

#### **4.2.4. Análisis de gráficas de funciones y su incidencia en la interpretación del fenómeno en estudio**

**Leonardo Damián Sandoval**, Universidad Nacional de Jaén, Jaén, Perú

**Lenin Quiñones Huatangari**, Universidad Nacional Toribio Rodríguez de Mendoza de Amazonas, Amazonas, Perú

**Juan C. Damián Sandoval**, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

#### **Resumen**

*Esta investigación se centró en el análisis de los aciertos y dificultades que los estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Nacional de Jaén mostraron al realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en los diferentes registros de representación semiótica del objeto función real de variable real. Se utilizó como marco teórico la Teoría de Representación Semiótica propuesta por Raymond Duval y con respecto a la metodología, se consideró algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue. Con respecto a la experimentación y análisis se elaboró y aplicó un cuestionario exploratorio compuesto de seis situaciones, estas fueron elaboradas con el propósito de que los estudiantes apliquen sus conocimientos básicos de matemática traídos de la educación básica. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes tiene dificultades al hacer el tratamiento y conversión de registros de representación semiótica, esto se evidencia en la situación N°1 donde los estudiantes no lograron la conversión del registro gráfico al registro algebraico, así mismo en las situaciones N°5 y N°6 los estudiantes no lograron realizar el tratamiento y la conversión de los distintos registros de representación semiótica.*

#### **I. Introducción**

Dentro de la formación básica de un estudiante universitario en ciencias o ingeniería, juega un papel muy importante los conocimientos sobre matemática. Sin embargo, en la actualidad el aprendizaje de los estudiantes es diferente a la de hace quince o veinte años, debido a diversos factores, por ejemplo, el modo en que acceden al conocimiento. Por lo tanto, es imprescindible manejar tanto las metodologías como las teorías didácticas modernas de enseñanza aprendizaje, y la Matemática no escapa de este diagnóstico. Por ello, se requiere un cambio de enseñanza en el sistema universitario, en particular en los docentes que enseñan Matemática para ciencias e ingeniería, se requiere que tomen

conciencia y reflexionen en torno a la implementación de innovaciones metodológicas y pedagógicas en el aula, acordes a estos cambios (Malaspina, 2012).

La teoría de los registros de representación semióticos de Raymond Duval es una teoría que permite estudiar fenómenos para el desarrollo del pensamiento matemático, uno de los principales supuestos es que la actividad matemática se apoya en el empleo de diversas representaciones semióticas las cuales se organizan en torno a registros de representación; su estudio permitirá comprender la complejidad de la actividad matemática ya que en ella se realizan constantes transformaciones en el mismo registros y entre registros. (Duval)

La ingeniería didáctica, como metodología de investigación se caracteriza: primero por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en la clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, y segundo por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori, lo que se planificó, y a posteriori, lo que realmente sucedió (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., 1995).

El presente trabajo surge del interés de analizar cómo se produce la comprensión de la noción de función, a través de sus diversos tipos de representación semiótica. Además, por las dificultades que presentan los estudiantes en el primer año de estudios universitarios para resolver problemas sobre funciones. La investigación tuvo como objetivo realizar el diagnóstico sobre el nivel de análisis e interpretación de gráfica de funciones en los estudiantes del primer ciclo de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, se analizó y valoró los resultados basados en las teorías de los registros de representación semiótica de Raymond Duval y la metodología de la ingeniería didáctica respectivamente.

## **II. materiales y métodos**

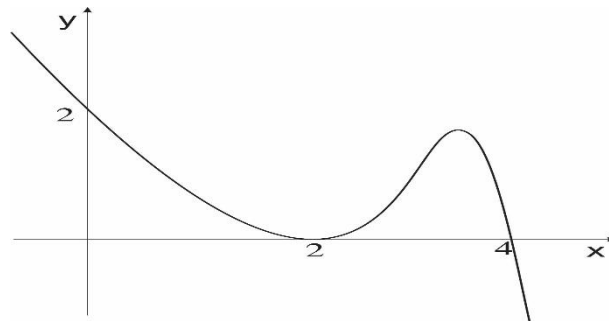
La población que se ha considerado para la presente investigación, está representada por los estudiantes del primer ciclo 2016-I de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del curso de Matemática Básica, de la Universidad Nacional de Jaén que representan un total de 39 estudiantes.

Para la recolección de información se diseñó y validó un cuestionario de exploración compuesto de cuatro situaciones, estas fueron tomadas y validadas de los textos de (Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S., 2012), (Zill, D. y Wright, W. , 2011) (Lages, 1998),

(Larson, R. y Edwards, B., 2010), (Duval), (Flores, J. y Ugarte, F. , 2016), (Arce, M. y Ortega, T., 2013), (Guzman, 1998) y (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., 1995). Las situaciones planteadas permitieron extraer información de las ideas de los estudiantes al analizar el cambio de los distintos registros de representación de las funciones a través de sus gráficas. En seguida se realiza el análisis a priori de cada situación planteada.

### SITUACIÓN N°1

A continuación se muestra la gráfica que corresponde a un polinomio  $P(x)$  de grado 3.



1. Con la información presentada en la gráfica halle:
  - i. Para qué valores de  $x$  las imágenes  $P(x)$  del polinomio son positivas.
  - ii. Para qué valores de  $x$  las imágenes  $P(x)$  de polinomio son negativas.
  
2. Halle el polinomio  $P(x)$ .

En esta situación se quiere investigar ¿cómo realizan la conversión del registro gráfico al algebraico de una función polinomial de tercer grado, dada? específicamente se espera que los estudiantes identifiquen en el mismo gráfico cuando una función es positiva o negativa, y que con los puntos dados en el gráfico puedan obtener la expresión algebraica de la función polinomio de grado tres.

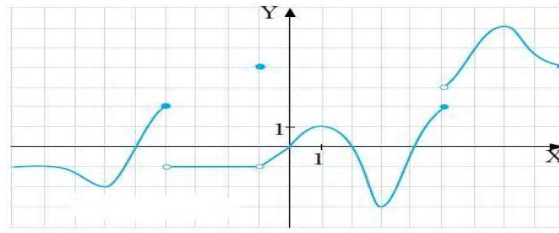
En la **pregunta 1** se quiere que el estudiante realice la conversión del registro gráfico al algebraico identificando que la función es positiva si  $f(x) > 0$ , para

$x \in \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$ , y la función es negativa si  $f(x) < 0$ , para  $x \in \langle 4, +\infty \rangle$ , que identifique los intervalos del eje  $x$  donde la gráfica está en el primer y segundo cuadrante para la parte 1.i y para 1.ii respectivamente, se requiere que identifique los intervalos donde la gráfica está en el tercer o cuarto cuadrante, o que al menos realice un tratamiento en el mismo registro gráfico, marcando sobre la gráfica donde la función es positiva o negativa. En este caso se pueden presentar algunas dificultades debido a que no es lo mismo identificar algunos puntos  $x_0$  para el cual la función es positiva o negativa, que identificar los intervalos para  $\mathcal{X}$  en el cual la función es positiva o negativa. Esto quedará evidenciado cuando los estudiantes realicen la conversión entre registros.

En la **pregunta 2** se requiere que los estudiantes a partir de los interceptos de la gráfica con el eje  $x$ , en los puntos  $2,0$  y  $4,0$ , y con el eje  $y$  en el punto  $0,2$ , determinen la representación algebraica de la función polinomial de grado tres con coeficiente principal diferente de 1. Deben analizar que para usar la representación general  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  deberán conocer cuatro puntos sobre la gráfica, no necesariamente interceptos con los ejes coordenados, también puede usar la representación  $f(x) = m(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$  cuando se conocen tres raíces diferentes y otro punto cualquiera en la gráfica. Como los anteriores no es el caso, deben considerar la representación  $f(x) = m(x-r_1)^2(x-r_2)$  ya que la gráfica dada presenta sólo dos interceptos con el eje  $x$  y uno con el eje  $y$ , es decir el estudiante debe tener en cuenta que la función presenta una raíz de multiplicidad dos, y un intercepto con el eje  $y$ . Para lograr su objetivo deben hacer la conversión del registro gráfico al registro tabular y luego del registro tabular al registro algebraico, o pueden hacer directamente la conversión del registro gráfico al algebraico.

## SITUACIÓN N°2

La figura muestra la gráfica de la función  $y = f(x)$ .



Con la información presentada en la gráfica:

1. Encontrar:  $f(-4)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(6)$ .
2. ¿Para qué números  $x$  es  $f(x) = 0$ ?
3. ¿Cuál es el dominio de  $f$ ? ¿Cuál es el rango de  $f$ ?
4. ¿Cuáles son los intersecciones con el eje  $x$ ?
5. ¿Para qué números de  $x$  es  $f(x) > 0$ ?
6. ¿Encuentre los intervalos de crecimiento de  $f$ ?
7. ¿Encuentre los intervalos de decrecimiento de  $f$ ?
8. ¿Encuentre el (los) intervalo (s) donde la función es constante?
9. ¿Encuentre los valores máximos y mínimos de  $f$ ?

En esta situación se presenta la gráfica de una función seccionada y se espera que los estudiantes tengan conocimientos básicos para analizar e interpretar la gráfica de la función real de variable real, contestando correctamente las preguntas propuestas, a partir de algunos puntos dados sobre el gráfico. Para esto deberán hacer la conversión del registro gráfico al registro numérico y luego del registro numérico al analítico.

Específicamente se espera que los estudiantes identifiquen: valores numéricos, intersección con los ejes de coordenadas, dominio y rango, intervalo o puntos donde la función es positiva, intervalos de monotonía y valores relativos.

En la **pregunta 1** se requiere que los estudiantes identifiquen los valores numéricos  $f(-4)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$  y  $f(6)$  con los pares ordenados  $(-4,2)$ ,  $(-1,4)$ ,  $(0,0)$  y  $(6,5)$ , sin ningún inconveniente. Esto pretende que los pares ordenados en la gráfica de la forma  $(x_0, y_0)$  lo deberán identificar con el par ordenado  $(x_0, f(x_0))$  que arrojará el valor numérico deseado  $f(x_0) = y_0$ . Aquí se presenta un fenómeno de congruencia trivial (se da en el mismo registro) entre el par ordenado  $(x_0, y_0)$  y el par ordenado  $(x_0, f(x_0))$ , esta congruencia le proporcionará al estudiante encontrar los valores pedidos.

En la **pregunta 2** se requiere que los estudiantes identifiquen el valor numérico  $f(x) = 0$  con el par ordenado  $(x_0, 0)$  y que a su vez deberá identificar con los valores  $x_0 = -5, 0, 2$  y  $4.1$  que son los intercepto de la gráfica con el eje  $x$ . Aquí se presenta un fenómeno de congruencia trivial entre el par ordenado  $(x_0, 0)$  y el valor  $x_0$ . Pueden que se presente algunas dificultades al hacer este cambio de registro.

En la **pregunta 3** se requiere que los estudiantes identifiquen el recorrido de la variable independiente  $x$  y la variable dependiente  $y = f(x)$  sin ningún inconveniente, es decir, identifique el intervalo  $(-\infty, 9]$  que representa el dominio de la función y el intervalo  $[-3, 2] \cup (3, 6]$  que representan rango de la función. Esta identificación está adjunta al cambio del registro gráfico al algebraico.

En la **pregunta 4** se espera que los estudiantes identifiquen los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje  $x$ , de la misma forma como se hicieron en la pregunta 2 de acuerdo a su respuesta estos deben ser  $(-5, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(4.1, 0)$ . Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la pregunta 2 y la pregunta 4.

En la **pregunta 5** se espera que los estudiantes puedan identificar las propiedades de cuando una función es positiva, es decir a partir de los pares ordenados  $(x_0, y_0)$  que se localizan en el primer y segundo cuadrante identifiquen que los valores de  $f(x_0)$  son positivos.

Para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como lo hicieron en la pregunta 1.

En la **pregunta 6** se espera que los estudiantes identifiquen los intervalos de crecimiento  $[-6, -4]$ ,  $(-1, 1]$  y  $[3, 7]$ . Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de crecimiento con el hecho de que la gráfica sube.

En la **pregunta 7** se espera que los estudiantes identifiquen los intervalos de decrecimiento  $(-\infty, -6]$ ,  $[1, 3]$  y  $[7, 9]$ . Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de decrecimiento con el hecho de que la gráfica baja.

En la **pregunta 8** se espera que los estudiantes identifiquen el intervalo donde la función es constante  $] -4, -1[$ . Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de función constante con el hecho de que la gráfica no sube ni baja.

En la **pregunta 9** se espera que los estudiantes identifiquen el mayor valor y el menor valor en la gráfica de  $f$ , es decir, deberán identificar el punto más alto de la gráfica  $(7, 6)$  con el valor numérico  $f(7) = 6$  y el punto más bajo de la gráfica  $(3, -3)$  con el valor numérico  $f(3) = -3$ , estos valores numéricos  $f(7) = 6$  y  $f(3) = -3$  representan el máximo y mínimo valor de la gráfica de la función  $f$ .

### SITUACIÓN N°3

La tarifa de energía eléctrica es de S/ 0.49 por cada kWh hasta los primeros 200 kWh. Luego, por cada kWh adicional por encima de los 200, la tarifa es de S/ 0.58.

1. Si se consume 250 kWh en un mes, cuál es el pago mensual.

2. Si en la UNJ se consume  $x$  kWh en un mes, exprese algebraicamente el pago  $P(x)$  por consumo de energía eléctrica en función de  $x$ .
3. Graficar la función obtenida en 2.
4. Hallar el pago del recibo del mes de junio en la UNJ si el consumo es de 2481 kWh.

En esta situación, se espera que los estudiantes comprendan el problema contextualizado, poniendo en juego sus capacidades de interpretación, describir y conjeturar gráficamente situaciones descritas de la vida real.

En la **pregunta 1** se espera que los estudiantes realicen el cálculo de acuerdo a la información dada sin ninguna dificultad.

En la **pregunta 2** se espera que los estudiantes con la información dada, puedan expresar la forma analítica de la función que representa a la mencionada situación. Esto se verá plasmado cuando los estudiantes respondan a esta pregunta.

En la **pregunta 3** se espera que los estudiantes no tengan dificultad en construir la gráfica de la función obtenida en la pregunta 2 o independiente de está, para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como el caso anterior.

En la **pregunta 4** se espera que los estudiantes realicen el cálculo de acuerdo a la información dada o reemplazando los datos en la expresión analítica obtenida en la pregunta 2, sin ninguna dificultad. Para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como lo hicieron en la pregunta 1

#### SITUACIÓN N°4

Durante una colisión, la fuerza  $F$  (en newton) que actúa sobre un objeto varía con el tiempo  $t$  de acuerdo con la ecuación  $F = 87t - 21t^2$ , donde  $t$  está dado en segundos.

1. ¿Para qué valor de  $t$  se obtiene una fuerza máxima?
2. ¿Cuál fue el valor máximo de la fuerza?



### 3. Graficar la función $F$ .

En esta situación, se espera que los estudiantes tengan conocimientos básicos de función cuadrática y recuerde que su representación gráfica es una parábola.

En las **preguntas 1 y 2** se espera que los estudiantes completen cuadrados en la expresión dada para obtener una expresión de la forma  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  y a partir de esto identificar el vértice  $(h, k)$  lo cual daría respuesta a lo pedido de estas dos preguntas, también puede que los estudiantes puedan encontrar los valores del vértice usando las siguientes expresiones  $h = \frac{-b}{2a}$  y  $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ , donde estas expresiones son resultados de realizar un tratamiento en el mismo registro analítico o algebraico. Esto se verá plasmado cuando los estudiantes respondan a estas preguntas.

En la **pregunta 3** se espera que los estudiantes recuerden que la gráfica de la función presentada es una parábola y reconociendo el vértice con el coeficiente principal de dicha función no tendrá dificultad de construir la mencionada gráfica. Esto se verá modelado cuando los estudiantes respondan a esta pregunta.

## III. Resultados

Aquí se hace el análisis a posteriori de cada situación planteada, clasificando las respuestas descritas por los estudiantes en: respuestas correctas, incorrectas y abstenciones. Se considera que una respuesta es correcta cuando está conforme con la teoría científica, incorrectas es aquella que es diferente a la teoría científica y abstención es la pregunta que no ha sido respondida por el estudiante, a esta última se le da esa jerarquía por que la solución a cada pregunta fue voluntaria

### Análisis de la situación N°1:

En general, con relación al cambio de registro de representación gráfica al numérico y luego del registro gráfico al registro algebraico, se observó que: en la **pregunta 1.i.** el 5.13% de los estudiantes pudieron determinar los intervalos pedidos, es decir, que identificaron los valores donde la función es positiva o que están en el primer y segundo cuadrante. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio

del registro gráfico al algebraico. Mientras que el 64.10% de los estudiantes no pudo ser la conversión del registro gráfico al registro analítico, esto significa que algunos dieron como respuesta valores enteros positivos del eje de la abscisa y otros el semieje positivo que lo representaron por  $x > 0$ , otros estudiantes redactaron que si la gráfica del polinomio está a la derecha del eje  $\mathcal{Y}$  es positiva, mientras que otros dieron como respuestas algunos intervalos donde la función es positiva como por ejemplo  $(0, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(0, 4)$  etc., y que 30.77% se abstuvo a responder.

En la **pregunta 1.ii** el 5.13% de los estudiantes pudieron determinar los intervalos pedidos, es decir, que identificaron los valores donde la función es negativa o que están en el tercer y cuarto cuadrante. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio del registro gráfico al algebraico. Mientras que el 61.54% de los estudiantes no pudo hacer la conversión del registro gráfico al registro analítico, algunos estudiantes dieron como respuesta valores negativos del eje de la abscisa y otros lo representaron por  $x < 0$ , otros estudiantes redactaron que si la gráfica del polinomio está a la izquierda del eje  $\mathcal{Y}$  es negativa, mientras que algunos dieron como respuestas solo algún intervalo que no cumple con la condición como por ejemplo  $(-\infty, -1]$ , y el 33.33% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 2**, ningún estudiantes llevo a obtener correctamente la expresión algebraica de la función polinomio de grado tres, esto se debió a que, de los 51.28 % de estudiantes que respondieron consideraron la expresión algebraica de la forma  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  y su dificultad fue hallar los coeficientes ya que identificaron sólo tres puntos como pares ordenados, de acuerdo la teoría de cambio de registros, significa que estos estudiantes no tomaron en cuenta las raíces y su multiplicidad para ser el cambio del registro gráfico al algebraico. Mientras que el 48.72% se abstuvo de responder.

En conclusión, en esta situación, la mayoría de los estudiantes que respondieron a las preguntas, no realizaron correctamente la conversión entre registros de representación como se planificó en el análisis a priori.

## Análisis de la situación N°2

En general, con relación al cambio de registro de representación gráfica al numérico y luego del registro numérico al registro algebraico, se observó que: en la **pregunta 1** el 23.08% de los estudiantes pudieron identificar los valores pedidos, es decir pudieron identificar los valores de  $f(-4)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$  y  $f(6)$  con los pares ordenados  $(-4,2)$ ,  $(-1,4)$ ,  $(0,0)$  y  $(6,5)$ , sin ningún inconveniente. Esto nos muestra que los estudiantes no tienen dificultad al momento de identificar los pares ordenados en la gráfica de la forma  $(x_0, y_0)$  con los pares de la forma  $(x_0, f(x_0))$ , así esta identificación permite obtener el valor numérico requerido  $f(x_0) = y_0$ . De acuerdo con la teoría de registros se dice que hay una correspondencia entre  $(x_0, y_0)$  con  $(x_0, f(x_0))$ , y que la conversión es trivial. Esta correspondencia es llamada de congruencia. Por otro lado, se observó que el 53.85% presentaron dificultades para determinar los valores numéricos y el 23.08% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 2** se observó que el 12.82% de los estudiantes lograron identificar el valor numérico  $f(x) = 0$  con los pares ordenados  $(-5,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  y  $(4.1,0)$  que a su vez lo identificaron con los valores  $x \in \{-5, 0, 2, 4.1\}$ . Según las respuestas ninguno dejó constancia que esto equivale hallar los interceptos de la gráfica con el eje  $x$  o interceptar la recta horizontal  $y = 0$  con la gráfica de  $f$ . Por otro lado, el 53.85% presentaron dificultades para obtener los valores de  $x$  para el cual  $f(x) = 0$  y el 33.33% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 3** se observó que el 7.69% de los estudiantes identificaron el recorrido de la variable  $x$  y la variable dependiente  $y = f(x)$  sin ningún inconveniente, es decir, identificó los intervalos  $(-\infty, 9]$  que representa al dominio y  $[-3, 2] \cup (3, 6]$  que representan el rango de la gráfica de la función, esto muestra que este grupo de estudiantes pueden ser el cambio del registro gráfico al analítico como se planificó en el análisis a priori. Mientras que el 38.46% tuvieron dificultades al representar el dominio y rango de la función mostrada gráficamente y el 53% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 4** se observó que el 17.95% de los estudiantes no tuvieron dificultad de identificar los puntos de intersección de la gráfica con el eje  $x$ , pensamos que, lo hicieron de la misma forma como en la pregunta 2 y así llegaron a sus respuesta  $(-5, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(4.1, 0)$ . En términos de la teoría de registros significa que los estudiantes hacen el cambio de registro como se planifico en el análisis a priori. Mientras que el 48% de los estudiantes presentaron dificultades, puesto que tuvieron las mismas dificultades como en la pregunta 2, y el 33.33% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 5** se observó que ningún estudiante pudo identificar a partir de la gráfica los intervalos donde la función es positiva, esto en la teoría de registro el estudiante no hace correctamente el cambio de registro gráfico al analítico, de los 64.10 % que respondieron incorrectamente se puede observar que algunos estudiantes identificaron pares ordenados que están en el primer cuadrante pero no fue suficiente como para dar una respuesta correcta los intervalos como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una dificultad fue, por la forma como se redactó la pregunta ya que quizás pensaron valores de  $x$  como puntos aislados y no como intervalo. Finalmente, el 35.9% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 6** se observó que sólo el 7.69% de los estudiantes no tuvo dificultad para identificar los intervalos de crecimiento  $[-6, -4]$ ,  $(-1, 1]$  y  $[3, 7]$ . Esto significa en término de la teoría de registro el estudiante puede hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de crecimiento con el hecho de que la gráfica sube. Esta afirmación está basada en que el estudiante ha remarcado la gráfica indicando a donde la función crece. Lo que no se aprecia en las respuestas es que el estudiante haya deducido el crecimiento a partir de la definición de función creciente. Por otro lado, el 48.72% de los estudiante no respondieron como se planifico en el análisis a priori, pensamos que una de las dificultades es, los estudiantes tiene la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados desde donde empieza a subir la gráfica (puntos abajo) hasta donde deja de subir (punto arriba), otros estudiantes identifican los pares ordenados y los escriben por ejemplo; la gráfica crece : de  $(-5, -2)$  a  $(-4, 2)$ ,  $[(-5, -2), (-4, 2)]$ , o  $\{-5, 2\}$ , esto en la teoría de intervalo no está de acorde

con la definición científica, de acuerdo a la teoría de registro el estudiante tiene la noción cuando crece o sube la gráfica, pero esto lo hacen en el mismo registro gráfico, esto significa que tienen dificultad al hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Mientras que el 43.59 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 7** se observó que el 5.3% de los estudiantes no tuvo dificultad para identificar los intervalos de decrecimiento  $(-\infty, -6]$ ,  $[1, 3]$  y  $[7, 9]$ . Esto significa en término de registro el estudiante puede hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de decrecimiento con el hecho de que la gráfica baja. Esta afirmación está basada en que el estudiante ha remarcado la gráfica indicando a donde la función decrece. Lo que no se aprecia en las respuestas es que el estudiante haya deducido el decrecimiento a partir de la definición de función decreciente. Por otro lado, el 41.03% de los estudiantes no respondieron como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una de las dificultades es que, los estudiantes tienen la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados desde donde empieza a bajar la gráfica (punto arriba) hasta donde deja de bajar (punto abajo), los mismos estudiantes de la pregunta 6 identifican los pares ordenados y los escriben de forma análoga como lo hicieron en la pregunta 6. Mientras que el 53.85 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 8** se observó que el 33.33% de los estudiantes no tuvo dificultad para identificar el intervalo donde la función es constante  $] -4, -1[$ . Esto significa en término de registro el estudiante puede hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de función constante con el hecho de que la gráfica no sube ni baja. Esta afirmación está basada en que el estudiante ha remarcado la gráfica indicando a donde la función es constante. Lo que no se aprecia en las respuestas es que el estudiante haya deducido donde la función es constante a partir de la definición de función constante. Por otro lado, el 35.90% de los estudiantes no respondieron como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una de las deficiencias es, los estudiantes tienen la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados desde donde empieza la gráfica como recta horizontal hasta donde termina, los mismos estudiantes que respondieron la pregunta 6 identifican los pares ordenados y los escriben de forma análoga

como lo hicieron en la referida pregunta. Mientras que el 30.77 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 9** se observó que el 20.51% de los estudiantes identificó el mayor valor y el menor valor en la gráfica de  $f$ , es decir, identificaron el punto más alto de la gráfica  $(7,6)$  con el valor numérico  $f(7)=6$  y el punto más bajo de la gráfica  $(3,-3)$  con el valor numérico  $f(3)=-3$ , estos valores numéricos  $f(7)=6$  y  $f(3)=-3$  representan el máximo y mínimo valor de la gráfica de la función  $f$ . Algunos de estos estudiantes simplemente anotaron los valores 6 y -3. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio del registro gráfico al analítico. Mientras que el 33.33% de los estudiantes no respondieron como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una de las dificultades es, los estudiantes tienen la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados, pero no representaron el valor máximo como la altura máxima en la gráfica de acuerdo con la definición de valor máximo, de forma análoga sucede para valor mínimo. Por otro lado, el 46.15 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En conclusión, en esta situación, la mayoría de los estudiantes que respondieron a las preguntas, tiene dificultad en la conversión de registro, esto se evidencia cuando quiere pasar del registro gráfico al numérico como al registro algebraico.

### **Análisis de la situación N°3**

En general, con relación al cambio de registro de representación verbal al registro numérico y luego al algebraico, en la **pregunta 1**, se observó que el 51.28% de los estudiantes no tuvo dificultad en identificar las variables que intervienen en la situación y diferencian el costo de cada kWh de acuerdo al consumo, en términos de la teoría de registro estos estudiantes realizaron en forma apropiada el cambio de registro verbal al numérico. Por otro lado, el 38.46% de los estudiantes presentaron dificultad para encontrar el pago de los 250 kWh, pensamos que se debe a que realizaron una lectura poco analítica e interpretativa del enunciado. Mientras que el 10.26% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 2**, se observó que el 2.56% de los estudiantes no tuvo dificultad en el cambio de registro del verbal al algebraico, esto significa que expuso el pago mensual de consumo como una función seccionada. Por otro lado, el 64.10% de los estudiantes tuvo

dificultad en el cambio de registro, esto se evidencia ya que los estudiantes tienen dificultad en generalizar el número de kWh estos sólo hacen el cálculo con valores numéricos, mientras que el 10.26% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 3**, se observó que ningún estudiante realizó en forma correcta la gráfica que modele al problema contextualizado, en términos de la teoría de registro, los 51.28% de los estudiantes que respondieron a esta pregunta no lograron hacer el cambio de registro del algebraico al gráfico, notamos que esto se debe, a la forma algebraica encontrada en la pregunta 2 para la función  $P(x)$ . Por otro lado, el 48.72% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 4**, se observó que el 33.33% de los estudiantes no tuvo dificultad en encontrar el valor pago por consumo indicado como lo hicieron en la pregunta 1, se evidencia que los estudiantes realizaron el cálculo independiente de la función obtenida en la pregunta 2. Por otro lado, el 35.90% de los estudiantes tuvieron la dificultad para responder a la pregunta, esto se evidencia que en su mayoría de estos realizaron una lectura poco analítica e interpretativa del enunciado, mientras que el 30.77% se abstuvo de responder.

En conclusión, en esta situación, la mayoría de los estudiantes que respondieron toda la situación, no realizaron correctamente la conversión del registro verbal al registro numérico y luego del registro numérico al analítico y por lo tanto al registro algebraico como se planificó en el análisis a priori.

#### **Análisis de la situación N°4**

En general, con relación al cambio de registro de representación algebraica al registro numérico y luego al gráfico, en las **preguntas 1 y 2**, se observó que ningún estudiante contestó como se planificó en el análisis a priori. Por otro lado el 64.10% y 53.85% estudiantes presentaron dificultad para responder a ambas preguntas, se evidencia en su proceso, ya que para obtener el punto máximo de la parábola han recurrido al registro tabular dando valores a la variable  $t$  y luego compararon los valores de las imágenes y deducen el valor máximo para la fuerza  $F$ , pero esto lo hicieron con valores enteros lo cual de acuerdo a la ecuación no llegaron al vértice correcto, ninguno de estos estudiantes intentó trabajar haciendo el tratamiento en el registro de representación algebraica para

expresar la función cuadrática en su forma estándar  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  y a partir de esto identificar el vértice  $(h, k)$  lo cual daría respuesta a lo pedido de estas dos preguntas, tampoco aplicaron la fórmula las siguientes expresiones  $h = -\frac{b}{2a}$  y  $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ , para hallar el vértice. Mientras que el 35.90% y 46.15% de los estudiantes se abstuvieron de responder.

En la **pregunta 3**, se observó que ningún estudiante hizo el gráfico de la parábola correctamente como se planificó en el análisis a priori, por otro lado, el 48.72% de los estudiantes tuvo dificultad para hacer el cambio de registro, del registro analítico al gráfico, como se evidencia algunos estudiantes no tienen la noción de parábola puesto que la mayoría de estos graficaron dos rectas que se interceptan y culminan en el vértice. Mientras que el 51.28% se abstuvo de responder.

En conclusión, en la situación, los estudiantes que respondieron toda la situación, no realizaron correctamente la conversión del registro algebraico al registro numérico y luego del registro numérico al gráfico como se planificó en el análisis a priori.

#### IV. Discusión

El estudio exploratorio realizado a los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Nacional de Jaén, arroja que ellos poseen escaso análisis e interpretación de las funciones a través de sus gráficas, además que hay evidencia en que la utilización del cambio de registro de representación es muy pobre en la mayoría de los estudiantes. Por otro lado muestran dificultades en el tratamiento de los distintos registros de representación semiótica del objeto función, y además presentan mayores dificultades en la conversión de un registro de representación semiótica a otro registro de representación semiótica del objeto función, estos resultados son contrarios a los de (Guzmán, 1998) quien concluye que las respuestas eran dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más, por otro lado se coincide con (Arce, M. y Ortega, T., 2013) quien concluye que las deficiencias identificadas pueden estar causadas por problemas del alumno al reproducir, a través de un deficiente trazado en la representación gráfica de la función sobre el papel, o el comportamiento o propiedades de la función o



sus elementos, que el alumno tiene correctamente interiorizados en sus esquemas conceptuales.

En las respuestas dadas, se observó que los estudiantes recurren al registro algebraico para intentar resolver la situación, y esto sucede porque así le enseñaron en clase, quedando de esta manera evidenciada la enseñanza algorítmica tradicional.

## V. Referencias

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 61-73.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática* , 33-60.

Duval, R. (s.f.). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Didáctica: Investigaciones en matemática educativa II*, 173-201.

Flores, J. y Ugarte, F. . (2016). *Investigaciones en educación matemática*. Lima: Fondo editorial Pontificia Universidad Católica del Perú.

Guzman, R. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime*, 5-21.

Lages, L. (1998). *Curso de análise volumen 1 (6° ed.)* . Brasil: IMPA.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A de C. V.

Malaspina, U. (2012). *Didáctica de las matemáticas: avances y desafíos actuales*. Lima : Pontificia Universidad Católica.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo* . México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Zill, D. y Wright, W. . (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A. de C. V.

[Volver al índice de autores](#)