Solución de ecuaciones diferenciales de orden tres

ROSALES, JOSÉ[I]

Costa Rica

Resumen

En este artículo se presenta una forma sencilla de encontrar el espacio solución de una ecuación diferencial lineal de tercer orden homogénea, con coeficientes variables, siempre y cuando se conozcan dos de sus soluciones las cuales deben ser linealmente independientes.

Palabras clave:

A. Introducción

El presente trabajo se dará a conocer en el Segundo Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa, y su intención es señalarle a los jóvenes que aún en la matemática elemental es posible encontrar nuevos teoremas que nos permitan tener una comprensión más clara de resultados que son conocidos.

Nuestro trabajo tiene sus inicios en las clases del curso de ecuaciones diferenciales que el autor ha enseñado desde el siglo pasado en la Universidad de Costa Rica. Surgió mientras el autor preparaba uno de los exámenes parciales del curso Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería del primer semestre del año 2013.

En un curso tradicional de ecuaciones diferenciales se enseña a describir el conjunto solución de una ecuación diferencial lineal de orden dos con coeficientes variables o no, y homogénea. Se le indica al estudiante que en el caso de coeficientes variables se necesita conocer a priori una solución no trivial. Luego, por medio de una conocida fórmula se debe, pero no siempre es posible, resolver un par de integrales para hallar una segunda solución la cual es linealmente independiente con la primera ya conocida.

Ahora bien, qué se necesita para describir el conjunto solución de una ecuación homogénea de tercer orden con coeficientes variables?

Ahora bien, qué se necesita para describir el conjunto solución de una ecuación homogénea de tercer orden con coeficientes variables?

La ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden con coeficientes variables tiene la siguiente forma:

$$y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

donde $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ son funciones continuas en un mismo intervalo I.

La siguiente proposición es conocida, y aplica la llamada técnica de reducción de orden.

[I]TEC, Costa Rica.

Proposition 1 *Supongamos que $y_1(x)$ es una solución de la ecuación*

$$y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0,$$

entonces al poner $y(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación anterior obtenemos

$$u''' + \left(\frac{3y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\right)u'' + \left(\frac{3y_1''(x)}{y_1(x)} + 2a_1(x)\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_2(x)\right)u'(x) = 0$$

A su vez al poner $v = u'$,y sin escribir la dependencia de la variable x, obtenemos la siguiente ecuación de segundo orden:

$$v'' + \left(\frac{3y_1'}{y_1} + a_1\right)v' + \left(\frac{3y_1''}{y_1} + \frac{2a_1y_1'}{y_1} + a_2\right)v \;=\; 0. \tag{2}$$

El lema anterior establece que si se conoce una solución de la ecuación de tercer orden, entonces con el cambio establecido previamente, obtenemos una nueva ecuación de orden dos, la cual es en cierta forma fácil de resolverla. Si es posible resolver dicha ecuación de orden dos entonces es inmediato encontrar el espacio solución de la ecuación de orden tres.

En efecto, si $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$ son soluciones de la ecuación (2) entonces se tiene que $u' = \phi_2(x)$ y $u' = \phi_3(x)$, de donde $u_2(x) = \int \phi_2(x)\,dx$ y $u_3(x) = \int \phi_3(x)\,dx$. Por lo tanto, $y_2 = y_1(x)\int \phi_2(x)\,dx$, y $y_3 = y_1(x)\int \phi_3(x)\,dx$ son soluciones de la ecuación de tercer orden.

Lo anterior se verá con más detalle en la siguiente sección, por el momento vamos a realizar algunas observaciones relacionadas con ecuaciones de orden dos.

Hay algunos casos inmediatos donde es posible describir el espacio solución de una ecuación de orden dos. Tales casos se expresan en los lemas siguientes:

Lemma 1 *Considere la ecuación de segundo orden*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Si $r(x) + p(x) + q(x) = 0$, entonces el espacio solución de dicha ecuación está generado por las funciones

$$y_1(x) = e^x, \qquad y \qquad y_2(x) = e^x \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{e^{2x}} dx.$$

La prueba de este resultado es inmediata ya que si sustituimos $y(x) = e^x$ en dicha ecuación obtenemos que $r(x)e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0$. Se sigue que entonces $r(x) + p(x) + q(x) = 0$ para que $y(x) = e^x$ sea solución. Luego para obtener la segunda solución linealmente indepediente con $y(x) = e^x$ se usa reducción de orden.

Los dos siguientes resultados se basan en un análisis elemental como el que acabamos de presentar.

Lemma 2 *Considere la ecuación de segundo orden*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Si $r(x) - p(x) + q(x) = 0$, entonces el espacio solución de dicha ecuación está generado por las funciones

$$y_1(x) = e^{-x}, \qquad y \qquad y_2(x) = e^{-x} \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{e^{-2x}} dx.$$

Lemma 3 *Considere la ecuación de segundo orden*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Si $p(x) + xq(x) = 0$*, entonces el espacio solución de dicha ecuación está generado por las funciones*

$$y_1(x) = x, \quad y \quad y_2(x) = x\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{x^2}dx.$$

Las demostraciones de los lemas anteriores son simples cálculos, y se dejan como un ejercicio simple al lector.

B. Resultado principal.

De lo dicho anteriormente, queda claro que para intentar resolver una ecuación de orden tres necesito una primer solución no trivial, para luego utilizar reducción de orden y obtener una ecuación de orden dos. Sin embargo, esta última puede ser difíl de resolver ya que necesitamos conocer al menos una solución para ella.

Hemos encontrado una formade resolver la ecuación de orden tres lineal homogénea con coeficientes variables, para ello necesitamos conocer de antemano dos soluciones que sean linealmente independientes.

El principal resultado de este trabajo se expone en el siguiente teorema:

Theorem 1 *Sean* y_1 *y* y_2 *dos soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0.$$

Entonces $v(x) = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ *es solución de la ecuación*

$$v'' + \left(\frac{3y_1'}{y_1} + a_1\right)v' + \left(\frac{3y_1''}{y_1} + \frac{2a_1y_1'}{y_1} + a_2\right)v \;=\; 0. \tag{3}$$

La prueba de este teorema es un cálculo extenso, pero el resultado por sí mismo es valioso.

Observe primero que

$$v(x) = \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2y_1'}{y_1^2} \tag{4}$$

La prueba de este teorema es un cálculo extenso, pero el resultado por sí mismo es valioso.

Observe primero que

$$v(x) = \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2y_1'}{y_1^2} \tag{5}$$

Hagamos el siguiente producto, el cual es el tercer sumando de la ecuación (3). En este producto se van a generar los seis términos siguientes:

$$\left(\frac{3y_1''}{y_1} + \frac{2a_1y_1'}{y_1} + a_2\right)\left(\frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2y_1'}{y_1^2}\right)$$
$$= \frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3} + \frac{a_2y_2'}{y_1} - \frac{a_2y_2y_1'}{y_1^2}.$$

Al derivar la ecuación (5) se obtiene lo siguiente:

$$v' = \frac{y_2'' y_1 - y_2' y_1'}{y_1^2} - \frac{(y_2' y_1' + y_2 y_1'') y_1^2 - 2 y_1 y_2 (y_1')^2}{y_1^4}$$

Al simplificar términos y expresar en fracciones se obtiene

$$v' = \frac{y_2''}{y_1} - \frac{2y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{y_2 y_1''}{y_1^2} + \frac{2y_2(y_1')^2}{y_1^3} \tag{6}$$

Hagamos el siguiente producto el cual generará ocho términos

$$\begin{aligned}\left(\frac{3y_1'}{y_1} + a_1\right)\left(\frac{y_2''}{y_1} - \frac{2y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2y_2(y_1')^2}{y_1^3}\right) &= \\ \frac{3y_1'y_2''}{y_1^2} - \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} + \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{a_1y_2''}{y_1} - \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} & \\ - \frac{a_1y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3} & .\end{aligned}$$

Ahora viene un cálculo más extenso. Vamos a derivar la expresión (6) y obtendremos once términos, los cuales se van a reducir a sólo siete. En efecto, procedemos a derivar cada uno de los términos, para su mejor manejo, de la ecuación (6):

$$\left(\frac{y_2''}{y_1}\right)' = \frac{y_2'''}{y_1} - \frac{y_2''y_1'}{y_1^2}.$$

$$\left(-\frac{2y_1'y_2'}{y_1^2}\right)' = -\frac{2y_1''y_2'}{y_1^2} - \frac{2y_1'y_2''}{y_1^2} + \frac{4(y_1')^2y_2'}{y_1^3}$$

$$\left(-\frac{y_2y_1''}{y_1^2}\right)' = -\frac{y_2'y_1''}{y_1^2} - \frac{y_2y_1'''}{y_1^2} + \frac{2y_2y_1'y_1''}{y_1^3}$$

$$\left(\frac{2y_2(y_1')^2}{y_1^3}\right)' = \frac{2y_2'(y_1')^2}{y_1^3} + \frac{4y_2y_1'y_1''}{y_1^3} - \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4}$$

Por lo tanto, al sumar las cuatro expresiones anteriores nos queda lo siguiente:

$$S.Helgason v'' = \frac{y_2'''}{y_1} - \frac{3y_2''y_1'}{y_1^2} - \frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} + \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} - \frac{y_2y_1'''}{y_1^2} + \frac{6y_2y_1'y_1''}{y_1^3} - \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4}$$

Vamos a escribir cada uno de los tres sumandos de la ecuación (3) en las siguientes tres filas:

$$\frac{y_2'''}{y_1} - \frac{3y_2''y_1'}{y_1^2} - \frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} + \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} - \frac{y_2y_1'''}{y_1^2} + \frac{6y_2y_1'y_1''}{y_1^3} - \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4} +$$

$$\frac{3y_1'y_2''}{y_1^2} - \frac{6(y_1')^2y_2'}{y_1^3} + \frac{6y_2(y_1')^3}{y_1^4} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{a_1y_2''}{y_1} - \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{a_1y_2y_1''}{y_1^2} + \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3}$$

$S.Helgason$

$$+\frac{3y_1''y_2'}{y_1^2} - \frac{3y_2y_1'y_1''}{y_1^3} + \frac{2a_1y_1'y_2'}{y_1^2} - \frac{2a_1y_2(y_1')^2}{y_1^3} + \frac{a_2y_2'}{y_1} - \frac{a_2y_2y_1'}{y_1^2}$$

De la expresión anterior vamos a simplificar términos. Observe que efectivimante varios términos se eliminan, sólo sobreviven los siguientes:

De la expresión anterior vamos a simplificar términos. Observe que efectivimante varios términos se eliminan, sólo sobreviven los siguientes:

$$\frac{a_2 y_2'}{y_1} - \frac{a_2 y_2 y_1'}{y_1^2} + \frac{a_1 y_2''}{y_1} - \frac{a_1 y_2 y_1''}{y_1^2} + \frac{y_2'''}{y_1} - \frac{y_2 y_1'''}{y_1^2}.$$

Estos seis términos los partiremos en dos grupos:

$$\frac{a_2 y_2'}{y_1} + \frac{a_1 y_2''}{y_1} + \frac{y_2'''}{y_1},$$

y

$$-\frac{a_2 y_2 y_1'}{y_1^2} - \frac{a_1 y_2 y_1''}{y_1^2} - \frac{y_2 y_1'''}{y_1^2}.$$

Ahora bien, usando por primera vez que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal de tercer orden, se tiene que

$$y_1'''(x) + a_1(x) y_1''(x) + a_2(x) y_1'(x) + a_3(x) y_1(x) = 0.$$

Se observa que

$$-\frac{a_2 y_2 y_1'}{y_1^2} - \frac{a_1 y_2 y_1''}{y_1^2} - \frac{y_2 y_1'''}{y_1^2} = -\frac{y_2}{y_1^2}\left(y_1''' + a_1 y_1'' + a_2 y_1'\right)' = \frac{a_3 y_2}{y_1}$$

.

En forma totalmente análoga se obtiene que

$$\frac{a_2 y_2'}{y_1} + \frac{a_1 y_2''}{y_1} + \frac{y_2'''}{y_1} = \frac{a_3 y_2}{y_1}.$$

Es claro que la suma de estas dos expresiones es cero y que por lo tanto hemos probado nuestro teorema. Vamos a resolver un ejemplo para ver cómo funciona nuestro teorema.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de tercer orden:

Es claro que la suma de estas dos expresiones es cero y que por lo tanto hemos probado nuestro teorema.

Vamos a resolver un ejemplo para ver cómo funciona nuestro teorema.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de tercer orden:

$$\left(x^2 - 2x + 2\right) y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Lo primero es que debemos encontrar dos soluciones que sean linealmente independientes. Una primera es $y_1(x) = x$, lo cual se verifica con un simple cálculo. La segunda se consigue al notar que la suma de los coeficientes de esta ecuación es cero, y por lo tanto $y_2(x) = e^x$ es solución. Ahora bien, como las funciones x y e^x son soluciones linealmente independientes podemos aplicar el teorema.

Según el teorema 1, la función $v(x) = (xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}$ será solución de la ecuación de segundo orden siguiente:

$$v'' + \left(3 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}\right) v' + \left(3 - \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2x}{x^2 - 2x + 2}\right) v = 0$$

Observemos que se tiene lo siguiente:

$$3 - \frac{x^2}{x^2-2x+2} = 3 - 1 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = 2 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

Antes de utilizar la fórmula de Abel para hallar la segunda solución se tiene que :

$$e^{-\int 3 - \frac{x^2}{x^2-2x+2}\,dx} = e^{-\int 2 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx} = \frac{e^{-2x}}{x^2-2x+2}.$$

Ahora bien, la segunda solución para esta última ecuación de orden dos es según la fórmula de Abel la siguiente:

$$v_2 = (1-x)e^{-x}\int \frac{\frac{e^{-2x}}{x^2-2x+2}}{(1-x)^2e^{-2x}}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-2x+2)(1-x)^2}.$$

Esta última integral la vamos a calcular por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2-2x+2}$$

Ahora bien

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \frac{1}{1-x},$$

y por otra parte

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \arctan(x-1).$$

En resumen, la segunda solución es dada por

$$v_2(x) = (1-x)e^{-x}\left(\frac{1}{1-x} - \arctan(x-1)\right) = e^{-x}(-(1-x)\arctan(x-1)).$$

De esto se concluye, integrando, una vez más, que sí se pudo encontrar tres soluciones linealmente independientes.

Referencias

[1] Nagle, R. Kent, Edward B. Saff y A. D. Snider, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, Pearson Educación, México, 2001.

[2] Simmons, George F., Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas, McGraw-Hill, Madrid, 1997.

[3] Simmons, George F., Steve G. Krantz, Ecuaciones Diferenciales: Teoría, técnica y práctica, McGraw-Hill, México, 2007.

[4] D. Somasundaram, *Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Florida, 2001

[5] Earl Rainville, and Phillip Bedient, *Elementary Differential Equations*, Seventh Edition, MacMillan, New York, 1991