1.3.5. Máximos y mínimos con una restricción. Método multiplicadores de Lagrange

Nélida Salomé Medina García
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

El contenido del curso Análisis en Varias Variables Reales en Maestría de la Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado incluye temas como valores extremos relativos y condicionados de funciones reales de varias variables reales. Los conceptos de valores extremos relativos y condicionados son importantes tanto en la parte teórica como en las aplicaciones, deben ser comprendidos y analizados cuidadosamente por los estudiantes. Si dichos conceptos quedan claros, la aplicación del Método de los Multiplicadores de Lagrange se hará en forma inmediata, así como la formulación del correspondiente sistema de ecuaciones. Para lograr estos objetivos comenzamos resolviendo el caso particular de optimizar una función real de dos variables reales sujeta a una restricción. Utilizamos el método de resolución de problemas, trabajo colaborativo con grupos de tres alumnos y nos apoyamos en recursos tecnológicos (Programa Mathematica) para visualizar los objetos matemáticos, relaciones entre ellos y formular conjeturas, Con este modo de presentar el tema de valores extremos condicionados de funciones reales de dos variables reales logramos integrar conocimientos, análisis cuidadoso de las condiciones de objetos matemáticos, visualizar estos objetos y sus relaciones

Desarrollo de la experiencia

Se plantea el siguiente problema.

Problema: Calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima que es posible inscribir en la elipse E: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$

Solución. Representamos geométricamente el enunciado del problema

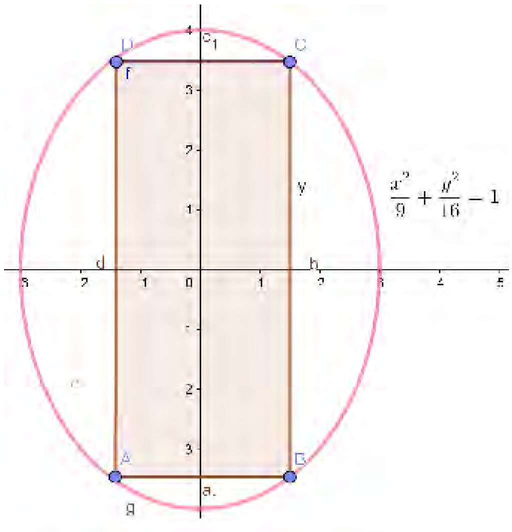

Figura 1. Rectángulo inscrito en la elipse E.

Planteamos la solución del problema considerando la simetría de la región limitada por el rectángulo y la elipse E respecto a los dos ejes coordenados. Debemos optimizar la función

$$f(x,y) = 4xy,$$

cuando el punto (x,y) está en la elipse

$$E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \;\; 0 < x < 3, \;\; 0 < y < 4.$$

Se guía a los alumnos con el fin de obtener una solución aplicando las herramientas que conocen. Los alumnos sugieren que a partir de la ecuación de la elipse E escribamos y como función de x, y después optimizar la función real de una variable real

$$h(x) = \frac{4}{3}\, x\, (9 - x^2)^{1/2}, \;\; 0<x<3.$$

Se forman grupos de trabajo integrados por tres alumnos. Aplicando el Criterio de la primera derivada obtenemos $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \;\; y = 2\sqrt{2}.$

Solución del problema: Las dimensiones del rectángulo son: ancho=$3\sqrt{2}$, altura $4\sqrt{2}$ y el área máxima es 24 unidades cuadradas.

Luego comentamos que el proceso usado involucra que una de las variables se escriba como función explícita de la otra variable.

Dada una ecuación $F(x, y) = 0,\ (x, y)$ en un subconjunto de R^2, no siempre es posible escribir una variable como función de la otra.

Realizando preguntas adecuadas y mostrando la Figura 2 se logra la siguiente pregunta para resolver el problema:

Encontrar los valores extremos de la función real de dos variables reales

$$f(x, y) = 4xy, \qquad x > 0,\ \ y > 0,$$

cuando (x, y) está en la elipse $E\colon \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, es decir cumple la restricción

$$g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0.$$

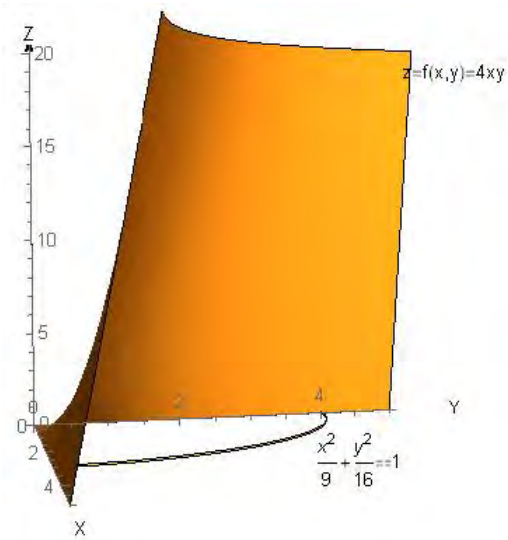

Figura 2 Gráfica de f y del dominio de la restricción g.

Estos valores extremos de la función f se llaman en general extremos condicionados de una función.

Fijamos nuestra atención en las curvas de nivel de la función por optimizar

$$\Gamma_c: 4\,xy = c\,.$$

Revisamos la forma de obtenerlas, usando la Figura 3. A continuación graficamos un conjunto de curvas de nivel de la función f y la restricción g. Sabemos por la parte teórica que el vector gradiente $\nabla f(x,y)$ es ortogonal a las curvas de nivel $f(x,y) = c$.

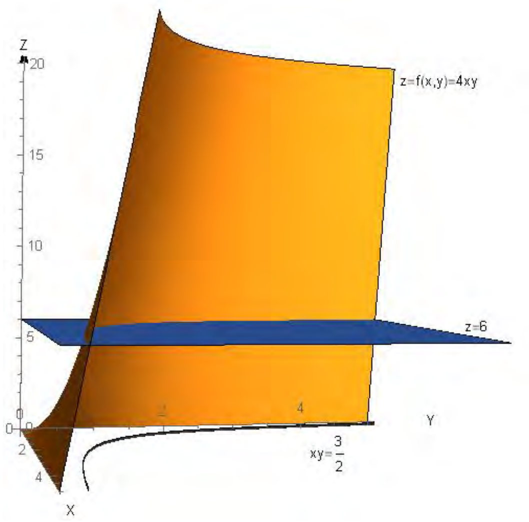

Figura 3.Curva de nivel de f correspondiente a $c = 6$.

Notamos que la curva de nivel Γ_{24} es tangente a la elipse E en el punto $P = (\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ en el cual la función f asume un valor extremo condicionado.

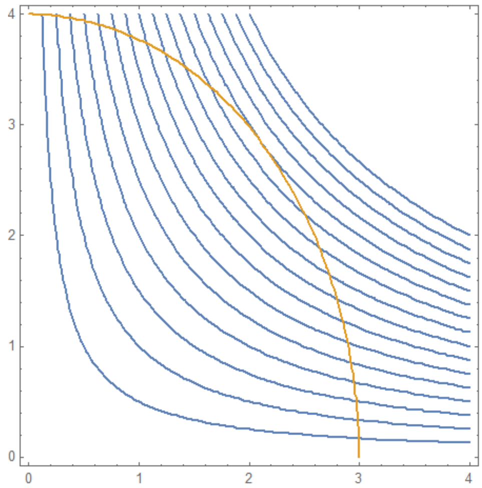

Figura 4. Gráficas de Curvas de nivel de f y la restricción g.

Estas curvas tienen una recta tangente común en el punto $(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$.

Calculamos los vectores gradiente de las funciones f y g en el punto $(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ y averiguamos la continuidad de las derivadas parciales de primer orden de estas funciones.

Obtenemos:

$$\nabla f(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4,3), \quad \nabla g(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{12}(4,3),$$

Concluimos que $\nabla f(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ y $\nabla g(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ son vectores paralelos, es decir existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) = \lambda\, \nabla g(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}).$$

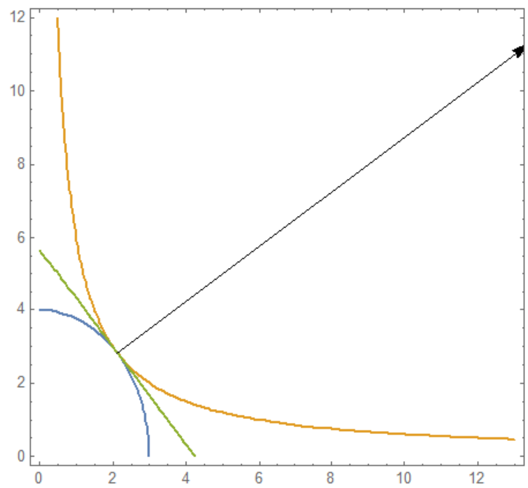

Figura 5. Gráfica de vector Gradiente $\nabla f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

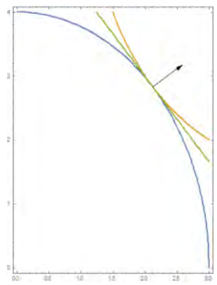

Figura 6. Gráfica de $\nabla \mathrm{g}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

En general, tenemos un problema de optimizar una función $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ sujeta a la restricción $g: U \subset R^2 \rightarrow R$, donde U es un conjunto abierto del plano y las funciones f, g tienen derivadas parciales de primer orden continuas en U. Con un razonamiento análogo al anterior conjeturamos que en el punto en el cual f asume su valor extremo condicionado los vectores gradiente son paralelos

Método de los Multiplicadores de Lagrange

Teorema (Leithold, 1999. P. 1004)

Sean $f: U \subset R^2 \rightarrow R$, $g: U \subset R^2 \rightarrow R$ funciones cuyas primeras derivadas parciales son continuas en un conjunto abierto U. Si f tiene un extremo relativo en el punto

$\left(x_0, \ y_{0,} \ , f(x_0, y_0)\right)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$ y $\nabla \mathrm{g}(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un número real llamado multiplicador de Lagrange tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \, \nabla \mathrm{g}(x_0, y_0).$$

Finalmente, planteamos el siguiente problema. Los grupos de alumnos proponen soluciones, las que se discuten y se acuerda una propuesta de solución.

Problema.

Halle los puntos de la superficie $S: z = \frac{1}{x\,y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, más próximos al origen del espacio R^3.

Solución

La función por optimizar es

$$D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = \ z - \frac{1}{x\,y} = 0, \quad x \neq 0, \qquad y \neq 0.$$

Las funciones D y g satisfacen las condiciones del Teorema. Por tanto, existe un multiplicador de Lagrange λ tal que

$$\nabla \, D(x_0 \,, y_0, \ z_0 \,) = \lambda \, \nabla \mathrm{g}(x_0, y_0, \ z_0)$$

y significa

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda \left(\frac{1}{x^2 y} \,, \qquad \frac{1}{x\,y\text{^}2}, \qquad 1 \right)$$

que implica resolver el sistema de ecuaciones

$$2x = \lambda \, \frac{1}{x^2 y}$$

$$2y = \lambda \frac{1}{x\,y^2}$$

$$2z = \lambda$$

$$z - \frac{1}{x\,y} = 0.$$

El o los puntos $(x_0\,, y_0,\ z_0\,)$ se encuentran en las soluciones de este sistema de ecuaciones.

Referencias

Leithold, L. (1999). El Cálculo. Oxford, University Press. *Multiplicadores de Lagrange*. Capítulo 12.9, pp.1004-1012. México.

Thomas G. (2005). Cálculo, varias variables. Pearson Education de México.

Multiplicadores de Lagrange. Capítulo 14.8, pp 1038-1047. México.

Revista de Investigación Educativa (2000). Metodología para la Enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas: Un Estudio Evaluativo.

Volver al índice de autores