizaron para un determinado objetivo.

Referencias

Castro, G (2012). *Sobre el concepto de antropotécnica en Peter Sloterdijk*. Revista de Estudios Sociales,(43), pp. 63-73. Universidad de Los Andes Bogotá, Colombia.

Nagle, E. K., Saff, E. y Zinder, A. (2004) Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera Adisson Wesley, Pearson Educativa, (cuarta edición).

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2011. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Stewart, J (2010). Cálculo una variable Conceptos y contextos, 4ª edición, 2010, Cengage Learning.

Zill, D, (2007). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Novena edición. Thomson. Learning,

Volver al índice de autores