

3.1.2. Saber o no saber, esa no es la cuestión (Conferencia plenaria)

Dr. Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra, España

Resumen

En la docencia se utilizan expresiones del tipo: “hemos trabajado las ecuaciones”, “ya hemos visto las ecuaciones”, “hay examen de ecuaciones”, “después de las ecuaciones viene...”. El contenido matemático es entonces percibido como una unidad de término. Se traslada al aprendizaje la lógica de la evolución de las matemáticas, según la cual el conocimiento es lineal, en un proceso de acumulación paulatina, sin retrocesos ni revisión por quien aprende del significado atribuido a los objetos involucrados. Sin embargo, alguien conoce un contenido matemático “de una determinada forma”, que le permite “realizar ciertas tareas” y progresar en el aprendizaje de otros contenidos “con una determinada profundidad”. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) aporta unas herramientas teóricas y metodológicas para el análisis del significado atribuido por un sujeto o una institución a unos objetos matemáticos. Asimismo, permite la valoración de procesos de estudio de las matemáticas de manera contextualizada, identificando aspectos idóneos y de evolución de dichos procesos. En este trabajo se analiza el desempeño de futuros docentes en una tarea de cálculo de fechas en el calendario

1. Conocimiento, saber y significado

Desde el punto de vista estrictamente matemático, la definición de una noción matemática es su medida. La noción es la definición; no hay ambigüedad o graduación posible en esto. Si la hubiera, la definición debería ser revisada y corregida, para la “expulsión” de un *contraejemplo* o, en la terminología de Lakatos (1976), de un “monstruo”.

La construcción del conocimiento sigue otra lógica, no axiomática, no lineal, no acumulativa. Trasladar la “lógica matemática” a los procesos de enseñanza y aprendizaje resulta inadecuado, porque no permite comprender los retos que estos procesos comportan. Sin embargo, en la docencia se utilizan expresiones del tipo: “hemos trabajado las ecuaciones”, “ya hemos visto las ecuaciones”, “hay examen de ecuaciones”, “después de

las ecuaciones viene...”. Así, el contenido matemático es entonces percibido como una unidad de término. No lo es.

“El sentido de un conocimiento matemático se define no solamente por la colección de situaciones en las que este conocimiento se desarrolla en tanto teoría matemática [...], no solamente por la colección de situaciones en las que el sujeto la ha encontrado como medio de resolución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que el rechaza, los errores que evita; añadiría: las economías que procura, las formulaciones que retoma, así como otras cosas forman también parte de su significado.” (Brousseau, 1976, 103).

De esta forma, el desarrollo de la competencia matemática por estudiantes requiere no solo un proceso una *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) sino de un *proceso transpositivo en constante vigilancia*. De la misma forma que no existe un *contrato didáctico* (Brousseau, 2008) “óptimo”, tampoco existe una transposición didáctica “óptima”. Así, en todo proceso transpositivo se debe tener en cuenta los distintos significados (figura 1) atribuidos a los objetos y procesos matemáticos y a su evolución.



Figura 1. Significados personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2008)

2. El día de la semana

Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2018?

Responder esta pregunta es sencillo, aun cuándo no se disponga de ningún instrumento

(calendario en papel, móvil, ordenador, calculadora, etc.) ni de conocimientos sobre el calendario, salvo que julio tiene 31 días. Así, basta, por ejemplo, disponer los días de forma ordenada y ver qué día de la semana le corresponde al 9 de agosto (tabla 1).

Tabla 1. Determinación del día de la semana por extensión

L	M	X	J	V	S	D
				20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	9			

Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?

Primera cuestión: ¿es sencillo responder a esta pregunta?; segunda cuestión o metacuestión: ¿es sencillo responder a la primera cuestión? Vayamos por partes:

- La cuestión “¿es sencillo responder a esta pregunta?” se refiere al contenido matemático descontextualizado y desproblematizado. En cierto sentido se atribuye a los objetos matemáticos una escala de dificultad *intrínseca*, según la cual, por ejemplo, “dividir es fácil” y “resolver ecuaciones es difícil”. ¿Qué significa “fácil” y “difícil”? ¿Tiene sentido preguntárselo?
- La metacuestión “¿es sencillo responder ‘si es sencillo responder a esta pregunta?’” se refiere al contenido didáctico, es decir, al contenido matemático contextualizado, personal e institucionalmente, y problemático, más allá de lo meramente epistemológico. La diferencia entre conocimiento, saber y significado es aquí clave porque el dato “año” (“2018 por 2087”) representa una *variable didáctica*.

3. Experimentación

3.1. Población y muestra

Se propone la tarea a docentes de matemáticas en formación inicial, que cursan el Máster en Profesorado de Educación Secundaria, título obligatorio en España para el ejercicio de

la función docente. El perfil de acceso al Máster exige una formación científico-técnica previa (Matemáticas, Física, Ingeniería); asimismo, pueden cursar el Máster estudiantes con otra formación universitaria, siempre y cuando superen una prueba específica de contenidos matemáticos (en la muestra, pertenecen a este grupo estudiantes con un título en Arquitectura o en Economía).

La muestra está compuesta por 41 estudiantes distribuidos como se señala en la tabla 2.

Tabla 2. Muestra

Formación	MAT	FIS	ING	ARQ	ECO	Total
Hombres	3	2	7	1	5	18
Mujeres	3	0	12	4	4	23
Total	6	2	19	5	9	41

3.2. Tarea

Se propone una tarea con una componente matemática y otra didáctica. La primera parte está constituida por dos problemas relativos a la fecha del calendario; la segunda parte, por cuestiones didácticas. Los problemas matemáticos difieren según los cursos académicos en el “hoy”, que es el día en que se realiza la tarea. Dado que las tareas se propusieron en diferentes años, se preserva aquí una única versión de las tareas con el “hoy” utilizado en este trabajo, a saber, “*hoy viernes 20 de julio de 2018*”. En la figura 2 se da la tarea.

Resuelve los dos siguientes problemas:

- *Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2018?*
- *Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?*

Responde a las siguientes cuestiones:

- a) Identifica los conocimientos matemáticos para realizar los problemas anteriores.

- b) Identifica una variable didáctica y los valores que el docente deba dar a la misma para que el alumnado tenga que modificar su método de resolución.
- c) Enuncia al menos dos problemas cuya dificultad esté entre los dos dados, teniendo en cuenta la variable didáctica identificada y que se disponga o no de un calendario, una calculadora o un teléfono celular.
- d) ¿Cómo plantearías la enseñanza correspondiente a este problema en una clase de secundaria?

Figura 2. Tarea matemático-didáctica

La resolución del segundo problema (“¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?”) si bien, técnicamente, se puede hacer completando una macrotabla similar a la tabla 1, lo usual no es proceder por extensión, sino mediante operaciones elementales y el conocimiento de las características del calendario (días de la semana, días por mes, número de días de los años ordinarios y bisiestos, qué años son bisiestos). A continuación, se dan dos resoluciones prototípicas, que comparten cálculos intermedios que son dados en primer lugar.

Aspectos comunes

- ¿Cuántos años transcurren entre 2018 y 2087? 69 años ($= 2087 - 2018$).
- ¿Cuántos años son bisiestos? 17, ya que hay un año bisiesto cada 4 años y entre 2018 y 2087 no hay un múltiplo de 100 y ni 2018 ni 2087 son múltiplos de 4. Por lo tanto, basta calcular el cociente de dividir 69 por 4 ($69 \div 4$ tiene por cociente 17 y por resto 1).
- ¿Qué día de la semana es el 9 de agosto de 2018? Jueves. De esta forma, la cuestión inicial se transforma en: “sabiendo que el 9 de agosto de 2018 es jueves, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?”.
- Dado que una semana tiene 7 días, el día de la semana coincide cada siete días o, dicho de otra forma, si transcurre un número de días múltiplo de 7, el día de la semana es el mismo.

Resolución 1

Esta resolución consiste en responder a la pregunta: *¿cuántas semanas completas han transcurrido del 9 de agosto de 2018 al 9 de agosto de 2087?* Para ello se calcula el número de días, se divide entre 7 y se determina el día de la semana en función del resto.

- Días transcurridos: $365 \times 69 + 17 = 25\,202$.
- Semanas transcurridas: 3 600 (“ $25\,202 \div 7$ ” tiene por cociente 3 600).
- Días adicionales: 2 (“ $25\,202 \div 7$ ” tiene por resto 2).

De esta forma, dado que el 9 de agosto de 2018 es jueves, se concluye que el 9 de agosto de 2087 será sábado.

Resolución 2

Esta resolución consiste en responder a la pregunta: *¿cuántos días de la semana deben “desplazarse” sabiendo que el 9 de agosto de 2018 es jueves?*

- Días que deben desplazarse en un año ordinario: 1, ya que $365 = 52 \times 7 + 1$.
- Días que deben desplazarse en un año bisiesto: 2, ya que $366 = 52 \times 7 + 2$.
- Días desplazados por años ordinarios: 52 (= $69 - 17$).
- Días desplazados por años bisiestos: 34 (= 17×2).
- Días desplazados totales: 86 (= $52 + 34$).
- Días adicionales: 2, ya que “ $86 \div 7$ ” tiene por cociente 14 y por resto 2.

De esta forma, se concluye también que el 9 de agosto de 2087 será sábado.

3.3. Resultados y su discusión

Los resultados en la resolución de la tarea primera “hoy es *viernes 20* de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2018?” son los esperados, salvo un *error anecdótico* (Wilhelmi, 2009), todos los estudiantes responden correctamente. Los

resultados de la tarea equivalente a la segunda “*hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?*” se recogen en la tabla 3.

Tabla 3. Resultados

Año	2011	2013	2014	2015	2018	Total
Bien	4	2	3	4	4	17
Mal	5	3	3	2	6	19
No contesta	2	2	0	0	1	5
Total	11	7	6	6	11	41

No hay diferencias significativas entre las respuestas según la variable sexo (mujer, hombre) ni por la variable estudios de origen (matemáticas, física, ingeniería, arquitectura o económicas). Las respuestas de las distintas cohortes son similares; este hecho, sumado a que la edad de los sujetos no está correlacionada con el año en el que cursan el Máster, permiten afirmar que la tasa de respuestas correctas es estable en el tiempo y la procedencia y edad de los estudiantes: aproximadamente el 50%.

En diferentes años algunos estudiantes no responden a la tarea (“no contesta” en la tabla 3), limitándose a “describir el procedimiento”. Consultados, la justificación que dan a esta decisión es que “había que hacer unas operaciones elementales y pensé que lo principal era el análisis didáctico [preguntas a)-d)]”. Esta respuesta contrasta con la tasa de éxito en la muestra (50% aprox.) y es indicador de la *epistemología espontánea del profesor novel*, que atribuye “mayor valor” a actividades “no rutinarias o algorítmicas”, desconociendo la importancia del *trabajo de la técnica* y de su *rutinización* (Chevallard, Bosch y Gascón, 2004).

Por último, aproximadamente 3 de cada 4 estudiantes que responden a la tarea con una resolución tipo 1, que precisa el cálculo de los días transcurridos y la determinación de las semanas completas y “días sueltos”. El resto de estudiantes resuelve el problema segundo mediante la resolución 2. Este hecho supone que, en la muestra, si los sujetos disponen de un método de resolución “relativamente sencillo” no toman conciencia de que las

“variables matemáticas” condicionan la eficacia de los procedimientos. Por ejemplo, no es lo mismo realizar una operación elemental con números de una cifra, que con números de varias cifras; no tiene la misma tasa de éxito una ecuación de primer grado ($ax + b = c$) cuya solución sea un número natural que otra “del mismo tipo” cuya solución sea un número entero negativo o una fracción; etc. Así, no es lo mismo tener que realizar operaciones elementales de forma aislada que, como aquí, realizarlas en “cadena”, donde el resultado de una operación condiciona la resolución e interpretación de la siguiente.

4. Implicaciones para la enseñanza

La adquisición del conocimiento matemático no sigue una lógica axiomática y acumulativa. Tareas supuestamente sencillas, como la realización de operaciones elementales, pueden arrojar resultados efectivos no previstos. En la formación del profesorado es pues necesario utilizar este fenómeno para motivar la necesidad de:

- Modificar la epistemología espontánea del profesor novel, según la cual, la transposición didáctica es una mera adaptación de los contenidos matemáticos a la etapa educativa, pero que no incluye las condiciones de la actividad propiamente dicha ni su evolución.
- Establecer una ontología matemática que supere la identificación del objeto matemático con su definición, que no es la “medida” de la noción. Una propuesta es la desarrollada en el EOS.
- Incorporar en la enseñanza medios de control de la actividad, que permita garantizar una tasa de éxito en procedimientos rutinarios o algorítmicos. De otra forma, las técnicas de control.

Referencias

Brousseau G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme et J. Vanhamme, *La problématique et l'enseignement de la mathématique*. XXVIIIe rencontre de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Louvain-la-neuve, pp. 101-117.

Brousseau G. (2008). *Iniciación a la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas*. Buenos Aires: El Zorzal.

Chevallard Y. (1985). *La transposición didáctica: del saber científico al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard Y., Bosch M., & Gascón J. (2004). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori: Barcelona.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.

Lakatos I. (1976). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

Wilhelmi M. R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. En C. Gaita, *Enseñanza de las matemáticas IV*. Pontificia Universidad Católica del Perú: Lima. Disponible en (04/07/2018): http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2011/10/actas_2009_iv_coloquio.pdf

[Volver al índice de autores](#)