

2.4.3. Modelos de población en ecuaciones diferenciales

Liliana Puchuri Medina

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Resumen:

Se busca introducir el tema de ecuaciones diferenciales mediante una propuesta didáctica basada en la visualización y simulaciones numéricas usando Matlab y Geogebra. Es importante observar que esta metodología de enseñanza se deja en segundo plano en los cursos básicos de ecuaciones diferenciales, dados en la universidad. Mediante las gráficas obtenidas se visualizará de qué manera se ven afectadas las poblaciones de depredador y presa a lo largo del tiempo, se predecirá su comportamiento a largo plazo y se podrán verificar predicciones hechas de manera teórica. De esa manera, los alumnos desarrollarán la visualización matemática, entendiéndola como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual generada a través del uso de tecnología.

1. Introducción

El siglo XVII se caracterizó por el desarrollo de la Física y las Matemáticas. En el campo de la Física, surgieron innumerables problemas que requirieron de las ecuaciones diferenciales para su resolución. Por ejemplo, Jacob Bernoulli (1654 – 1705) propuso el famoso problema de la braquistócrona, que consiste en determinar la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto. Para encontrar esta curva debemos resolver una ecuación diferencial.

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales se originó en 1889, a partir de una memoria del matemático francés Henri Poincaré (1854 – 1912) a finales del siglo XIX. Dicha memoria trataba acerca del problema restringido de los n cuerpos, que es un caso general del problema de determinar la trayectoria de los planetas del sistema solar. El aporte

de Poincaré fue la de obtener información acerca de la forma de las soluciones a partir de la ecuación, pero sin obtener explícitamente la solución.

Así, uno de los principales logros de esta área en este siglo, fue describir fenómenos reales descritos por ecuaciones diferenciales que no habían sido previamente resueltas de manera explícita.

Al finalizar con éxito este taller, el participante será capaz de:

- Entender los conceptos básicos de ecuaciones diferenciales.
- Usar el Geogebra para visualizar las soluciones de una ecuación diferencial.
- Predecir, a partir del gráfico de una solución de un modelo depredador-presa, el comportamiento a largo plazo de las poblaciones de depredadores y presas.

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

A grandes rasgos, las ecuaciones diferenciales son expresiones que vinculan una función con sus derivadas. Comenzaremos viendo algunos ejemplos sencillos donde las ecuaciones diferenciales aparecen de manera natural en la biología y la ecología. Para más detalles, vea (Samanta & Gómez-Aíza, 2014).

Ejemplo 1 (Modelo Exponencial). Este modelo fue desarrollado por Malthus, y supone únicamente que la velocidad de crecimiento de una población en el instante t es proporcional al tamaño de la población en ese instante. Luego, si $N(t)$ representa la población de personas (o animales, o bacterias) en el instante t , entonces

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (1)$$

donde r es una constante de proporcionalidad.

- ¿Qué representa r ? ¿Qué podemos decir de la población si r es positivo o negativo?
- Compruebe que $N(t) = Ce^{rt}$, donde C es una constante real, satisface la ecuación (1).

- Reemplacemos $t = 0$ en $N(t)$ para obtener $N(0) = C = N_0$. ¿Qué representa este valor?
- La solución de la ecuación (1) será $N(t) = N_0 e^{rt}$.

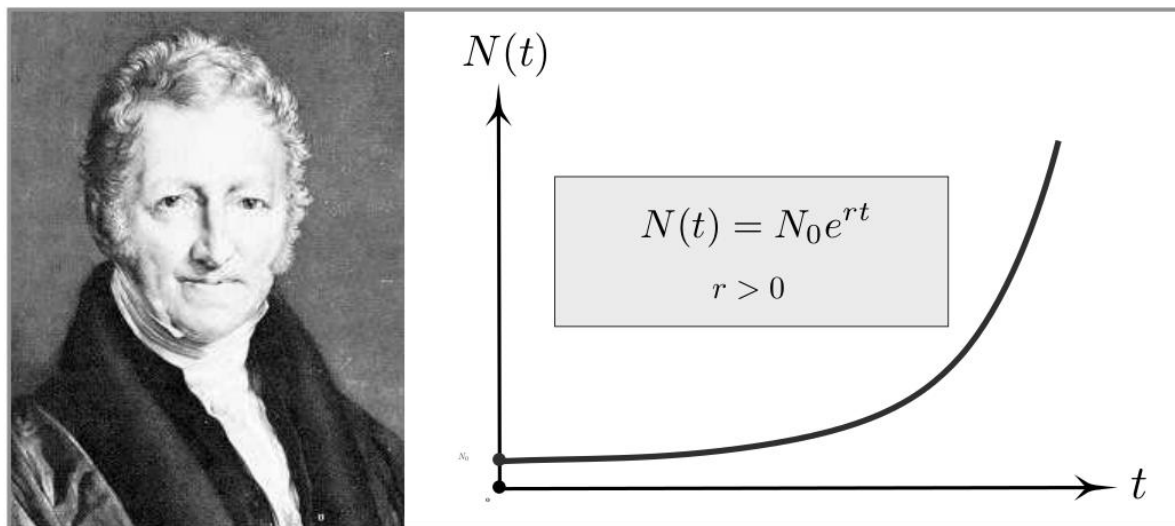


Figura 1: Thomas Maltus y el modelo exponencial cuando $r > 0$

En la figura 1 se muestra que, para r positivo, la ecuación modela un crecimiento exponencial. Por otro lado, si r es negativo, la población tiene un decaimiento exponencial hasta su extinción. Este tipo de decrecimiento se da en fenómenos tales como decrecimiento radioactivo, decrecimiento de las ventas de un producto cuando se interrumpe la publicidad, etc.

- Si $r > 0$, ¿qué sucede con $N(t)$ a largo plazo, es decir, cuando $t \rightarrow \infty$?
- Si $N(t)$ representa la población humana, ¿considera que el modelo predice adecuadamente el comportamiento de la población a largo plazo?

En realidad, el crecimiento de una población, por ejemplo, la humana, no puede continuar de manera ilimitada debido a que el espacio y los recursos disponibles son limitados. Esto implica una limitación al modelo exponencial. En estos casos, resulta adecuado introducir un término que dé cuenta de la capacidad del ecosistema para sostener una población. Uno de los modelos más sencillos es el modelo logístico que veremos a continuación.

Ejemplo 2 (Modelo logístico). Este modelo fue introducido por el matemático belga Verhulst, que consideró la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N = f(N)N, \quad (2)$$

donde $K > 0$ es la capacidad de soporte, que representa la máxima población $N(t)$ que se puede sostener a medida que avanza el tiempo. Observe que si comparamos las ecuaciones (1) y (2) vemos que hemos substituido r por $f(N) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$. En la figura 2 podemos apreciar como es el crecimiento de la población para este modelo.

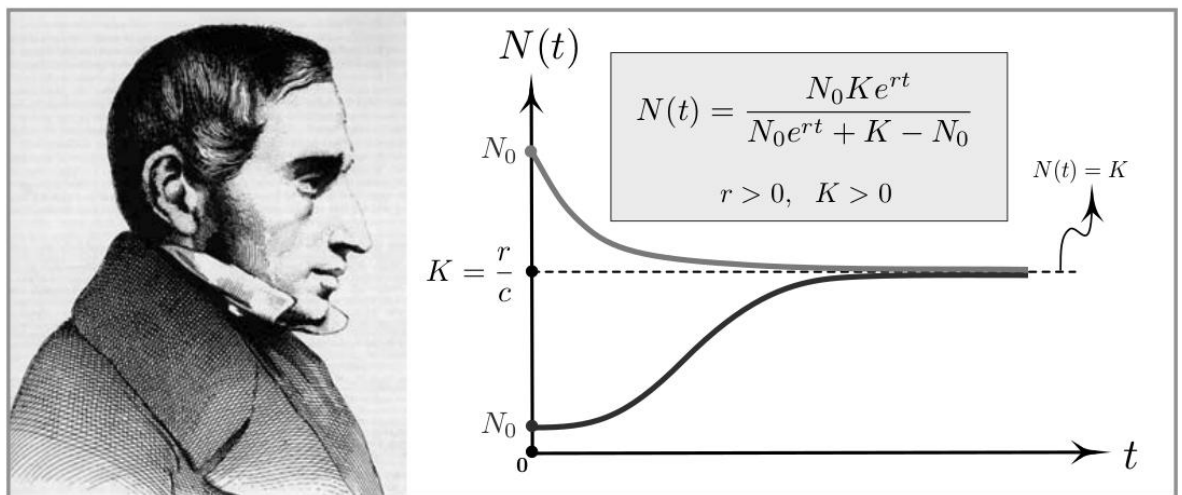


Figura 2: Pierre-François Verhulst y el modelo logístico

De la figura 2,

- ¿Qué se puede decir de la población a largo plazo?

Uno de los modelos que incorporan interacciones entre dos especies fue propuesto en 1925 por el biofísico americano Alfred Lotka y, de manera independiente, por el matemático italiano Vito Volterra. Este modelo será estudiado con detalle en la sección 4, pero lo introduciremos a continuación.

Ejemplo 3 (Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra). Supongamos que $x(t)$ y $y(t)$ representan las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente. Supongamos además que, en ausencia de depredadores, la razón de cambio de las presas es en cada momento proporcional al número de ellas, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = a x(t) - b x(t)y(t), \quad a, b > 0,$$

Del mismo modo, la razón de cambio de la población de depredadores es proporcional a esta, pero considerando una constante de proporcionalidad negativa en ausencia de presas, más una tasa proporcional a $x(t)y(t)$ debido al encuentro entre presas y depredadores, es decir,

$$\frac{dy}{dt} = -d y(t) + c x(t)y(t) \quad c, d > 0.$$

Luego, obtenemos una ecuación diferencial con dos variables x e y ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -dy + cxy, \end{aligned} \tag{3}$$

donde a, b, c, d son constantes reales positivas que describen la interacción de las dos especies. Algunas de las preguntas naturales sobre este modelo son:

- ¿Pueden coexistir los depredadores y las presas en un mismo espacio geográfico?
- ¿Cuándo una de las especies conlleva a la extinción de la otra?

A continuación, desarrollaremos los conceptos necesarios (vea (Chicone, 2006), (Coddington & Levinson, 1955), (Puchuri Medina, 2017), (Wang, 2006)) para poder responder a las preguntas propuestas.

3. Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones (1), (2) y (3) son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación diferencial en el plano es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{4}$$

donde $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ y U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

La función $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X = (f, g)$, es llamada *campo de vectores* asociado a la ecuación diferencial (4). Un punto $p \in U$ se denomina *punto de equilibrio* si $X(p) = (0,0)$. Una solución de la ecuación (4) es una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ definida en un intervalo tal que satisface $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ o equivalentemente

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x(t), y(t)), \\y'(t) &= g(x(t), y(t)).\end{aligned}$$

Geoméricamente, la condición $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ significa que el vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$ es dado por el campo vectorial X en $\alpha(t)$.

Consideremos el siguiente ejemplo de ecuación diferencial y mostraremos el campo de vectores usando Geogebra.

Ejemplo 4. Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x.\end{aligned}$$

Entonces

- El campo asociado es $X(x, y) = (-y, x)$.
- Verifique que $X(0,0) = (0,0)$. Luego $(0,0)$ es un punto de equilibrio del sistema. ¿Qué significado tiene este punto?
- En la figura 3 se muestra que el campo X asocia a cada punto (x, y) el vector $(-y, x)$.
- Se puede apreciar que las soluciones son circunferencias que son tangentes al campo X .
- ¿Qué sucede con el comportamiento de las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ a largo plazo?

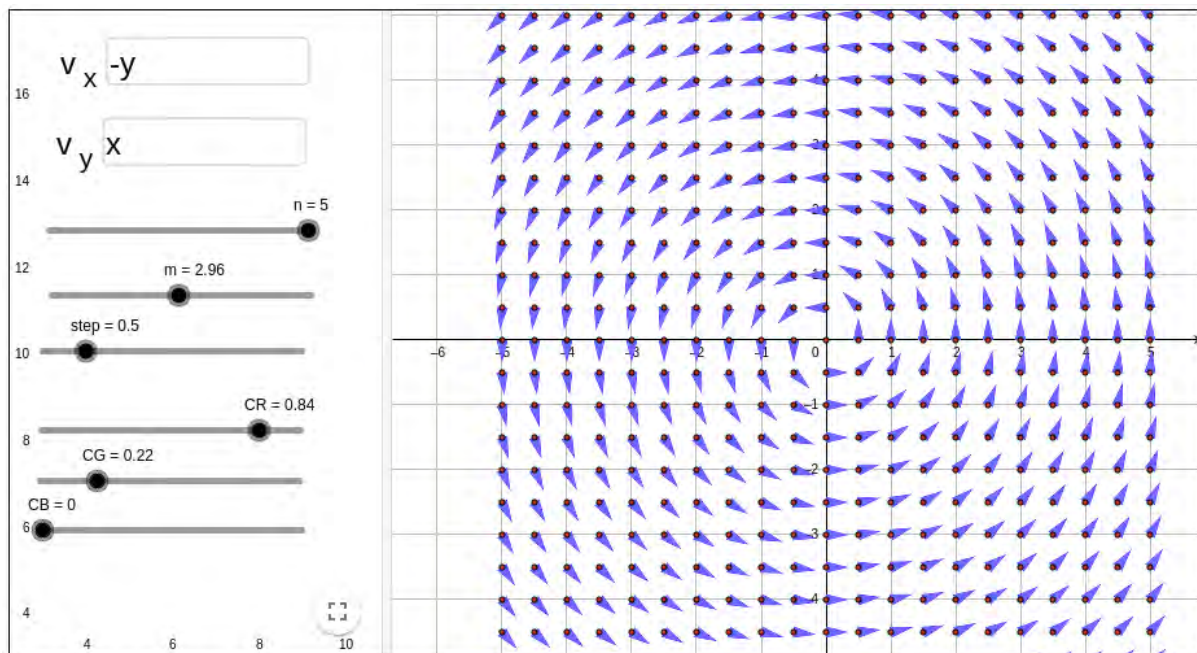


Figura 3: $X(x, y) = (-y, x)$

El gráfico presentado en la figura 3 muestra que las soluciones son circunferencias. Una manera analítica de justificar este hecho es usando coordenadas polares, es decir, mediante el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta), \\ y &= r \sin(\theta). \end{aligned}$$

Al derivar ambas ecuaciones respecto de t y reemplazar las ecuaciones originales, obtenemos

$$\begin{aligned} -r \sin(\theta) = -y &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos(\theta) - \frac{d\theta}{dt} r \sin(\theta), \\ r \cos(\theta) = x &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin(\theta) + \frac{d\theta}{dt} r \cos(\theta). \end{aligned}$$

Despejamos las derivadas $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{d\theta}{dt}$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1, \end{aligned}$$

La solución de este sistema es, trivialmente, $r = r_0$ y $\theta = t + \theta_0$.

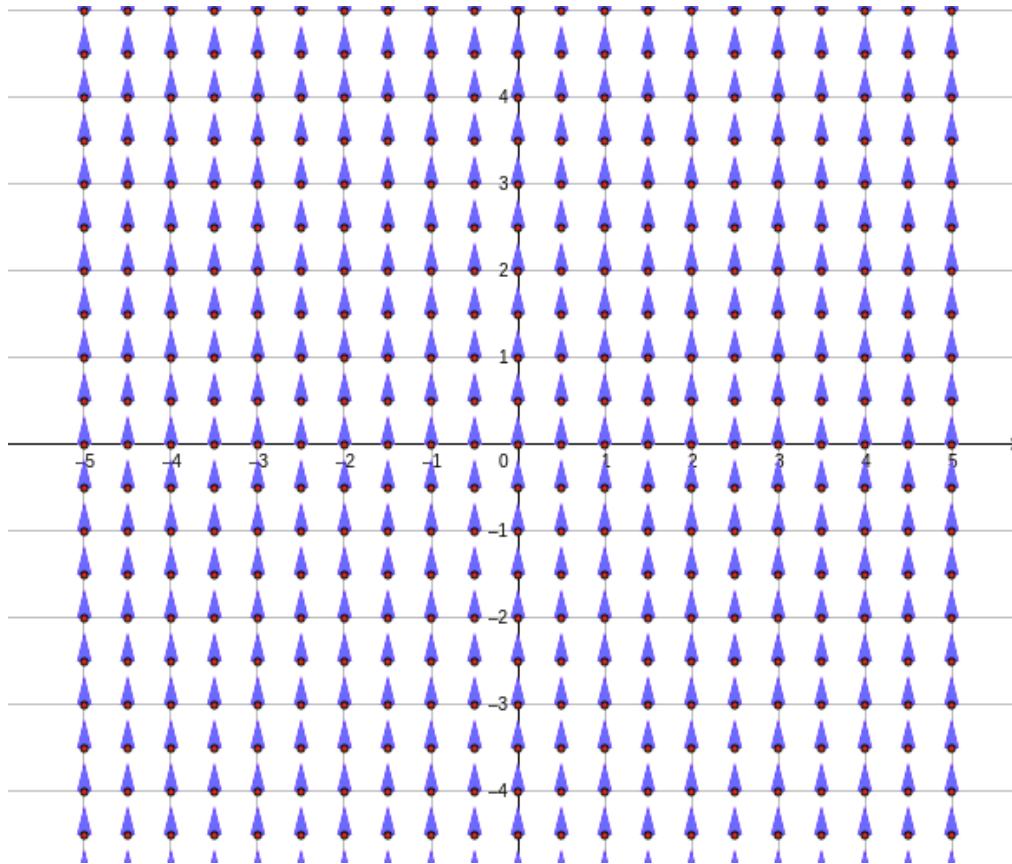


Figura 4: $(r', \theta') = (0, 1)$

Luego,

- La figura 4 muestra como son las soluciones en las coordenadas (r, θ) .
- La transformación de coordenadas polares envía, por ejemplo, la recta $r = 2$, en la circunferencia $(2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta))$.
- La recta $r = 0$ es enviada en el punto de equilibrio $(0,0)$
- En general, se tiene que las soluciones son circunferencias.

El siguiente ejemplo ayudará a visualizar que, si perturbamos una ecuación diferencial, las soluciones pueden variar razonablemente.

Ejemplo 5. Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Transformando a coordenadas polares, obtenemos la siguiente gráfica:

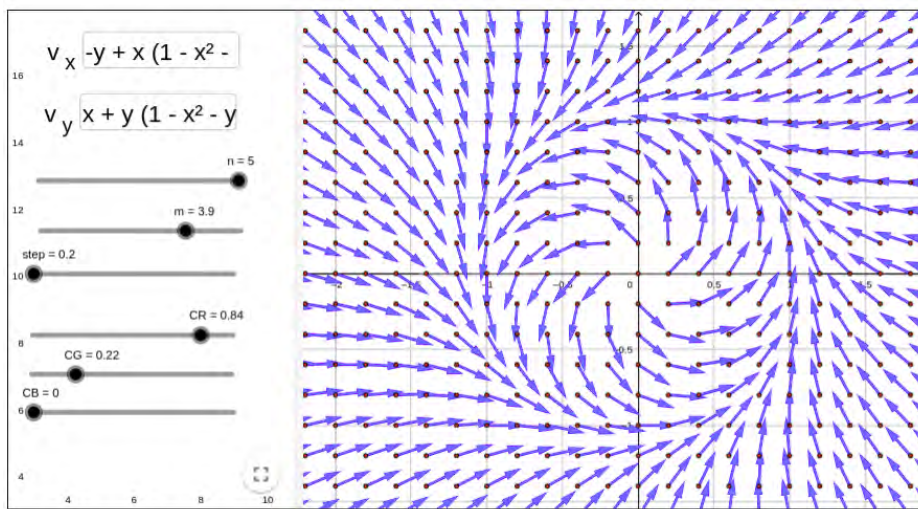


Figura 5: Campo vectorial del ejemplo 5

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r)(1 + r) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

Entonces

- La recta $r = 1$ se transforma en la circunferencia $S^1 : (\cos(\theta), \sin(\theta))$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$.
- La circunferencia S^1 es solución de la ecuación (5).

- En la figura 6, se aprecian las soluciones de la ecuación diferencial. Esto se denomina *diagrama de fase* de la ecuación.

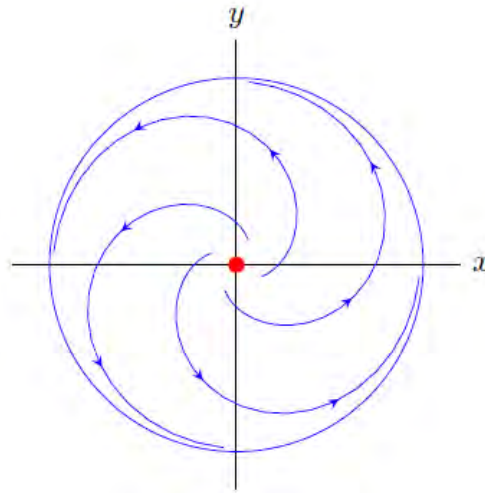


Figura 6: Órbita periódica alrededor del punto de equilibrio

- Observe en la figura 6 que existe una única circunferencia como solución. Tal circunferencia se denomina *ciclo límite*.

La noción de ciclo límite aparece por primera vez en los estudios de las ecuaciones diferenciales en el plano, realizados por Poincaré a finales del siglo XIX.

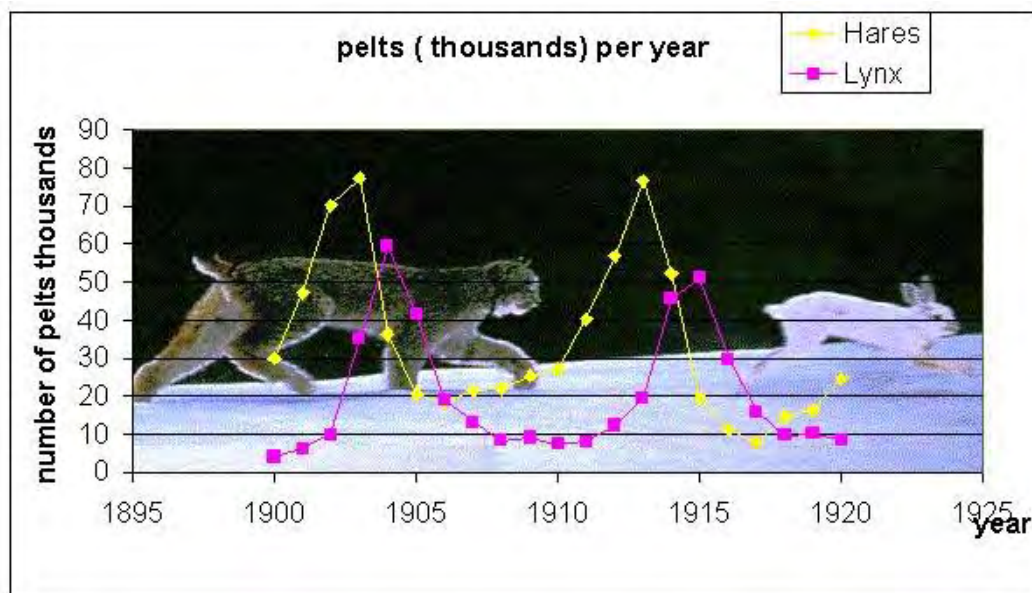


Figura 7: Datos de la compañía Hudson-Bay. Grafico extraído de (Mahaffy, 2000)

4. Análisis del modelo de Lotka-Volterra

En el ejemplo 3, vimos el modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra. Una manera natural en la que aparecen este tipo de ecuaciones es por ejemplo en la relación entre lince (depredadores) y conejos (presas). Entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, la compañía Hudson-Bay anotó cuidadosamente el crecimiento y decrecimiento de la población de estas dos especies en un bosque al norte de Canadá (vea la figura 7). Recordemos que el modelo de Lotka-Volterra es dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -dy + cxy\end{aligned}$$

donde obtenemos la ecuación (3) del ejemplo 3. Es importante observar que la figura 8 indica que la evolución de la población de depredadores y presas con respecto al tiempo es cíclica.

Ejemplo 6. Consideremos el siguiente modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - xy \\ \frac{dy}{dt} &= -y + xy\end{aligned}$$

En este caso, el campo vectorial es dado por la figura 8.

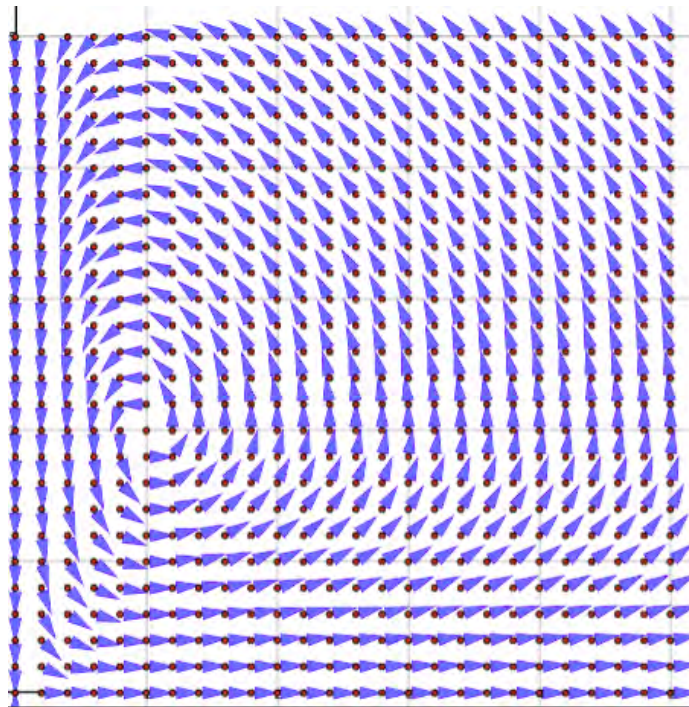


Figura 8: Lotka-Volterra para $a = 2, b = c = d = 1$

- ¿Qué forma tienen las soluciones?
- A partir de las soluciones, ¿qué puede decir sobre la evolución de la población de presas y depredadores a lo largo del tiempo?

5. Ciclos límites en modelos depredador-presa

En la aislada selva amazónica peruana, una anaconda acecha y captura un ratón. Este antiguo drama del cazador y el cazado es repetido en sistemas ecológicos alrededor del mundo. Los depredadores, como el oso de anteojos, el otorongo, las águilas y sus correspondientes presas, exhiben patrones de crecimiento que aparentan repetirse cada cierto tiempo.

Los estudios de los patrones de población animal motivan a los matemáticos a construir modelos de interacción depredador-presa, en los cuales hay una única solución periódica o ciclo, que atrae a todas las demás soluciones. Uno de tales modelos lleva al sistema planar autónomo:

$$x' = x \left(1 - \frac{9}{5}x \right) - y \frac{2x}{1+x}$$

$$y' = -y + y \frac{2x}{1+x}$$

donde x denota la población de presas y y denota la población de depredadores. Para más detalles vea (Murray, 2002). Podemos ver una simulación de las soluciones en la figura 9.

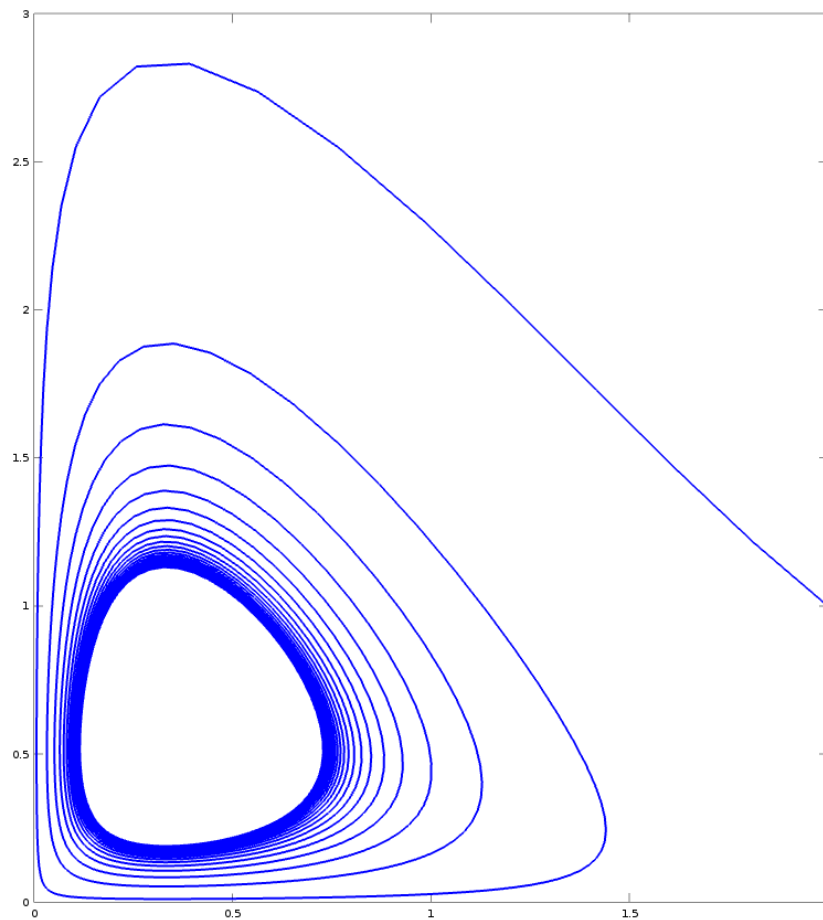


Figura 9: modelo depredador presa con ciclo límite

Podemos interpretar este gráfico como sigue:

- Supongamos que la solución comienza en un punto de la circunferencia, que define un ciclo límite del sistema.

- Ocurre un evento catastrófico, por ejemplo, una severa tormenta, que origina que la población de presas decrezca en un punto en la parte superior de la circunferencia.
- Si las soluciones se aproximan al punto de equilibrio en el primer cuadrante, tenemos que la población de presas y depredadores coexistirán en un tiempo futuro.

6. Conclusión

En los ejemplos 1 y 2, se presentan modelos poblacionales de una sola especie. A través de estos modelos, el asistente al taller será capaz de entender los conceptos de solución de una ecuación diferencial de una incógnita, así como de predecir la evolución a largo plazo de la población. Además, estos modelos permiten extender naturalmente a modelos ecológicos de dos especies, por ejemplo, el modelo de Lotka-Volterra dado en el ejemplo 3.

Paralelamente, haremos uso de Geogebra para representar gráficamente la solución (o soluciones) de una ecuación diferencial. Específicamente, trabajaremos además con los ejemplos 4, 5 y 6.

Finalmente, en la sección 5 se apreciará que pequeñas perturbaciones en un modelo poblacional afecta drásticamente a las soluciones.

Referencias

- Chicone, C. (2006). *Ordinary differential equations with applications. Texts in applied mathematics*. New York: Springer.
- Coddington, E., & Levinson, N. (1955). *Theory of ordinary differential equations*. New York: McGraw-Hill.
- Mahaffy, J. M. (2000). *Lotka-Volterra Models*. Retrieved from <https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f09/math636/lectures/lotka/qualde2.html>

- Murray, J. (2002). *Mathematical Biology I, An Introduction*. New York: Springer.
- Puchuri Medina, L. (2017). Ciclos límites en modelos depredador presa. *Selecciones Matemáticas*, 4(1), 70-81.
- Samanta, G., & Gómez-Aíza, R. (2014). Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador presa. *Miscelánea Matemática*(58), 77-110.
- Wang, D. (2006). *Differential equations with symbolic computations*. Berlin: Birkhauser.

[Volver al índice de autores](#)