5.1.2 Las teorías APOS y construccionismo en el análisis de la comprensión del concepto de fracción (Conferencia especial)

Dr. Cerapio Quintanilla, Universidad Nacional de Huancavelica, Perú
Adriana Dora Gewerc Barujel y Fernado Varela, Universidad Santiago de Compostela, España

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad combinar dos teorías: el Construccionismo y APOS, para el análisis de la comprensión del concepto de fracción en niños del quinto grado de educación primaria. Para la construcción y comprensión del concepto de fracción de los estudiantes, se caracterizó sus esquemas en términos de niveles (Intra, Inter y Trans). La metodología aplicada consistió en un estudio de casos con una población de 25 niños quienes desarrollaron actividades utilizando un lenguaje de programación orientado a objetos denominado Etoys en un entorno construccionista. Los resultados muestran que un alto porcentaje de niños/as lograron comprender el concepto de fracción y alcanzaron el nivel de proceso y esquema de acuerdo a la descomposición genética propuesta

Introducción al problema y antecedentes

Siendo las matemáticas una de las ciencias que posee un grado considerable de complejidad para ser superado (Cerda Quintero, 2010), los estudiantes encuentran grandes dificultades en las zonas de transición entre ciertos intervalos numéricos (D'Amore, 2008). La nvestigación se enfoca en uno de los conceptos matemáticos más complejos como es el concepto de fracción y sus operaciones, uno de los sistemas de números introducidos en la escuela (Kafai, 1995; T. Kieren, 1976, 1980; Pirie & Kieren, 1994; Sankaran, Sampath, & Sivaswamy, 2009; Yusof & Malone, 2003).

El uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas, tiene sus inicios en los años 80 del siglo pasado y se ha venido haciendo implementación e investigación sobre los usos adecuados de estas tecnologías digitales en el aula de clase de matemáticas; estableciendo mediante contrastación algunos usos favorables para el desarrollo de procesos de pensamiento matemático (Villagarra et al., 2012).

Fundamentación teórica

Existen investigaciones desde diferentes perspectivas respecto a las fracciones, desde las concepciones que tienen sobre el concepto de fracciones (Ríos García, 2011), propuestas didácticas para el desarrollo del concepto (Friz Carrillo, Sanhueza Henríquez, Sánchez Bravo, Belmar Mellado, & Figueroa Manzi, 2008; Wu, 1999), operaciones con las fracciones (Duzenli-Gokalp & Devi Sharma, 2010; Olive, 2001; Zapata Cardona, 2009), estudio de la dificultades al aprender el concepto de las fracciones (Mateos Ponce, 2008; Olfos Ayarza & Guzman Retamal, 2011; Ortiz Lázaro, 1994) y la estructuración e interpretación de las fracciones (T. Kieren, 1976, 1980; T. E. Kieren, 1985; Pirie & Kieren, 1994). Sin embargo, son pocas las investigaciones relacionadas al uso de las tecnologías en el proceso de la enseñanza de las matemáticas, así como en el proceso del aprendizaje del concepto de las fracciones (García López & Romero Albaladejo, 2009; Villagarra et al., 2012).

Al respecto existen dos referentes, uno de ellos lo constituyen los trabajos de Harel y Kafai, relacionados con el aprendizaje de las fracciones haciendo uso de las herramientas tecnológicas bajo la teoría del construccionismo, ambos trabajos se desarrollaron en una escuela de Boston El trabajo de Edit Harel (1991), consiste en el proyecto de instrucción y diseño de un software para enseñar las fracciones, en el que los niños asumieron el papel de profesor, para tal efecto diseñaron un software con el lenguaje de programación LOGO y posteriormente enseñaron a sus compañeros de otras secciones o grupos. En el caso de Kafai (1995), el trabajo responde a que los niños diseñen programas de juegos con el lenguaje de programación LOGO, en los que incorporen el concepto de fracción.

Las herramientas tecnológicas en el aula

Elegir una herramienta tecnológica para el desarrollo de una actividad en la enseñanza o aprendizaje de las matemáticas es muy complejo, puesto que existen desde los teléfonos personales hasta computadoras y software con diferentes aplicaciones. Para la enseñanza y aprendizaje en las matemáticas, existe una diversidad de software, desde paquetes que permiten desarrollar procesos similares a una calculadora, hasta un software dinámico como GeoGebra; así como lenguajes de programación educativos que integran diversas áreas de la matemática; entre ellas se encuentra Etoys[4].

El lenguaje de programación elegido para el presente trabajo de investigación, es Etoys, un lenguaje de programación orientado a objetos, diseñado bajo el paradigma del

[4] Lenguaje de programación diseñado por Viewpoints Research, Inc. http://www.squeakland.org/

construccionismo y filosofía del LOGO. Además, Etoys es una herramienta educacional que permite integrar diversos objetos matemáticos, logrando que los alumnos aprendan, incluso, elementos curriculares que están en un nivel superior, así como diseñar simulaciones y programas muy complejos en diversas áreas de las matemáticas, ciencias e ingeniería, convirtiendo a Etoys en un laboratorio virtual (Quintanilla Cóndor, Fraga Varela, & Gewerc Barujel, 2012).

Teorías que marcan el trabajo de investigación

El trabajo se enmarca dentro de dos teorías que sustentan su solidez; en tal sentido, el trabajo se formaliza en el construccionismo de Papert y la Teoría APOS (Action, Process, Objects and Schemas) de Ed Dubinsky bajo el marco constructivista.

1.1. El construccionismo de Papert

Según Papert y Harel (1991), la definición más simple de *construccionismo* evoca la idea de aprender haciendo y esto es lo que estaba ocurriendo cuando los estudiantes trabajaban en sus esculturas de jabón en una clase que no es matemáticas, en la que cada estudiante genera sus propias fantasías. La otra idea es la más sutil, que llama “cercanías a los objetos”; es decir, algunas personas prefieren formas de pensar que las mantienen cerca de las cosas físicas, mientras que otras usan medios abstractos y formales para distanciarse de los materiales concretos. En este contexto se construye el modelo de aprendizaje usando la teoría cognitiva de Piaget, la teoría de inteligencia artificial, la investigación sobre las diferentes facetas sociales y afectivas involucradas en las matemáticas, la computación y las ciencias de la educación (Papert, 1980; Turkle, 1984; Minsky, 1986; citado por Harel, 1991).

El construccionismo es un enfoque filosófico y una teoría de la educación que fundamenta el uso de tecnologías digitales en la educación (Badilla & Chacón, 2004); promueve que los niños construyan sus propios conocimientos en interacción con el mundo real simulando virtualmente. Asimismo, el diseño de proyectos supone un nuevo paradigma basado en actividades con ordenadores, y difiere radicalmente del uso tradicional del software computacional. Se trata de diseñar proyectos con lenguajes de programación, a partir de los cuales los niños piensan, hacen y construyen en su entorno (Harel, 1991). Por lo tanto, resulta inevitable pensar que, en la actualidad, el aprendizaje de la matemáticos, no puede basarse sólo en el lápiz y el papel; sino también podría utilizar tecnologías, a modo de herramientas o artefactos (Fraga & Gewerc, 2004), que posibiliten el aprendizaje y que potencien la creatividad, integrando los conceptos de las matemáticas con otras áreas del conocimiento; asimismo la educación de hoy debe promover en los niños/as la creatividad, el ser proactivos, y el tener esa inquietud de aprender e investigar constantemente (Reig, 2012).

Kafai y Resnick (1996), consideran al *construccionismo* como una teoría de aprendizaje y una estrategia para la educación, la cual tiene como fundamento el constructivismo de Piaget y afirman que el conocimiento no es la simple transmisión de profesor a alumno; sino es activamente construido en la mente del aprendiz. Los niños no consiguen ideas; ellos hacen nuevas ideas. La teoría sugiere que los aprendices probablemente realicen actividades para generar nuevas teorías cuando participan activamente en la realización de algún tipo de artefacto externo que se puede reflexionar y compartir con los demás (Bouras, Poulopoulos, & Tsogkas, 2010; Papert & Harel, 1991).

Según Papert (1982), las escuelas tal como las conocemos hoy, no tendrán lugar en el futuro. Éste autor, centra especial atención en las actividades que los niños hacen con *objetos con el cual pensar* (objects-to-think-with), en un espacio totalmente diferente interactuando con los ordenadores. Si para Piaget y Papert el conocimiento se construye, entonces, la educación consiste en proveer las oportunidades para que los niños se comprometan en actividades creativas. Papert sostiene; que "el mejor aprendizaje no derivará de encontrar mejores formas de enseñar, sino de ofrecer al educando mejores oportunidades para construir" (Falbel, 1993).

1.2. La teoría APOS

La teoría APOS, consiste en una caracterización del conocimiento matemático que un alumno tiene para responder a una situación problemática en matemática; su solución en un contexto social y su construcción o reconstrucción a través de acciones, procesos y objetos, organizando a ellos dentro de un Esquema (Dubinsky & McDonald, 2001). El mecanismo de construcción de estos esquemas y la abstracción reflexiva, son el corazón de la teoría APOS; además, la abstracción reflexiva extiende la construcción de conexiones entre los conceptos abstraídos y constituye una estructura fuera de las abstracciones relacionadas (Meel, 2003).

Según Asiala et al. (1996), la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones.

Una ***acción*** es "cualquier manipulación repetible, física o mental, que transforma objetos (por ejemplo, números, figuras geométricas, conjuntos y otros) para obtener objetos" (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992, p. 249). Cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizar* tal acción en ***proceso***; la construcción interna permite realizar la misma acción, pero no puede ser dirigida necesariamente por estímulos externos. Conforme una acción se *interioriza* a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso* (similar a las *operaciones de Piaget*) (Meel, 2003). El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e, incluso, revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo (Asiala et al., 1996).

Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico, y es consciente del proceso como un todo, percibe qué transformaciones (acciones o procesos) pueden influir en el proceso y es capaz de construir realmente tales transformaciones. En tal sentido, se dice que el individuo reconstruyó o encapsuló el proceso como un **objeto** cognitivo. Una vez encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky, Dautermann, Leron, & Zazkis, 1994). La etiqueta resultante, permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido. Los objetos se pueden desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Asiala et al., 1996, p. 8).

Los esquemas son estructuras de organización que incorporan acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante invoca para resolver una situación problemática de las matemáticas (Meel, 2003, p. 244), la construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización*, el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema.

Piaget & García (1982) presentan su tesis sobre la evolución de los esquemas, proponiendo tres etapas: *Intra*, *Inter* y *Trans*. Luego Julie Clark et al. (1997) retomaron el trabajo de Piaget y García para analizar los mecanismos de la triada: *Intra*, *Inter* y *Trans*. La etapa *Intra*, se caracteriza por la concentración en un solo objeto en forma aislada de otras acciones, procesos u objetos. La etapa *Inter*, se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas. Consideramos que es útil llamar preesquema a la colección que se encuentra en esta etapa de desarrollo. La etapa *Trans*, se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace a algunas relaciones descubiertas en la etapa *Inter* de desarrollo.

Otro de los componentes principales en la teoría APOS es la *descomposición genética.* Cuando se realiza un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje, a este proceso se le conoce como descomposición genética del concepto (Trigueros, 2005)

Relación entre Construccionismo y APOS

1.3. El Construccionismo

a) Es un enfoque filosófico y una teoría de la educación que fundamenta el uso de tecnologías digitales en la educación.

b) Se fundamenta en las bases teóricas de Piaget, el sociocultural de Vygotsky y aprendizaje por descubrimiento de Bruner.

c) El Construccionismo aborda tres conceptos claves: objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos.

d) Uso de recursos tecnológicos como ordenadores y lenguajes de programación

1.4. La teoría APOS

a) La ***descomposición genética*** es el análisis teórico de un concepto para proponer un modelo de cognición: es una descripción específica de un conjunto de constructos metales que un aprendiz tiene en la mente al desarrollar el proceso de comprensión de un concepto.

b) La comprensión de un objeto matemático se expresa a través de niveles de constructos mentales y la abstracción reflexiva (Dubinsky, 1991).

c) Uso de recursos tecnológicos como ordenadores y lenguajes de programación.

d) Caracterización de los esquemas en términos de Intra, Inter y Trans.

1.5. Aspectos comunes

Existe una estrecha relación entre ambas teorías:

a) La teoría APOS y el Construccionismo tienen como base teórica los fundamentos constructivistas de Piaget.

b) Uso de recursos tecnológicos digitales en la construcción de conocimientos en el área de las matemáticas.

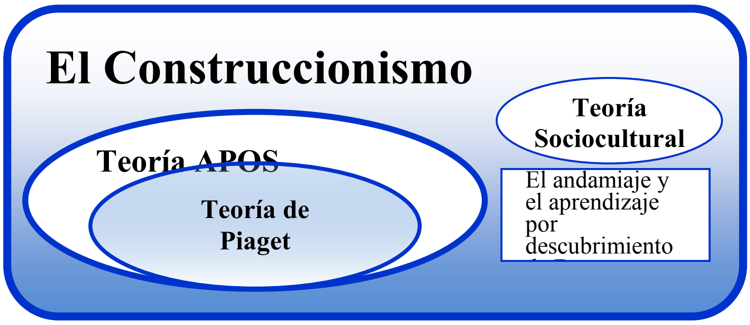


Figura 1. El Construccionismo y su relación con la teoría APOS

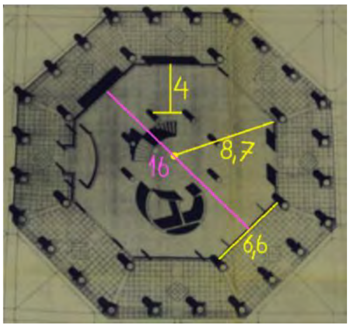
Para el desarrollo de la investigación, se realizó el complemento del Construccionismo, en este caso con la teoría APOS, porque al desarrollar la investigación desde el enfoque del Construccionismo se requiere evaluar los niveles comprensión alcanzados por los estudiantes, asimismo se necesita del diseño de las actividades a través de la descomposición genética. En tal sentido, fue necesario la introducción de la Teoría APOS dentro del Construccionismo.

Metodología

La investigación se desarrolló mediante un estudio de caso de un grupo de estudiantes del 5to grado de primaria de una Escuela Pública de Galicia, España. Los resultados fueron analizados en dos momentos, en el primer momento se realiza un análisis global de todo el grupo de estudiantes, denominado estudio colectivo de casos; puesto que cada estudiante tiene su propio estilo de trabajo, de aprendizaje y diseño de proyectos; por lo tanto, todos forman un caso. En el segundo momento, se realizó un estudio intrínseco de casos de tres estudiantes por separado; seleccionados por su rendimiento académico a criterio del docente en la escala: deficiente, regular y bueno. Finalmente, se realizó un análisis cruzado de los datos obtenidos (entrevistas, videos, proyectos, grabación de audios, y fotografías), con el fin de proponer algunas conclusiones.

Los estudiantes antes de desarrollar el proyecto de fracciones anteriormente ya habían trabajado con el lenguaje de programación *Etoys*, diseñando un reloj a través de un proyecto, esto ayudó en la ejecución debido a que los estudiantes ya estaban familiarizados con el uso del lenguaje de programación.

Se diseñó la *descomposición genética* sobre el concepto de fracciones que los niños/as deben desarrollar, cuyo diseño parte teniendo en cuenta el plano de la estructura de La Casa de las Ciencias de La Coruña, España. El proyecto consiste en diseñar el plano de dicho edificio utilizando el lenguaje de programación Etoys.



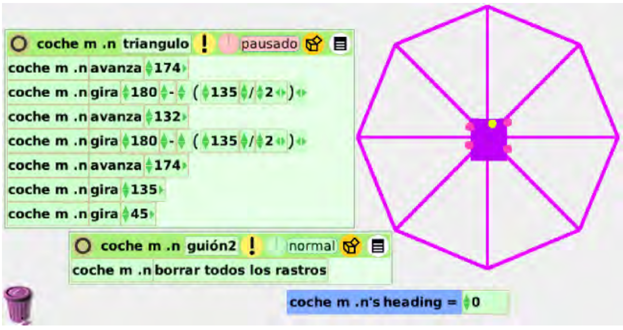


Figura 2. El plano de la Casa de las Ciencias ***Figura 3.*** División realizada con Etoys

La figura N° 2, muestra el plano con sus respectivas medidas; los estudiantes realizaron la división de diferentes maneras en sus cuadernos, luego consensuaron que la mejor división resultó ser la realizada en triángulos. Como los lados del triángulo tienen medidas en números decimales, para facilitar esta operación se multiplicó por 20 unidades, por lo que los lados del triángulo isósceles resultaron: 174 unidades los dos lados iguales y 132 unidades el tercer lado. Bajo el paradigma de la filosofía del construccionismo y la abstracción reflexiva de la teoría APOS los estudiantes emprenden el diseño del plano haciendo uso del lenguaje de programación Etoys.

Los niños/as inician en el laboratorio de informática, cada uno con sus propios ordenadores con la condición de trabajar entre dos compañeros haciendo el equipo. Los estudiantes inician la programación por ensayo error; algunos de ellos diseñaron el plano haciendo un octágono, luego intentaron dividirlos (en esta parte tuvieron dificultad); otros diseñaron triángulos, presentando también cierta dificultad. Entre pares discutieron la manera de construir el plano; poco a poco logran construir a partir del triángulo, es decir unieron varios triángulos para dar forma al plano que se muestra en la figura N° 3, posteriormente etiquetaron los nombres respectivos de cada una de las divisiones. A partir de aquí los estudiantes desarrollaron los otros proyectos sobre adición de fracciones.

Resultados

Analizamos desde las estructuras de la teoría APOS los resultados que los niños desarrollaron en las actividades de cada uno de los proyectos.

El resultado nos muestra que 19 estudiantes de 25 en total diseñaron la redistribución del plano de las Casa de las Ciencias, quienes alcanzaron el nivel de constructo mental de *esquema* del siguiente modo:

S.1. Concibe el concepto de una fracción como la división de un objeto en varias partes iguales mediante el uso de Squeak Etoys.

S.2. Construye fracciones con el elemento triángulo (la distribución de la Casa de las Ciencias), y otras fracciones, haciendo uso de Etoys.

S.3. Concibe el concepto de una fracción como la unión de varias partes iguales para formar un objeto dividido, haciendo uso de Squeak Etoys.

S.4. Diseña y explica las diversas situaciones del contexto de la vida que involucran al concepto de fracciones.

En consecuencia, no basta decir que simplemente se alcanzó el nivel de esquema (estructura); en este nivel los niños/as conciben el concepto de una fracción no solamente como dividir, repartir en varias partes, sino también los niños/as *generalizan*, pudiendo construir un objeto dividido agrupando las partes, formar un todo y viceversa. La construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización,* el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema, porque la *generalización* es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos (Meel, 2003).

En este nivel, los niños/as se ubican en las etapas de *Inter* y *Trans*. En la etapa *Inter*, los niños y niñas relacionan las diferentes acciones, procesos y objetos que involucran la construcción. Por ejemplo, la interrelación entre el diseño de rectas y ángulos y el diseño del triángulo; la interrelación del proceso de construcción del triángulo con el proceso de construcción del octágono; es decir, se interrelacionan entre subesquemas. En cuanto al nivel *Trans*, los niños/as diseñaron sus proyectos llegando a una estructura coherente; no solo diseñaron y relacionaron entre subesquemas, sino que comprendieron que todo es una estructura interrelacionada; siendo este un nivel de comprensión del pensamiento matemático avanzado. A diferencia del nivel *Intra* que solamente el alumno/a centra su atención en el concepto en forma aislada.

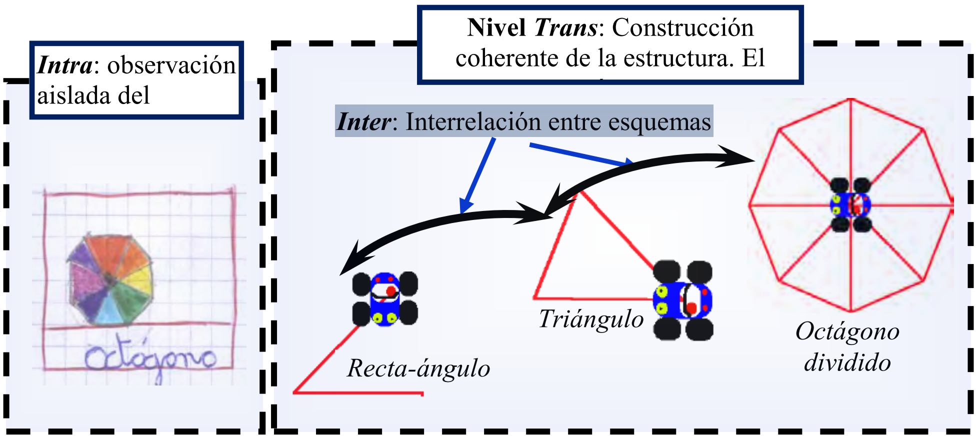


Figura 4. Los niveles Intra, Inter y Trans en la construcción del concepto de fracción.

Además, los niños/as conjugan los resultados, de tal modo que el concepto de fracción se puede construir dividiendo un objeto en partes iguales o agrupándolo en pequeñas partes, que son las fracciones para formar el objeto dividido. Para Piaget, este tipo de resultado se denomina coordinación porque está caracterizado por inferencias, implícitas o explícitas, realizados por el alumno/a (Piaget, 1990), además ellos pueden realizar ambas operaciones (dividir o agrupar) para expresar el concepto de fracción (Meel, 2003).

Conclusión

El trabajo de investigación muestra cómo el Construccionismo marca la orientación filosófica en la ejecución de los proyectos desde la óptica del uso de las tecnologías. En cambio, la teoría APOS es un complemento, porque determina los niveles de constructos mentales (acción, proceso, objeto y esquema) que los niños/as logran alcanzar al desarrollar los proyectos para concebir el concepto de fracción.

La *descomposición genética* de la teoría APOS permitió identificar los niveles de constructos mentales que los niños/as alcanzaron en el proceso de desarrollo y construcción del concepto de fracción. Y la *triada* de Piaget muestra la interrelación de los subesquemas en la construcción del concepto de fracción. En el nivel *Intra* los niños/as pudieron identificar el plano de una manera muy práctica graficando en sus cuadernos sin relacionar otros conceptos para construir el concepto, también hicieron las divisiones sin mucha dificultad. En cambio, en el nivel *Inter* los estudiantes diseñaron sus actividades al diseñar el plano haciendo uso de Etoys, al construir el triángulo con Etoys un lenguaje de programación, concatenaron otros conceptos que son objetos matemáticos base (segmento, ángulo, recta), al diseñar el ángulo aparecen conceptos como ángulos complementarios y suplementarios, ángulos construidos hacia la derecha y ángulos construidos hacia la izquierda (ángulos orientados); aquí al diseñar un ángulo los niños y niñas lograron alcanzar un nivel de subesquema, luego la interrelación con otros ángulos se construye el triángulo (otro subesquema de nivel superior). En el nivel *Trans*, los niños/as logran interrelacionar ángulos y triángulos para construir el plano, y que dicho plano está compuesto por triángulos; en este caso los niños/as alcanzan el nivel de esquema.

Los conceptos: ángulos complementarios y suplementarios, triángulos isósceles, suma de ángulos internos de un triángulo, ángulos orientados no son propios del 5to grado de primaria, los contenidos son de grados superiores; sin embargo, los niños/as construyeron sus conocimientos bajo el paradigma del construccionismo, ya que el aprendizaje forma parte de la transversalidad de los contenidos tratados para la construcción del concepto de fracción. Además, los niños/as concibieron que el todo se construye de las partes y viceversa.

Asimismo, el lenguaje de programación Etoys, como herramienta educacional dentro del paradigma del construccionismo, promueve un aprendizaje dinámico y mucho más significativo e interdisciplinario; porque los niños/as diseñan proyectos que se construyen a partir de los conceptos que se introducen integrando diversos objetos matemáticos mucho más complejos, cuyos conceptos corresponden a planes curriculares superiores

Referencias

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate

Mathematics Education. *CBMS. Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 1–32.

Badilla, E., & Chacón, A. (2004). Construccionismo: Objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *4*(1), 1–12.

Bouras, C., Poulopoulos, V., & Tsogkas, V. (2010). Squeak Etoys: Interactive and Collaborative Learning Environments. En Management Association, USA, I (Ed.), *Gaming and Simulations: Concept, Methodologies, Tools and Applications* (Vol. 3, pp. 898–909). IGI Global. Recuperado a partir de http://www.igi-global.com/chapter/gaming-simulations-concepts-methodologies-tools/49425

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247–285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

Cerda Quintero, J. (2010). *Hacia un programa de autorregulación del pensamiento lógico-formal en el aprendizaje de las matemáticas* (Doctoral Thesis). Universidad de Valladolid, Valladolid. Recuperado a partir de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=21619

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., … Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345–364. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matematica. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, *17*(1), 87–106.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267–305.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 283–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duzenli-Gokalp, N., & Devi Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 5168–5171. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.840

Falbel, A. (1993). Construccionismo. Enlaces 2001. Abriendo las Fronteras del Aula. Recuperado a partir de http://llk.media.mit.edu/projects/panama/lecturas/Falbel-Const.pdf

Fraga, F., & Gewerc, A. (2004). Una experiencia interdisciplinar en Ed. Primaria mediante el uso de Squeak. *Innovación educativa, Universidad de Santiago de Compostela*, (15), 1–20.

Friz Carrillo, M., Sanhueza Henríquez, S., Sánchez Bravo, A., Belmar Mellado, M., & Figueroa Manzi, E. (2008). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. *Horizontes Educacionales, Universidad de Bío Bío*, *13*(2), 87–98.

García López, M. del M., & Romero Albaladejo, I. M. (2009). Influencia de las Nuevas Tecnologías en la Evolución del Aprendizaje y las Actitudes Matemáticas de Estudiantes de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 369–396.

Harel, I. (1991). *Children designers: interdisciplinary constructions for learning and knowing mathematics in a computer-rich school*. The Media Laboratory Massachusetts of Technology. New Jersey: Ablex Publishing.

Kafai, Y. B. (1995). *Minds in Play: Computer Game Design As A Context for Children's Learning*. New Jersy: LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, PUBLISHERS.

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in Practice: Designing, Thinking, and Learning in A Digital World*. New Jersy: Lawrence Erlbaum Asociates, Publishers.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *Number and Measurement. Papers from a Research Workshop*, 101–144.

Kieren, T. (1980). The rational numbers construct: Its elements and mechanisms. *Recent Research on Number Learning.*, 128–152.

Kieren, T. E. (1985). Five faces of mathematical knowledge building. Dept of Secondary Education, University of Alberta. Recuperado a partir de http://www2.education.ualberta.ca/educ/sec/docs/Occasional%20Paper%20No.%2020-Kieren.pdf

Mateos Ponce, T. G. (2008). Una aproximación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Un punto de vista psicogenético. *Ethos Educativo*, *41*, 193–208.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(003), 221–278.

Olfos Ayarza, R. A., & Guzman Retamal, I. (2011). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. En *ACTAS DE XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA* (pp. 1–11). Recife, Brasil: XIII CIAEM-IACME. Recuperado a partir de http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2391/326

Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, *11*(1), 4–9.

Ortiz Lázaro, I. (1994). El papel del profesor tutor ante las dificultades de aprendizaje escolar: propuesta de intervención. *ENSAYOS. Revistas de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete*, (9), 143–157.

Papert, S. (1982). *Desafío a la mente: computadoras y educación*. (L. Espinoza de Matheu, Trad.) (2da ed.). Buennos Aires: Galápagos.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel (Ed.), *Construccionism* (pp. 1–11). Massachusetts Institute of Technology. Epistemology & Learning Research Group: Ablex Publishing Corporation. Recuperado a partir de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas: Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI, Editores S.A.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo Veintiuno.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 165–190.

Quintanilla Cóndor, C., Fraga Varela, F., & Gewerc Barujel, A. (2012). La construcción del concepto de fracciones con Etoys. En A. Lago Ferreiro, M. Llamas Nistal, & A. A. Nogueiras Meléndez (Eds.), *Actas del X Congreso de Tecnologías Aplicadas en la Enseñanza de la Electrónica 2012* (pp. 244–247). Vigo, España: Escuela de Ingeniería Industrial Universidad de Vigo. Recuperado a partir de http://www.taee2012.es/index.php/es/actas

Reig, D. (2012, junio 15). 16 cosas que nadie nos había contado sobre creatividad (e innovación) [Acens TV]. Recuperado a partir de http://www.dreig.eu/caparazon/2012/06/15/16-tips-creatividad/

Ríos García, Y. J. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática. *Revista Omnia*, *17*(1), 11–33.

Sankaran, S., Sampath, H., & Sivaswamy, J. (2009). Learning fractions by making patterns – An Ethnomathematics based approach. En S. C. Kong, H. C. Ogata, C. K. Chang, T. Hirashima, J. H. M. Klett, C. C. Liu, … S. J. . Yang (Eds.), *Proceedings of the 17 th International Conference on Computers in Education* (pp. 341–345). Hong Kong: Asia_Pacific Society for Computer in Education. Recuperado a partir de http://www.apsce.net/ICCE2009/pdf/C2/proceedings341-345.pdf

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5–32.

Villagarra, M. E., Saavedra, F., Espinosa, Y., Jiménez, C., Sánchez, L., & Sanguino, J. (2012). Acercando al profesorado de matemáticas a las TIC para la enseñanza y aprendizaje. *Revista de Educación Mediática y TIC*, *1*(2), 65–87.

Wu, H. (1999). Some remarks on the teaching of fractions in elementary school. Department of Mathematics. University of California, Berkeley. Recuperado a partir de http://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf

Yusof, J., & Malone, J. (2003). Mathematical errors in fractions: A case of Bruneian primary 5 pupils. En L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity* (Vols. 1–1–2, pp. 783–790). Australasia: Proceedings of the 26th annual conference of the mathematics education research group of Australasia. Geelong, Vic: MERGA. Recuperado a partir de http://www.merga.net.au/documents/RR_yusof.pdf

Zapata Cardona, L. (2009). Cómo abordar la multiplicación y la división de fracciones. *Ethos Educativo*, *45*, 223–234.

Volver al índice de autores