¿Y si no se cumple,..., qué pasa? Reforzando conceptos matemáticos en futuros profesores de matemática para secundaria

SALAZAR, LORENA[I]

Costa Rica

Resumen

En este documento se presentan los resultados de una experiencia de aula en un curso de análisis real dirigido a futuros profesores de matemática de secundaria, donde se aplicó una secuencia de tareas diseñadas con el fin de que los estudiantes reforzaran conceptos matemáticos y a su vez, reflexionaran sobre la matemática y su futura labor profesional. En dichas tareas de les solicitó a los estudiantes, que realizaran omisiones o modificaciones en las hipótesis de teoremas y de algunos ejercicios, mediante una actividad dirigida a potenciar procesos mentales que llevaran a la comprensión de enunciados de teoremas y otros resultados. Se trata de una actividad de aula, en la que se les pide a los estudiantes ignorar alguna de las hipótesis y deducir o crear algún contraejemplo para la tesis del mismo. Y si no se cumple esta hipótesis.... qué pasa? Y si cambio esta otra,..... qué se puede concluir? Se lograron resultados positivos en los conocimientos matemáticos relacionados con la temática de continuidad en intervalos cerrados, y sobre su competencia de reflexión sobre las matemáticas.

Palabras clave: Funciones continuas, creación de problemas, diseño de tareas, educación matemática.

A. Introducción

La actividad reportada en este artículo, ¿Y si no ....., que pasa? , está basada en la estrategia de creación de problemas. Inicialmente fue propuesta por Brown y Walter (1990), con el nombre de "What if not?", con el fin de desarrollar estrategias para crear problemas en estudiantes talentosos de primaria. A partir de ahí, ha sido usada ampliamente como una estrategia didáctica en otros contextos matemáticos, en su mayoría en niveles de primaria y secundaria. Se propone aquí su uso como una fuente innovadora a usar en la formación inicial de profesores de matemática para secundaria, con una intención doble: lograr la asimilación de conceptos matemáticos, y a su vez que sea una estrategia a considerar en su futura labor docente.

La creación de problemas, no es algo nuevo, ya desde tiempos de Polya (1981), se mencionaba las fortalezas de inducir a el planteamiento de problemas en los estudiantes, como un medio poderoso para la resolución de los mismos, por un lado, y para formular otros problemas después de su solución, por otro lado. Malaspina (2013), señala que la invención de problemas, ayuda a la comprensión de los conceptos matemáticos y contribuye a realizar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas. Esto concierne a estudiantes que requieren una formación sólida en matemáticas, como lo son los futuros profesores de matemática para secundaria. Silver (1994) por su parte, reporta unos resultados, en los que trata de evaluar la creatividad y

[I]UCR-UNA, Costa Rica.

originalidad de los problemas planteados en un grupo de estudiantes, tomando en cuenta el número de problemas generalizados, el número de diferentes categorías de los nuevos problemas y la novedad de la solución propuesta. Es claro que al aplicar esta metodología de enseñanza en futuros profesores de matemática, se tiene un factor positivo a favor, y es la preparación matemática que ya tienen estos estudiantes, así como la habilidad y actitud hacia la matemática que traen inherente. Ellerton (1986) después de varios estudios, concluye que entre más habilidades matemáticas se tengan, mayor creatividad y originalidad se presentan en los problemas creados; este es el caso de estudiantes como los involucrados en esta experiencia. Sin embargo, Singer y Voica (2013) reportan una investigación con profesores sobre creación de problemas en la que consideraron tres aspectos: claridad, coherencia y originalidad, mostrando una carencia importante en esta competencia que deben tener los futuros docentes. Es por esto, que estas estrategias deben iniciarse en el aula, en la formación inicial de estos estudiantes. Aúnque se tengan estudiantes con ventajas en su formación matemática, esta metodología no le resta nada a la estrategia, al contrario, la tesis de esta investigación es que se puede utilizar estas ventajas, para lograr de forma más asertiva la asimilación de los conceptos matemáticos, y a la vez realizar una reflexión sobre la matemática y su enseñanza, de modo que en su futura labor docente puedan aplicar esta misma estrategia en sus propios estudiantes. De esta forma se puede lograr en una dualidad, la comprensión de los conceptos matemáticos a nivel de matemática superior, con toda la formalidad del caso, obteniendose el objetivo primordial de la enseñanza, que es lograr que el estudiante asimile el concepto matemático a profundidad; y por otro lado modelar una estrategia de enseñanza.

Las experiencias realizadas con los futuros profesores de matemática, usando esta estrategia, tomó más tiempo del que se ocupa con una enseñanza tradicional (donde el docente expone definición, teorema, prueba, en forma magistral y expositiva, con prácticamente nula intervención del estudiante, y con cero responsabilidad en su aprendizaje), pero se ha obtuvieron mayores resultados en cuanto a rendimiento académico y asimilación de los conceptos, como se describe a continuación. Al respecto, Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), señalan que la invención de problemas es una ventana para observar la comprensión matemática, ya que puede ser una herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos de los estudiantes y también mejora su disposición y actitudes hacia las matemáticas.

En los últimos tiempos, ha habido un auge en investigaciones tendientes a determinar las competencias que debe tener un profesor de matemática. Los formadores de docentes para educación media tenemos una gran responsabilidad en esta tarea. Al respecto, Rico (2004) señala que "la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es un tema a debate, que interesa a los profesores de matemáticas en ejercicio y a sus asociaciones, a los matemáticos profesionales, a los formadores de profesores, a los investigadores en Didáctica de la Matemática y a los responsables de la gestión universitaria". Al respecto, Rubio (2012) indica que para realizar la evaluación de la competencia matemática de sus alumnos, el futuro profesor debe tener, además de competencia matemática, competencia en el análisis de la actividad matemática. En este sentido, los cursos de matemática formal en los planes de estudio para formar profesores de matemática, deben revisarse. La exposición tradicional en donde se presenta la teoría en forma axiomática rigurosa, no es la mejor forma de presentarla, dado que los futuros profesores, repiten estos patrones o modelos de enseñanza en sus clases con los adolescentes de secundaria. Estemos de acuerdo o no, todo profesional que interviene en la formación inicial de estos profesionales, es un modelo de enseñanza. De ahí la importancia de realizar estudios de este tipo, de modo que se logre una dualidad, entre el lograr consolidar conocimientos matemáticos y a la vez modelar un tipo de enseñanza innovadora.

La estructura del artículo es la siguiente, después de esta introducción, se formula el objetivo de la investigación, a continuación se explica la metodología que se ha seguido para pasar, a continuación, a la descripción de la experiencia realizada. El artículo termina con unas consideraciones finales.

○ Objetivo

Valorar el efecto del uso de la actividad: ¿Y si no ....., que pasa?, como una estrategia didáctica en la formación inicial de profesores de matemática para secundaria, en la comprensión de teoremas de continuidad en intervalos cerrados y en su capacidad de reflexión matemática.

B. Metodología

Esta actividad se aplicó a estudiantes del curso de análisis de la Universidad Nacional de Heredia en el I ciclo del 2014. Este es un curso tradicional de análisis real, en donde se desarrolla los temas de sucesiones, límites, continuidad y derivabilidad, desde una óptica de matemática formal tradicional, caracterizada en general por ninguna relación con la matemática escolar y por una carencia de reflexiones didácticas sobre la actividad matemática. Es un curso que es parte de la carrera de Enseñanza de la Matemática, que forma profesores de matemática para educación media. En ella participaron 8 estudiantes de nivel de licenciatura, que corresponde al V año de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica.

Para la recolección de datos, se llevó un registro detallado en un diario donde se fue anotando todo lo ocurrido en el aula. Se recolectaron evidencias escritas por los grupos de trabajo y se les solicitó una valoración de la actividad realizada. Una semana después, se realizó una prueba específica escrita individual para evaluar la comprensión de los conceptos matemáticos. Se reportan aquí solo algunas de los problemas creados por los estudiantes. Se hace la aclaración de que este reporte no pretende ser una lección del tema de continuidad en intervalos cerrados, sino que lo que se pretende es evaluar la estrategia didáctica y su incidencia en la comprensión matemática de los teoremas. Algunos de ellos son ejemplos muy sencillos, inclusive podrían catalogarse de triviales, a los ojos de un matemático, pero para un estudiante que por primera vez conoce la materia, su creación es muy importante en su comprensión.

C. Desarrollo de la experiencia

El diseño de tareas propuestas, se usó el libro de texto, Bartle y Sherbert (2010), como parte de la tarea de comprensión de enunciados de teoremas. Además se les solicitó traer una laptop, en donde se bajó un graficador libre, en este caso winplot, paara que visualizaran las funciones creadas. La actividad incluye definiciones, teoremas y ejercicios del libro texto, referidos a los teoremas clásicos de continuidad en intervalos cerrados. El tipo de tareas incluidas en la actividad se detallan a continuación.

Tipología de tareas

- Comprensión de definiciones
- Omisión de las hipótesis de teoremas
- Variaciones en las hipótesis
- Creación de contraejemplos
- Creación de problemas

El contexto de trabajo es intra-matemático, con trabajo en grupos de 2 personas, dado que la cantidad de estudiantes lo permitía. La docente tuvo la oportunidad de sentarse con cada grupo, integrarse al grupo como una mediadora y evaluar su trabajo. Se inició con el siguiente teorema.

Teorema de acotabilidad

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces f está acotada en I.

Lo primero que se les solicitó hacer fue revisar cada uno de los conceptos mencionados en el teorema. Se les pidió además que expresaran cada concepto usando sus propias palabras. Los estudiantes tienden a memorizar definiciones y conceptos, pero en realidad no todos comprenden a profundidad su significado. En este caso, la mayoría repitió, de forma correcta la definición de acotabilidad de una función.

Definición. Una función f se dice que está acotada alrededor de $x = c$ si $\exists M > 0$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in]c - \delta, c + \delta[$.

Sin embargo, algunos estudiantes mostraron que aún no comprendían el concepto "localmente", ni el porqué de la existencia de delta. Como docente nunca se debe asumir algún concepto matemático como comprendido, no se puede trivializar nada, en realidad, es siempre mejor repasar conceptos antes de enunciar un teorema.

Inmediatamente se les solicitó ignorar cada una de las hipótesis del teorema. ¿Y qué pasa si ...no...? Todos los grupos lograron ir negando cada hipótesis.

Lo primero que concluyeron, fue que si no se cumple alguna de las hipótesis, entonces no se cumple la tesis. ¿Seguros? Ellos mismos crearon algunos contraejemplos.

- Si $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$. ¿Es acotada? Claro que si lo es, de hecho $M = 2$ es una cota. Así que se tiene una función que no cumple una de las hipótesis, pero sí se cumple la tesis.
- Si $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función parte entera $f(x) = [|x|]$ es discontinua pero acotada, como puede verse en la figura adjunta.

Figure 73: Gráfica de $f(x) = [|x|]$

- $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ es un ejemplo de una función discontinua no acotada.

  Importante es señalar que ellos mismos empezaron a hacerse otras preguntas a raíz del ejemplo de

  $$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}.$$

  La discontinuidad ocurre porque en hay una asíntota vertical, ¿y qué pasa si quitamos del intervalo? ¿Será ahora acotada? En este tipo de actividad, el papel del docente debe ser devolverles la pregunta, que sean ellos mismos que se contesten, de modo que se les pidió que la graficaran.

Figure 74: Gráfica de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

- $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x+1$, si $x \neq 1$, $f(1) = 0$. Este es un ejemplo de una función discontinua, no se cumplen las hipótesis pero si se cumple la tesis.

- $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \tan x$. La función no es acotada.

Figure 75: Gráfica de $f(x) = \tan x$.

- $f :]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. La función tampoco es acotada.

Continuando con la actividad, otro de los grupos se hizo las siguientes preguntas.

Figure 76: Gráfica de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

La actividad los hace reflexionar sobre detalles, que en otras ocasiones pasaban desapercibidas. Los estudiantes mismos expresaron que en realidad se puede rescatar algo, dependiendo del tipo de discontinuidad, que se tenga. Por lo que surgieron más contraejemplos, muy sencillos, pero con gran aceptación por los estudiantes, pues fueron sus propias creaciones, y no se les dieron hechos, como se hace en la mayoría de los casos.

- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2$, si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 0.$. Esta función tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$, pero sigue siendo acotada.
- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2$, $f(x) = 1$, si $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Esta función tiene una discontinuidad de salto, pero es acotada.
- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$. Esta con una discontinuidad infinita en por lo que no es acotada.

Superada la primera etapa, se les presentó el segundo teorema. Análogamente al teorema anterior, se les pidió primero que repasaran los conceptos involucrados en el teorema, en este caso la definición de máximo y mínimo absoluto, en contraste con los extremos relativos.

Teorema del máximo-mínimo

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces f tiene máximo y un mínimo absoluto em I.

Nuevamente los estudiantes iniciaron con las negaciones de las hipótesis.

Algunos de los problemas creados por los estudiantes son los siguientes.

- Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 1$, la cual cumple con las hipótesis del teorema y tiene su máximo en $x = 1$ y su mínimo absoluto en $x = 0$. Pero si abrimos el intervalo a $f :]0, 1[$ ya la función no tiene máximo ni mínimo en $]0, 1[$.
- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, definida en el intervalo de $[1, \infty[$, tiene máximo absoluto pero no tiene mínimo en el intervalo no acotado $[1, \infty[$.

Figure 77: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Sea $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)$ definida en el intervalo $[-1, 3]$. El mínimo absoluto se obtiene en y su máximo absoluto en $x = 3$, pero si se toma el intervalo $[-1, 3[$, la función no tiene máximo absoluto, como se puede observar en la figura 78.

Teorema

Figure 78: Gráfica de $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$.

Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Si $a, b \in I$ que satisface $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = 0$.

Se muestran a continuación algunos de los contraejemplos creados por los estudiantes.

- Sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ en el intervalo $[-1, 3]$. La función no tiene ninguna raíz.

Figure 79: Gráfica de $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo de $[0, \pi]$ y $f(x) = 2$ en el intervalo de $(\pi, 2\pi]$. . La función no es continua, pero aún así se cumple la hipótesis.

Figure 80: Se cumple la tesis del teorema localización de raíces.

Teorema

Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Si $a, b \in I$ y $k \in \mathbb{R}$ satisface $f(a) < k < f(b)$, entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = k$.

Continuando con el teorema de valores intermedios, ya los estudiantes estaban muy positivos por los logros alcanzados con los teoremas anteriores, y la dinámica se tornó más rápida. Al omitir la hipótesis de continuidad en un intervalo cerrado, los estudiantes crearon algunos contraejemplos, como puede verse a continuación.

- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$, si $0 < x < 1$ y $f(0) = 4, f(1) = 6$. Es claro que $f(0) < 5 < f(1)$, pero no existe ningún valor de $x = c$ tal que $f(c) = 5$. (Ver figura 81).
- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$, si $0 < x < 1$ y $f(0) = 1, f(1) = 3$. Es claro que $f(0) < 1.5 < f(1)$, pero no existe ningún valor de $x = c$ tal que $f(c) = 1.5$.(Ver figura 82).
- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 1$, si $0 < x < 1$ y $f(0) = 0, f(1) = 3$. Es claro que $f(0) < 0.5 < f(1)$, pero no existe valor de $x = c$ tal que $f(c) = 0.5$. (Ver figura 83).

A esta altura de la actividad, los estudiantes ya se percataron que muchos de los contraejemplos creados, también pueden ilustrar que la tesis no se cumple, si se omite alguna de las hipótesis, por lo que solo repitieron.

Teorema

Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces el conjunto $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo cerrado y acotado.

Figure 81: No se cumple el teorema del valor intermedio.

Figure 82: No se cumple el teorema del valor intermedio.

- Sea $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ en el intervalo $[-4,4]$. La función alcanza un máximo pero no un mínimo en este intervalo. Tampoco es acotada, no cumple el teorema de valores intermedios, y el conjunto imagen no es un intervalo.(Ver figura 84).

Figure 83: No se cumple el teorema del valor intermedio.

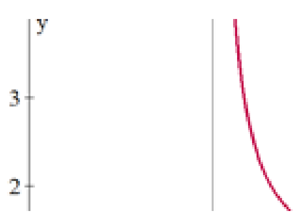

Figure 84: Gráfica de $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

D. Consideraciones Finales

La actividad resultó altamente positiva en cuanto a la comprensión de los teoremas de continuidad en intervalos cerrados y acotados. En semestres anteriores donde la docente expuso los mismos temas, pero con la metodología tradicional, no hubo resultados tan altos en cuanto a rendimiento académico en la evaluación de los mismos temas. Los estudiantes se mostraron entusiastas, y cada descubrimiento con la creación de alguno de los contraejemplos, les reafirmó los detalles y sutilezas envueltas en las hipótesis. Por otro lado, se dieron cambios de conducta en algunos de los estudiantes, en los temas siguientes, iniciaron a cuestionarse las hipótesis de otros teoremas, mejorando la comprensión de los mismos. La actitud ante las pruebas de estos teoremas mejoró significativamente, pues tenían muy claro la omisión de alguna de las hipótesis. Por otro lado, después de la actividad, se les asignaron lecturas sobre planteamiento de problemas, para desarrollar y relacionar con su futura labor profesional.

Es importante realizar este tipo de actividades, pues resulta un cambio de actitud ante la matemática y su formalidad. Se recalca lo mencionado en la introducción: se deben incluir innovaciones en la forma de presentar la matemática a los futuros profesores, dado que existe una tendencia a la repetición de estos patrones o modelos de enseñanza en sus futuras clases de matemática. Estemos de acuerdo o no, todo profesional que interviene en la formación inicial de estos profesionales, es un modelo de enseñanza.

Referencias

[1] Bartle, R. y Sherbert, D. (2004). Introducción al análisis matemático de una varaible. México: Limusa.

[2] Espinoza, J, Lupiañez, J y Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. Revista digital Matemática, Educación e Internet. Vol 14, Marzo 2014.

[3] Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process, en C. Margolinas (Ed.), Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, (Vol. 1, 581-590). Oxford: ICMI.

[4] Malaspina, U. (2013). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. Unión, 35, 135-143.

[5] Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado, 8 (1).

[6] Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

[7] SangHun S, H et al. (2006). Possign problems with use the ?what if not?? Strategy in NIM game. Jouenal of Educational Research in Mathematics. Korea.