Espacios de descubrimiento de geometría fractal utilizando el software matemático Geogebra

CHAVES, EFREN[I] GARDELA, GRETTEL

Costa Rica

Resumen

Este taller consiste en desarrollar espacios de aprendizaje de la geometría fractal por medio del software matemático GeoGebra. Además, se pretende seguir una metodología constructivista en la que los participantes lograrán, a través de sus propias elaboraciones en GeoGebra, descubrir el concepto y algunas propiedades de la geometría fractal. Como eje adicional, se dan recomendaciones de cómo desarrollar algunos temas del programa de matemáticas de secundaria utilizando construcciones fractales.

Palabras clave: espacios de aprendizaje, geogebra, geometría fractal.

Objetivo General

Desarrollar espacios de descubrimiento de geometría fractal a través del software matemático GeoGebra.

Objetivos específicos

1. Realizar construcciones de geometría fractal por medio del software Geogebra.
2. Construir a partir de las figuras anteriores el concepto de geometría fractal.
3. Reconocer el avance histórico y aplicaciones de la geometría fractal.

Recursos y materiales

- Laboratorio equipado con computadoras.
- Sistema Operativo Widndows XP o superior.
- Software GeoGebra instalado.
- Proyector multimedia.
- Hoja de construcciones impresas.
- Cuestionario impreso.

[I]UNED, Costa Rica.

A. Introducción

La geometría Euclidiana ha sido tomada como regla universal para interpretar el mundo que nos rodea; sin embargo, si se observa ese "mundo que nos rodea", árboles, bosques, el cuerpo humano, montañas, y costas, todo lo que la naturaleza misma ha creado sin intervención del ser humano, entonces la geometría que describe el mundo no es de curvas suaves. Asimismo, la geometría Euclidiana no es la más óptima para interpretar el entorno.

Las inquietudes de matemáticos recientemente han dado origen a una nueva geometría que permite el estudio de infinidad de fenómenos en la naturaleza, y se le conoce como geometría de fractales. Esta geometría fractal modela fenómenos como fraccionamientos, repeticiones, iteraciones, crecimientos, ramificaciones, y muchos más.

Ante la existencia de una geometría distinta a la Euclidiana, y con aplicaciones en la vida cotidiana, surgen las interrogantes de ¿Por qué no introducir la geometría fractal en secundaria? ¿Cómo desarrollar espacios de descubrimiento de geometría fractal para alumnos de secundaria?

La geometría fractal ofrece una vasta gama de conocimientos y aplicaciones, por ello es de suma importancia que en el siglo XXI, ante infinitos avances en ciencia y tecnología, se empiece a introducir esta geometría. Y aún más, ante un currículo de Matemáticas reformado por el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica, es necesaria la incorporación de la geometría fractal en secundaria.

B. Marco teórico

La naturaleza ofrece formas geométricas distintas de círculos, triángulos y cuadrados, más bien son formas irregulares, formas que a simple vista distan de lo que se conoce como geometría.

Una particularidad que comparten algunas de estas formas de la naturaleza, es que una de las partes tiene similitud con el todo. Esto quiere decir que, por ejemplo, al tomar un helecho, y luego comparar una de sus ramas con la planta, se nota la similitud, e incluso si tomamos una de las ramas más pequeñas que forman las ramas grandes, en todas se encuentra similitud.

Estas características se identifican en bosques completos, en formaciones rocosas, en costas, en el cuerpo humano, etc. Por lo tanto, se puede decir que un fractal es una formación que después de realizar acercamientos iterados, mantiene la misma forma que el objeto original. También, existen los fractales creados por programas de computadora, y a estos, Redondo y Haro (2004) al referirse afirman que "Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior." (p. 20)

Las estructuras matemáticas con características fractales no son tan recientes como se puede pensar. Diferentes matemáticos a través de la historia habían encontrado lo que ellos denominaban "monstruos"; eran estructuras patológicas en un mundo visto a través de Euclides y de Newton.

Weierstrass (1815-1897) descubrió la primera curva continua que no es diferenciable. Esta curva es considerada como un fractal. Por otro lado, Cantor (1845-1918), estableció una sucesión conocida como el conjunto de Cantor, el cual se produce al tomar un intervalo, dividirlo en tres segmentos iguales, y remover la sección del medio; luego, se repite el proceso con los dos segmentos restantes, se dividen en tres partes y se remueve la sección del medio. Al realizar este procedimiento infinitamente, se podría pensar que en algún momento no queda "nada"; sin embargo, el conjunto es infinito no contable. (Falconer, 2003, p. 18).

Otro de los monstruos encontrados fue la curva de Peano, por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), la particularidad de dicha curva es que pasa por todos los puntos del plano, y esto la convierte en otro ejemplo temprano de fractal. (Ortega, 2011, p.6)

El matemático Polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) introduce otros objetos, el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Sierpinski. El triángulo de Sierpinski se construye al tomar un triángulo equilátero y remover repetidamente triángulos equiláteros invertidos. (Falconer, 2003, p.132)

Además, el Copo de nieve de Koch es contado entre estos objetos fractales, aunque fue descubierto antes de ser catalogado como tal. Fue introducido por Niels Fabian Helge von Koch (1815-1897) en un artículo titulado Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental en 1904. (Ortega, 2011, p. 6) Este fractal consiste en tomar un segmento, remover el tercio del medio y cambiar lo por una formación triangular equilátera; luego se realiza el proceso infinitamente sobre los segmentos resultantes.

La curva de Weierstrass, el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, y la curva o copo de nieve de Koch constituyen algunos de los primeros hallazgos de estructuras fractales en la matemática; sin embargo, fue Benoit Mandelbrot quien le atribuye el término fractal, proveniente del latín fraccionado o quebrado, y que resalta la característica particular de estas estructuras.

Mandelbrot se interesó en esos "monstruos", estructuras que eran raras para la época, y que no seguían un patrón conocido. Sus estudios de estas estructuras tomaron fuerza cuando este matemático empieza a trabajar para IBM en 1961, una empresa dedicada a la investigación en la naciente ciencia de la informática y las telecomunicaciones.

En un artículo de IBM sobre la geometría fractal, se menciona que en 1980 Mandelbrot utilizó la computadora como herramienta que le permitiera facilitar el proceso de iterar funciones. Tomando la función $z_{n+1} = z_n^2 + c$, usó el resultado como la siguiente entrada, y así sucesivamente, luego graficó los resultados. A través de este proceso, y con la ayuda del procesador, Mandelbrot desarrolló lo que se conoce como el conjunto de Mandelbrot.

La geometría fractal ideada por Mandelbrot tomó fuerza hasta alrededor de 1982, cuando este matemático publicó el libro La geometría Fractal de la Naturaleza. En este libro, Madelbrot lista algunas de las ocurrencias de fractales en objetos de la naturaleza. (Fractal Geometry, (s.f), p. 3)

La geometría fractal, aunque descubierta recientemente, ha existido ya por algún tiempo en las creaciones de matemáticos, y además, se puede afirmar que la naturaleza lo inventó primero.

Además de la irregularidad en la geometría fractal, en comparación con la suavidad en la geometría clásica, estas dos se diferencian en la dimensión de sus objetos. Se sabe que una línea tiene dimensión 1, así una figura plana tiene dimensión 2 (área), y una figura en el espacio tiene dimensión 3 (volumen); sin embargo, ¿en cuál grupo se ubican los fractales?

Si bien la definición de dimensión es un concepto complejo, se intentará dar una referencia razonable, que permita comprender dicho concepto. Uno de los métodos para determinar la dimensión de un objeto es cubrirlo con objetos más pequeños de la dimensión en que se está tratando. Por ejemplo, al trabajar con un cuadrado (dimensión 2) de lado L, este se puede cubrir con N cajas de unidades cuadradas u^2. Así la capacidad del cuadrado es $M = Nu^2$, en este caso particular, o lo que es lo mismo $L^2 = Nu^2$, y así $N = (L/u)^2$.

Estas igualdades se pueden generalizar de forma que $M = Nu^D$, donde D corresponde a la dimensión del objeto. El ejemplo del cuadrado es un caso particular en el cual se conoce la dimensión del objeto; sin embargo, cuando la dimensión del objeto es desconocida, esta se puede obtener fácilmente por medio de los otros datos. (Gouyet, 1996, p.5)

Si se parte de la expresión $N = (L/u)^D$, el valor de la dimensión D, viene dado por:

$$\ln N = \ln\left(\frac{L}{u}\right) \Longrightarrow \ln N = D\ln\left(\frac{L}{u}\right) \Longrightarrow D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{L}{u}\right)}$$

Partiendo de esta expresión se puede determinar la dimensión de objetos fractales. Al analizar un objeto fractal, por ejemplo el Copo de Nieve de Koch, se tiene que al tomar un segmento de longitud $L = 3$, y después de sustituir el tercio del medio, y colocar dos segmentos opuestos con un ángulo de inclinación de $60°$, se obtiene un total de $N = 4$ segmentos iguales:

Dado que este proceso es iterativo, fácilmente se puede determinar la dimensión fractal del copo de nieve, que en este caso corresponde a

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26186...$$

C. Aplicaciones

Si le peguntan ¿qué relación tiene Star Wars con la geometría fractal? Y responde que no existe relación, considere su respuesta. Una de las aplicaciones más interesantes de los fractales es su utilización en el diseño digital.

A mediados de los 90, cuando se estaba editando una de las películas de Star Wars, se emplearon los fractales para el diseño de paisajes como el de la estrella de la muerte, o efectos de lava descendiendo. Este corresponde a uno de los primeros usos de la geometría fractal.

Uno de los grandes dilemas de la geografía ha sido el determinar la longitud de una costa por ejemplo. Entre más grande sea la unidad de medida, más pequeña va a ser la longitud encontrada. Y si se comparan longitudes que se han medido con diferentes unidades, los resultados difieren significativamente. Por lo tanto, los fractales vienen a resolver este dilema, y es uno de los primeros temas que expone Mandelbrot, cuando escribe ¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?

Los fractales también han sido utilizados para la creación de antenas que permiten una mejor recepción de señales. Estas han permitido que las telecomunicaciones hayan mejorado. En el diseño digital y en la publicidad, los fractales han permitido que se puedan crear incluso montaña, y esto le da un aspecto más atractivo. Los fractales han dado un nuevo sentido, y de cierta forma han permitido que el mundo gire más rápido, o al menos han permitido que las tecnologías logren grandes avances. Estos ejemplos que se han mencionado anteriormente han sido tomados de El universo es un fractal.

D. Metodología

El taller seguirá una metodología constructivista y la utilización de recursos tecnológicos para el aprendizaje. En este caso se utilizará el software libre Geogebra.

Los participantes realizarán dos construcciones de geometría fractal, el triángulo de Sierpinski y el cono de nieve de Koch. A partir de estas figuras se construirá en conjunto el concepto de geometría fractal, y algunas de sus propiedades.

Debido a la amplia utilidad del software Geogebra, se introducirá como segundo eje la creación de herramientas nuevas dentro del software. Esto facilitará la elaboración de construcciones fractales las cuales requieren repeticiones e iteraciones. Una vez hechas las construcciones se realizará una discusión entre los participantes, respecto al tema presentado y la utilización que se le dio al software Geogebra.

Además, se darán algunas recomendaciones de temas del programa de Matemáticas de secundaria que se puede desarrollar por medio de construcciones fractales.

E. Conclusiones

El uso del software permite observar y facilita la comprensión de una geometría que a pesar de no estar en el plan de estudios de segundaria, sí se puede utilizar anclada a los temas propuestos por la autoridad educativa de Costa Rica (MEP).

La elaboración del proyecto permite que los docentes tengan la oportunidad de salirse de la rutina y realizar una clase desde una perspectiva más dinámica y tecnológica. Esto le permite al docente estar a un mismo nivel tecnológico con sus estudiantes. Esta propuesta desarrolla el pensamiento geométrico en relación con el entorno, cómo evoluciona el estudiante en su proporción con el medio en el que se desenvuelve. Es necesario que el docente esté en constante renovación tanto de conocimientos como del uso de la tecnología. Para ofrecerles a sus estudiantes lecciones que estén más ligadas a su entorno y como puede aplicar esos conocimientos en su vida cotidiana.

El desarrollo del pensamiento se da cuando el estudiante tiene mayor oportunidad de observar, deducir y analizar la situación que se le presenta, lo que le permite enfrentar situaciones imprevistas de una mejor manera.

Referencias

[1] El universo es un fractal. (n.d.). Retrieved from http://www.youtube.com/watch?v=UUvyPmOYv4o

[2] Falconer, K. (2003). Fractal Gemetry; Mathematical foundations and aplications. England: Wiley.

[3] Fractal Geometry. (s.f.). Recuperado el 26 de Abril de 2014, de IBM: http://www-03.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/ Gouyet, J.-F. (1996). Physics and fractal structures. Ecole Polytechnique.

[4] Ortega, E. (2011). Análisis fractal. CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN.

[5] Redondo, A., & Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria I. Albacete: SUMA.

[6] Redondo, A., & Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria II. Albacete: SUMA.

[7] Santillana. (s.f.). Fractales, potencias, álgebra. Obtenido de http://www.santillana.com.uy/pdfs/libroPDF1800.pdf

F. Ejemplos tempranos de objetos fractales

Figure 21: Curva de Weierstrass

Figure 22: Conjunto de Cantor.

Figure 23: Triángulo de Sierpinski.

Figure 24: Alfombra de Sierpinski.

Figure 25: Curva de Koch.

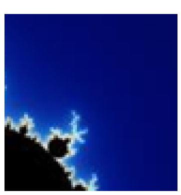

Figure 26: Conjunto de Mandelbrot.

G. Descripción de construcciones

Construcción #1

Parte 1:
Dividir un segmento en tres partes iguales, remover el término del medio, y construir un triángulo equilátero sobre el tercio del medio.

1. Abrir el software GeoGebra
2. (Remover ejes) Menú principal seleccionamos Vista » Ejes
3. (Hacer visible la cuadricula) Menú principal seleccionamos Vista » Ejes » Cuadrícula

Figure 27: Cuadrícula en GeoGebra.

4. Con la herramienta Nuevo Punto se colocan dos puntos A y B.

Figure 28: Puntos A y B.

5. Con la herramienta Segmento entre dos puntos, trazamos un segmento entre A y B.

Figure 29: Puntos A y B.

6. Con la herramienta Recta Perpendicular, seleccionamos el segmento AB y el Punto A.

Figure 30: Recta perpendicular.

7. Con la herramienta Circunferencia dado su centro y radio, dibuje un círculo de centro en A y de radio 2.

Figure 31: Circunferencia dado su centro y radio.

8. Luego, utilizando la herramienta Intersección de dos objetos, seleccione la circunferencia y la recta Perpendicular a AB para determinar su punto de intersección.

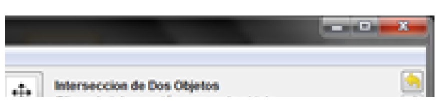

Figure 32: Intersección de objetos.

9. Construya dos circunferencias más, y determine su punto de intersección con la recta perpendicular a AB. Para ello repita los pasos 6 y 7. Obtendrá algo similar como se ilustra en la imagen.

Figure 33: Circunferencias.

10. Una vez que se han determinado los tres puntos en la recta perpendicular a AB, se traza una recta desde el último punto hasta B.

Figure 34: Recta desde el último punto hasta B.

11. Posteriormente, utilizando la herramienta Recta Paralela, seleccione la recta que se acaba de trazar en el punto anterior, y uno de los puntos en la recta perpendicular a AB. (Repetir el proceso con ambos puntos) Se obtendrá algo como lo que se ilustra en la figura 35.

12. Utilizando la herramienta Intersección de dos objetos, determine los puntos de intersección de las rectas anteriores con el segmento AB.

13. De esta forma se han encontrado los puntos H e I, los cuales dividen el segmento AB en tres segmentos congruentes. Luego, se ocultan los objetos a excepción de los puntos H y I, como se muestra en la imagen 36.

Figure 35: Recta desde el último punto hasta B.

Figure 36: Puntos H, I.

14. Trazar los segmentos AH, y IB:
15. Utilizando la herramienta Polígono Regular trazaremos un triángulo equilátero sobre HI:

Figure 37: Puntos H, I.

16. Utilizando la herramienta Segmento entre Dos Puntos, cubrir los lados superiores del triángulo, y ocultar el polígono:

Figure 38: Segmento entre Dos Puntos.

Parte 2:

Crear herramienta para realizar estos pasos repetidas veces.

1. En el menú herramientas, seleccionar Creación de Herramienta Nueva.

Figure 39: Nueva herramienta.

2. En la ventana emergente se seleccionará los objetos de salida (En este caso, los segmentos i, j, l, y m; y los puntos H, J, I)

Figure 40: Objetos de salida.

Figure 41: Objetos de salida.

3. Al dar clic en Siguiente, los objetos de entrada por defecto son A y B.
4. La última parte consiste en dar un nombre y descripción a la nueva herramienta.

Figure 42: Creación de Nueva Herramienta.

5. Al finalizar, se da clic en el botón de Concluido. La nueva herramienta aparecerá en la barra de objetos.
6. Para que la nueva herramienta esté disponible, se debe salvar en el Menú Principal, Gestión de Herramientas, y Guardar Como.

Construcción #2

Se elaborará el triángulo de Sierpinski, en el cual podrán observar cómo se fragmenta en triángulos semejantes al inicial aunque cada vez son más pequeños y que eso no va a alterar esa semejanza.

1. Abrir el programa GeoGebra.
2. Dar clic en la vista gráfica para seleccionar cuadrícula y eliminar ejes. Ver figura 43.
3. Seleccionar la herramienta Polígono Regular.
4. Colocar el punto A y el punto B, en la ventana emergente colocar el número 3 y dar OK. Ver figura 44.
5. Dar clic derecho sobre el polígono, ir a Propiedades para cambiar color y opacidad. Ver figura 45.

Figure 43: Creación de Nueva Herramienta.

Figure 44: Herramienta Polígono.

Figure 45: Modificar la propiedad de Opacidad.

6. Ir a la sección de Herramientas y dar clic sobre la segunda casilla y elegir punto medio.
7. Dar clic sobre los vértices en el siguiente orden: AC, CB, y AB. Aparecerán los puntos medios de los segmentos. Ver figura 46.
8. Ir a la sección de Herramientas y en la quinta casilla elegir la herramienta trazar polígono.
9. Los puntos medios con la herramienta elegida en el paso anterior.
10. Se forma un polígono con 4 triángulos internos semejantes. Ver figura 47.
11. Dar clic derecho sobre la letra minúscula que aparece y elegir Etiqueta Visible para esconder la letra que nombra al segmento. Ver figura 48.

Figure 46: Modificar la propiedad de Opacidad.

Figure 47: Modificar la propiedad de Opacidad.

Figure 48: Etiqueta Visible.

12. Ir a Vista Algebraica y dar clic derecho sobre el polígono 2 para cambiar el color. Ver figura 49.

13. Aplicar nuevamente la herramienta de punto medio, unirlos mediante la herramienta polígono, esconder los nombres de los segmentos que aparecen y cambiar (en otras palabras repetir del paso 5 al 11). Ver figura 51.

Figure 49: Propiedades de Objeto.

Figure 50: Modificar color.

Figure 51: Creación de triángulos

14. En la Vista Algebraica dar clic izquierdo sobre los puntos, para ocultar y dejar visibles el punto A,B y C.

Figure 52: Creación de triángulos

15. Podemos seguir repitiendo del paso 5 al 11, obseve lo que se aprecia con el siguiente nivel.

Figure 53: Creación de triángulos