

## ¿Qué percepción tienen los estudiantes de la relación entre el área y el volumen de figuras geométricas?

Miquel Ferrer Puigdellívol  
*Universitat Autònoma de Barcelona*

**Resumen:** *El artículo detalla una experiencia de aula en la que se muestra la predisposición del alumnado de primer curso de bachillerato respecto de los problemas de extremos. Se discute si para estos alumnos la igualdad de volumen entre dos figuras implica, o no, igualdad de área, y si la igualdad de área implica, o no, igualdad de volumen. Se estudian las respuestas de dos tareas matemáticas y se concluye que el punto de partida de los estudiantes no es suficientemente favorable para resolver problemas de extremos que requieran la optimización del área o del volumen de figuras geométricas.*

**Palabras clave:** *perímetro, área, volumen, problema de extremos, geometría.*

## What is the students' perception of the relationship between area and volume of geometric figures?

**Abstract:** *The study shows a classroom experience in which it is explained the 9th graders' disposition when they have to solve maximum and minimum problems. It is discussed whether for these students equal volume between two figures implies, or not, equal area; and whether equal area between two figures implies, or not, equal volume. The students' responses of two mathematical tasks are studied and it is concluded that the students' starting point is not enough appropriate to solve maximum and minimum problems that require the optimization of area or volume of geometric figures.*

**Keywords:** *perimeter, area, volume, maximum and minimum problem, geometry.*

## INTRODUCCIÓN

Varios estudios ponen de manifiesto que los alumnos de primaria e incluso de los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria confunden frecuentemente la relación entre el área y el perímetro de figuras geométricas. Dickson, Brown y Gibson (1991) plantean una situación en la que el docente muestra a un alumno una hoja de papel cuadriculado formado por casillas de 1cm x 1cm, donde se había dibujado un rectángulo de 7cm x 3cm. El docente le preguntó cuál era el perímetro y el área del rectángulo. En los dos casos el estudiante respondió correctamente. Después, se hizo dibujar al alumno un rectángulo diferente, pero que mantuviese los 20cm de perímetro. Los primeros intentos del alumno consistieron en determinar el mismo rectángulo, pero cambiando su orientación, y le surgieron importantes dificultades para responder a esta pregunta. Era evidente que el alumno, aunque tenía 13 años, no se daba cuenta de que rectángulos del mismo perímetro podían tener áreas diferentes, es decir, que se podía mantener el perímetro de los rectángulos aunque se cambiase su forma y, por tanto, su área. Ahora bien, ¿cuál es la percepción de los estudiantes de la relación entre áreas y volúmenes de figuras geométricas?

El objetivo del presente artículo es mostrar una experiencia de aula que pretende determinar si para los alumnos (i) la igualdad de volumen entre dos figuras implica, o no, igualdad de área; y (ii) la igualdad de área entre dos figuras implica, o no, igualdad de volumen.

Hay que destacar que esta experiencia forma parte de un estudio más amplio en didáctica de las matemáticas, el cual pretende caracterizar cómo resuelven problemas de extremos los estudiantes que no están familiarizados con el cálculo diferencial. Concretamente, se quiere determinar la impresión y el punto de partida de los alumnos de primer curso de bachillerato al hacer frente a esta tipología de problemas, con los cuales no están habituados a trabajar porque aún no han practicado el cálculo con derivadas.

## CONTEXTUALIZACIÓN: POBLACIÓN ESTUDIADA Y TAREAS MATEMÁTICAS

Se obtuvieron datos de aula a través de un cuestionario que constaba de seis tareas matemáticas resueltas por 138 alumnos de primer curso de bachillerato, 78 chicos y 60 chicas, que cursaban la asignatura de Matemáticas o de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales en dos institutos públicos de Catalunya. Ambos centros eran institutos comarcales que pertenecían a un ámbito sociocultural medio y que cumplían con el desarrollo normativo del Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Catalunya vigente en el momento de implementar la experiencia de aula (Departamento de Enseñanza, 2007). Desde los departamentos de matemáticas de estos institutos se fomentaba que los alumnos resolvieran problemas de matemáticas y que argumentaran, oralmente y por escrito, el procedimiento que habían seguido para llegar a la solución de los problemas. En el momento de la experimentación, los alumnos no estaban familiarizados con las reglas del cálculo diferencial y no habían resuelto previamente problemas de extremos en sus clases de matemáticas. Todos los alumnos respondieron el cuestionario individualmente y de forma anónima, en un máximo de 60 minutos.

A continuación se muestran las dos primeras tareas del cuestionario, un estudio más detallado de las cuales se introduce en la siguiente sección de este artículo.

*Tarea 1.* Hay latas de un refresco de cola de 330 ml con dos formas diferentes: una más alta y delgada, y otra más baja y ancha (Fig. 1). Ambas latas contienen la misma cantidad de refresco, es decir, tienen el mismo volumen. ¿Crees que es necesaria la misma cantidad de latón para fabricar cada una de ellas? Señala la respuesta que mejor se ajuste a tu punto de vista:



Figura 1. Latas de refresco de dos formas distintas.

- 1a.** El recipiente más alto y delgado tiene más cantidad de latón.
- 1b.** La cantidad de latón necesaria para fabricar los dos recipientes tiene que ser la misma, ya que ambas latas de refresco tienen el mismo volumen.
- 1c.** El recipiente más bajo y ancho tiene más cantidad de latón.
- 1d.** No lo sé. Ninguna respuesta se ajusta a mi punto de vista.

La primera tarea pretende estudiar si para los estudiantes la igualdad de volumen entre dos figuras geométricas (las dos latas de refresco) implica, o no, igualdad de área total.

La segunda tarea pretende determinar si para los alumnos la igualdad de área lateral de dos figuras geométricas (los dos cilindros) implica, o no, igualdad de volumen (véase página 82).

### Respuestas de los alumnos a las dos tareas

Con relación a la primera tarea observamos que más del 76% de los alumnos respondieron que por el hecho de existir igualdad de volumen entre las dos latas de refresco también había igualdad de área total. Es decir, la cantidad de material que se necesitaba para construirlas era la misma en los dos casos, ya que el volumen era el mismo. Por otro lado, detectamos que muy pocos alumnos señalaron como correcta la respuesta (1d), es decir, pocos alumnos afirmaron que no sabían cómo afrontar la tarea y, por este motivo, ninguna de las respuestas se ajustaba a su punto de vista.

**Tarea 2.** Se dispone de dos láminas iguales de cartulina (una de color gris oscuro y otra de color gris claro) de forma rectangular, que presentan 31,4 cm de largo y 6,28 cm de alto. Con cada lámina se quiere construir un cilindro, doblando las láminas de dos modos distintos, tal y como se observa en la siguiente ilustración (Fig. 2):

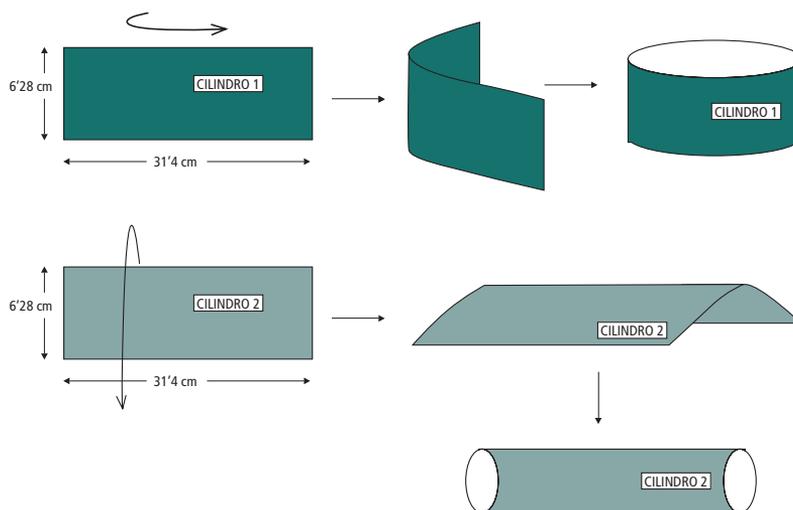


Figura 2. Cilindros correspondientes a la segunda tarea.

Los dos cilindros tienen la misma superficie lateral. ¿Crees que también tienen el mismo volumen? Señala la respuesta que mejor se ajuste a tu punto de vista:

- 2a.** Los dos cilindros tienen el mismo volumen, ya que tienen la misma superficie lateral.
- 2b.** El cilindro más bajo y ancho (el de color gris oscuro) tiene un volumen más grande.
- 2c.** El cilindro más estrecho y alto (el de color gris claro) tiene un volumen más grande.
- 2d.** No lo sé. Ninguna respuesta se ajusta a mi punto de vista.

A continuación resumimos los resultados de la tarea 1 en forma de tabla y de gráfico, obtenidos a partir de las respuestas de los 138 alumnos (véase la Tabla 1 y la figura 1):

Tabla 1. Número de respuestas y porcentaje en los cuatro apartados de la tarea 1.

Tarea 1	
Respuesta 1a.	8 (5,8%)
Respuesta 1b.	105 (76,09%)
Respuesta 1c.	20 (14,49%)
Respuesta 1d.	5 (3,62%)

La Tabla 1 muestra que 8 alumnos (5,8%) respondieron la opción (1a), 105 estudiantes (76,09%) señalaron como correcta la respuesta (1b), 20 alumnos (14,49%) respondieron la opción (1c) y solo 5 estudiantes (3,62%) señalaron como correcta la respuesta (1d).

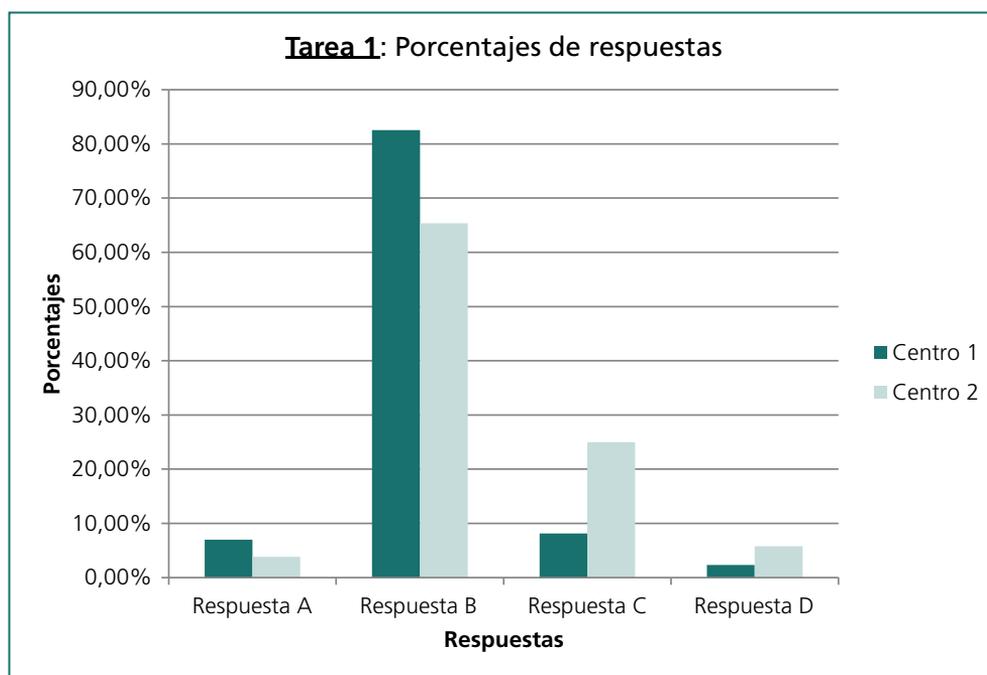


Figura 1. Porcentajes detallados de respuestas a la tarea 1 en los dos centros.

Con relación a la segunda tarea determinamos que más del 68% de los alumnos respondieron, en este caso, que por el hecho de existir igualdad de superficie lateral entre los dos cilindros también había igualdad de volumen. En cambio solo un 23,9% de los alumnos señalaron como correcta la respuesta (2b), es decir, la adecuada desde el punto de vista matemático: “el cilindro más ancho y bajo (el de color gris oscuro) tiene un volumen más grande”. Para más información, véanse la Tabla 2 y el Gráfico 2.

Tabla 2. Número de respuestas y porcentaje en los cuatro apartados de la tarea 2.

Tarea 2	
Respuesta 2a.	95 (68,84%)
Respuesta 2b.	33 (23,91%)
Respuesta 2c.	4 (2,9%)
Respuesta 2d.	6 (4,35%)

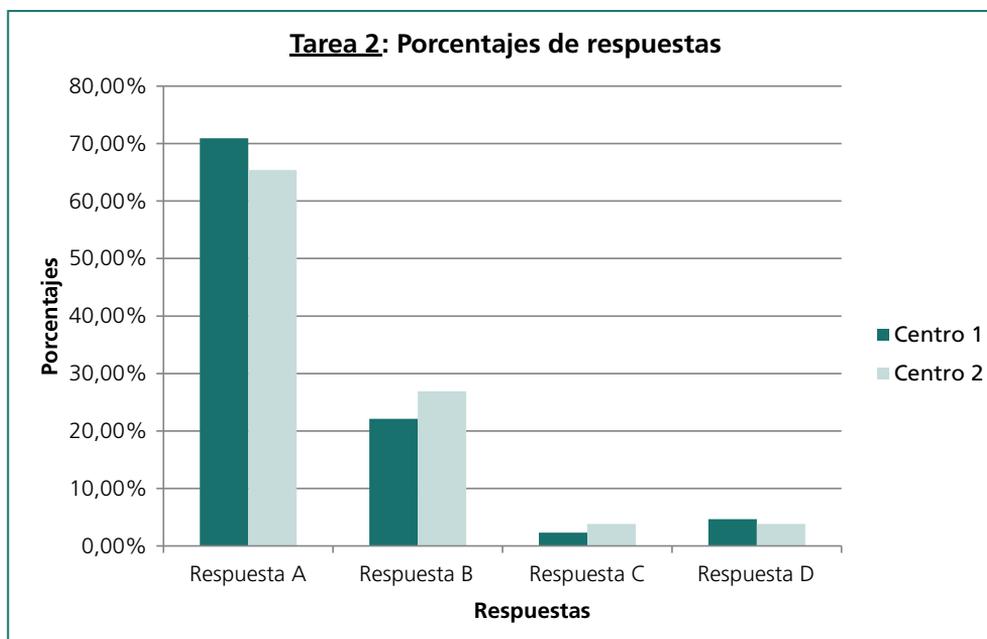


Figura 2. Porcentajes detallados de respuestas a la tarea 2 en los dos centros.

La Tabla 2 muestra que 95 alumnos (68,84%) respondieron la opción (2a), 33 estudiantes (23,91%) dieron como correcta la respuesta (2b), 4 alumnos (2,9%) señalaron la opción (2c) y 6 estudiantes consideraron que la respuesta correcta era la (2d).

## CONSIDERACIONES FINALES

Los problemas de extremos figuran de forma explícita en el currículo de matemáticas de segundo curso de bachillerato, como una aplicación del cálculo con derivadas. No obstante, como afirma Modica (2010), esta tipología de problemas se puede trabajar con alumnos que aún no conocen el cálculo diferencial, ya que muchos de estos problemas admiten soluciones por métodos elementales. En este artículo se ha analizado una experiencia didáctica que ha permitido observar la predisposición del alumnado de primer curso de bachillerato con relación a los problemas de extremos, estudiando cuál es su percepción de la relación entre áreas y volúmenes de figuras geométricas.

Se ha observado que para muchos alumnos la igualdad de volumen entre dos figuras puede implicar, erróneamente, igualdad de área. El análisis de las respuestas de la primera tarea pone en evidencia este hecho, ya que gran parte de los alumnos manifiestan, erróneamente, que el área total de dos figuras geométricas se conserva por el hecho de existir igualdad de sus volúmenes. Por tanto, es prudente concluir que el punto de partida de estos alumnos no es lo bastante favorable para trabajar problemas de extremos donde se requiera optimizar el área de figuras geométricas en las que el volumen se encuentra fijo.

Por otro lado, también se ha observado que la igualdad de área entre dos figuras puede implicar, erróneamente, igualdad de volumen. Las respuestas de los alumnos a la segunda tarea evidencian que, para muchos alumnos, el volumen de dos figuras geométricas se conserva por el hecho de existir igualdad de sus superficies laterales. Como en el caso anterior, el porcentaje de alumnos que manifiestan esta confusión es alto y, por este motivo, concluimos que el punto de partida de estos alumnos antes de hacer frente a problemas de extremos en los que se requiera optimizar el volumen teniendo fija la superficie lateral no es adecuado desde el punto de vista matemático.

Finalmente, los resultados de esta experiencia sugieren que, durante las clases de matemáticas, habría que trabajar tareas que ayudasen a los alumnos a mejorar su percepción matemática de la relación entre perímetro, área y volumen de figuras geométricas, antes de resolver problemas de extremos aplicando las complejas técnicas del cálculo diferencial.

## AGRADECIMIENTOS

Al proyecto EDU2015-65378-P y a la Beca FPI BES-2012-053575 del Ministerio de Economía y Competitividad.

## REFERENCIAS

- Departamento de Enseñanza (2007). Currículum de l'Educació Secundària Obligatòria. Barcelona, España: Generalitat de Catalunya.
- Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.
- Modica, E. (2010). Maximum / minimum problems solved using an algebraic way. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 29, 41-47.