Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 107-113**

Obtención de la raíz cuadrada de un número con pinchos insertables y un tablero perforado

Noelia Jiménez-Fanjul,
Alexander Maz-Machado
Carmen María León-Mantero
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una actividad para trabajar el concepto de raíz cuadrada, ligado al concepto de cuadrado, realizando la conexión entre la aritmética y la geometría, e iniciando la extracción de la raíz cuadrada de un número de forma manipulativa con pinchos insertables y un tablero perforado.*
Palabras Clave: *Raíz cuadrada, Material manipulativo, Matemáticas, Aritmética.*

Square roots using pegboards

Abstract: *We present a class activity to work the concept of square root (arithmetics), linked to the concept of square (geometry), as well as, a graphical algorithm to find the square root of a given number by means of manipulative materials: pegboards.*
Keywords: *Square root, manipulative materials, Mathematics, Arithmetics.*

INTRODUCCIÓN

Existen numerosas experiencias del uso de materiales manipulativos para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, de hecho, el uso de materiales manipulativos facilita la transición de la etapa de desarrollo cognitivo de "operaciones concretas" a la de "operaciones formales" (Piaget e Inhelder, 1997), promoviendo un aprendizaje de calidad. Sin embargo, y como ya apuntaba Bruner (Resnick y Ford, 1990), el uso de materiales concretos es fundamental para el desarrollo por parte del alumnado de los diferentes modos de representación (enactiva, icónica y simbólica) que deben promoverse para el aprendizaje de cualquier contenido matemático, resultando idóneo su uso para introducir nuevos conceptos que pudieran resultar complejos en cualquier nivel educativo y con todo tipo de alumnado (Brahier, 2016).

Aunque cabe recordar que el uso de materiales manipulativos *per se* no garantiza el aprendizaje, requiriéndose de la intervención del profesor para reflexionar junto al alumnado sobre sus ideas y ayudarle a alcanzar representaciones matemáticas cada vez más sofisticadas (Clements, 1999).

Entendemos por material manipulativo "todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje" (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988, p. 13), aunque otros autores realizan una distinción entre los materiales estructurados específicos diseñados con fines educativos y aquellos materiales cotidianos con posible uso didáctico (Coriat, 1997).

Los materiales facilitan la comprensión y establecimiento de representaciones diversas de los conceptos trabajados, creando además un ambiente agradable y lúdico que favorece el arraigo en nuestros estudiantes de actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012).

El concepto de raíz cuadrada se introduce en España en la educación secundaria, si bien el algoritmo para su cálculo no se considera como contenido específico en la legislación (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, 2015). El concepto de raíz cuadrada puede abordarse además en niveles más tempranos, en la educación primaria incluso, siempre ligado al concepto de cuadrado. En esta propuesta, trabajaremos el concepto de raíz cuadrada de un número e introduciremos su cálculo apoyándonos en el procedimiento manipulativo (que puede ser traducido a gráfico posteriormente) explicado por Montessori (1934). El profesor podrá además iniciar la relación entre el procedimiento manipulativo y el algoritmo escrito como ampliación para alumnos que lo demanden.

ACTIVIDAD

Con estas actividades se pretende que el alumnado comprenda el concepto de raíz cuadrada de un número y su relación con éste, interconectando la aritmética con la geometría, así como hallar la raíz cuadrada de un número de manera manipulativa.

1. Construcción de cuadrados

Conviene previamente, abordar la construcción de cuadrados de distintos números y enfatizar la relación de éste con su base o raíz. Hallar el cuadrado de un número es considerar una multiplicación en la que los dos operandos son el mismo número. Trabajaremos de forma manipulativa (o gráfica) estas multiplicaciones en su configuración rectangular. Así, se trabajará la construcción de cuadrados de números dados en el tablero perforado con los pinchos insertables, comenzando por la base, esto es, insertando el número de pinchos del cual se desea obtener el cuadrado, y repitiendo esa fila tantas veces como pinchos en su base, o lo que es lo mismo, hasta obtener una figura cuadrada. Se reparará en el número de pinchos que hay en la base o raíz –esto es, lado del cuadrado–, así como en la forma geométrica resultante –cuadrado– y en el número total de pinchos que conforman dicho cuadrado.

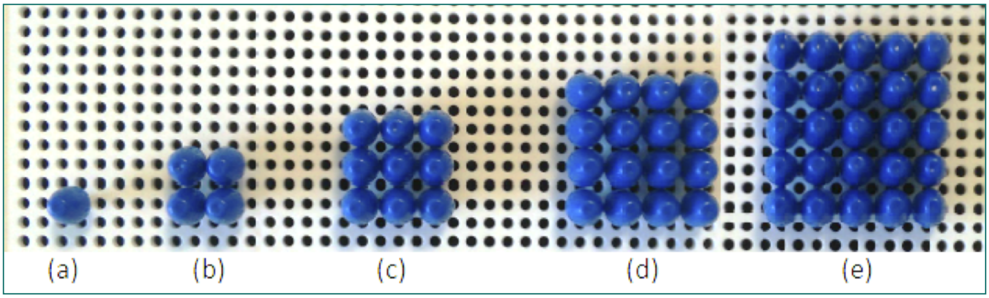

Figura 1. Números cuadrados.

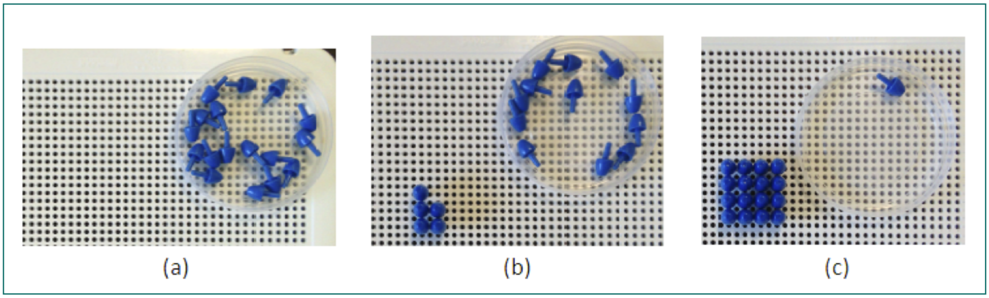

Figura 2. Procedimiento para hallar la raíz del número 17.

En la Figura 1 podemos ver varios ejemplos. Así, deberemos reparar en que el primer cuadrado (Figura 1.a), el cuadrado de dimensiones 1x1, está formado por un único pincho y que coincide con su base o raíz ($1^2=1$). El segundo cuadrado (Figura 1.b) está formado por 4 pinchos y en su base o raíz solo hay dos ($2^2=4$),…etc. Así el número de pinchos totales que conforman el cuadrado, es el número, y el número de pinchos en su base, es la raíz de dicho número.

2. Hallar la raíz de un cuadrado

Ahora realizaremos la operación opuesta a la anterior, esto es, la de dado un número averiguar su raíz cuadrada. Imaginemos que tenemos el número 17 (Figura 2.a) y queremos hallar su raíz cuadrada. Tan solo deberemos coger 17 pinchos e ir disponiéndolos en el tablero de manera que vayan resultando cuadrados. En la Figura 2 podemos ver este ejemplo concreto, vemos que la raíz de 17 es 4 y tenemos un resto de 1, ya que no podemos colocar este último pincho de manera que obtengamos un cuadrado. Por lo que $\sqrt{17}$ es 4 y el resto 1.

Es obvio que este procedimiento no es muy rápido para números más grandes, es decir, para números cuya raíz cuadrada sea de dos o más dígitos. Así que introduciremos la potencialidad de nuestro sistema de numeración para trabajarlos.

Antes repararemos en cómo construir cuadrados de números más grandes de forma manipulativa.

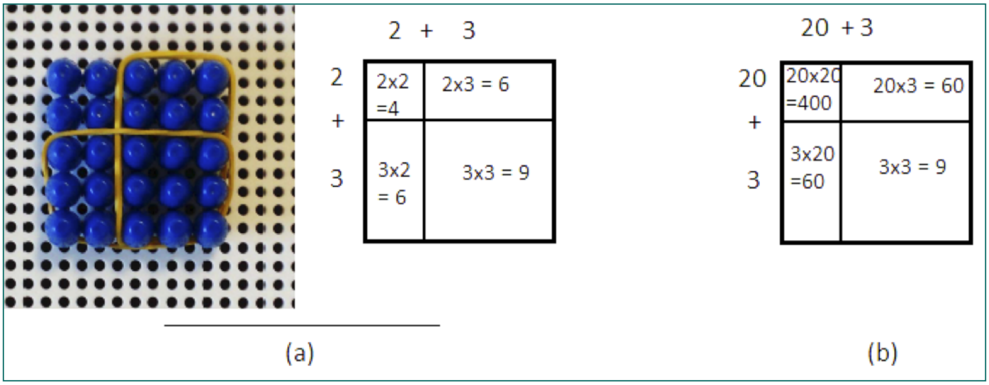

Figura 3. Cuadrado de 5(2+3) y cuadrado de 23.

3. Construcción de cuadrados grandes

Antes de construir cuadrados de números más grandes, deberemos abordar el caso concreto en el que el lado de un cuadrado no representa un único número sino la suma de dos, i.e., un binomio.

Así, en la Figura 3.a, podemos ver construido el cuadrado del número 5, resultando un cuadrado formado por 25 pinchos. Si en lugar de considerar el número 5 como tal, consideramos que está formado por la suma de 2 y 3; tendremos que elevar al cuadrado (o multiplicar por sí mismo) el binomio (2+3).

Esta operación nos llevará al mismo resultado:

$$(2+3)^2 = (2+3) \times (2+3) = 2x2+2x3 + 3x2 + 3x3 = 4 + 6 + 6 + 9 = 25$$

Lo que hemos realizado es dividir el cuadrado en 4 rectángulos, gráficamente podemos ver cómo en la diagonal principal, "\", esos rectángulos son cuadrados. Y cómo la figura resultante es simétrica respecto de esa diagonal.

Si en lugar de considerar 2 y 3 como números independientes, introducimos valores jerárquicos o de posición atendiendo a nuestro sistema de numeración, el resultado sería bien distinto, y nos permitirá manejar números más grandes. De esta manera la construcción mostrada en la Figura 3.a con las subdivisiones realizadas bien podría representar el cuadrado del número 23 en vez del cuadrado del número 5 (2+3). Este resultado se puede ver en la Figura 3.b.

$$(20 + 3)^2 = 20x20 + 20x3 + 3x20 + 3x3 = 400 + 60 + 60 +9 = 529$$

Hay que destacar que en la Figura 3 las divisiones, es decir, lo que nos diferencia cada orden de unidad (valor posicional) es una división física. Para facilitar este hecho, y no tener que realizar divisiones con gomillas, utilizaremos pinchos de colores diferentes respetando el siguiente código de color, común en numerosos textos escolares: azul para las unidades, rojo para las decenas, verde para las centenas y amarillo para las decenas

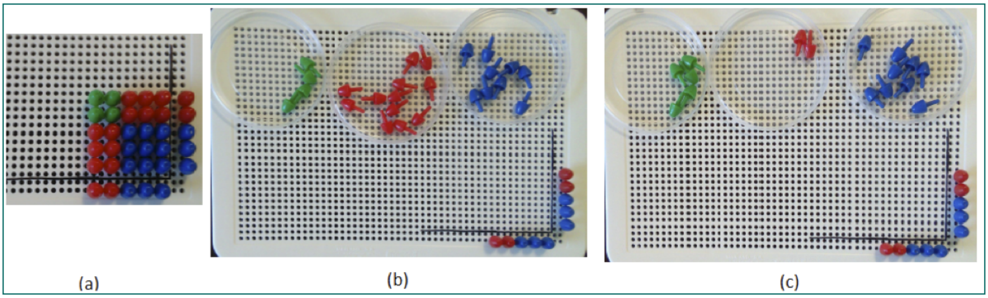

Figura 4. Cuadrado de 23.

de millar. Podremos volver a utilizar estos colores para órdenes de unidades siguientes, si fuera necesario.

En la Figura 4.a, vemos cómo quedaría la construcción que representa el cuadrado de 23 con el código de colores. Como se aprecia en dicha construcción, nos hemos ayudado de unas barras laterales auxiliares para tener el número de referencia, es este caso 23, en los lados inferior y derecho del cuadrado. Esto es prescindible pero por nuestra experiencia ayuda a los alumnos en la tarea. Hay que destacar sin embargo que conviene recordar que éstos no forman parte del cuadrado, son auxiliares.

Para obtener el resultado pues de dicho cuadrado, tan solo tenemos que contar el número de pinchos correspondientes a cada orden de unidad –denotada por los colores– y realizar las equivalencias oportunas (Figura 4.b). El resultado obtenido es 529 como puede verse en la Figura 4.c.

4. Raíz de números grandes

Para realizar la raíz de un número grande de forma análoga a lo visto hasta ahora, hay que trabajar y reparar en varias cosas con antelación, a saber: el número de dígitos de la raíz y cómo debe resultar el cuadrado formado (formas, colores, simetrías).

Para lo primero se pude estudiar las relaciones entre el número y su raíz cuadrada (1^2=1; 10^2=100; 100^2=10000; 1000^2=1000000;…), llegando a la conclusión que por cada cifra de la raíz (base del cuadrado) le corresponde dos cifras en el número que representa su cuadrado.

En la Figura 5 podemos ver, además de esta relación, la simetría del cuadrado resultado –simetría respecto de “\”–, las formas geométricas resultantes –cuadrados en dicha diagonal y rectángulos simétricos en el resto–. Se aprecia además como los distintos órdenes de unidades (unidades, decenas, centenas,…) se distribuyen en diagonales perpendiculares al eje de simetría. El número de estas diagonales (sus colores), nos anticipará las conversiones que debemos realizar para trabajar el número del cuál queremos hallar su raíz.

Veámoslo con un ejemplo práctico. Hallaremos la raíz cuadrada del número 1236. Para ello construiremos un cuadrado con dicho número y repararemos en su base o raíz.

El número 1236, se representa con un picho amarillo, dos verdes, 3 rojos y 6 azules.

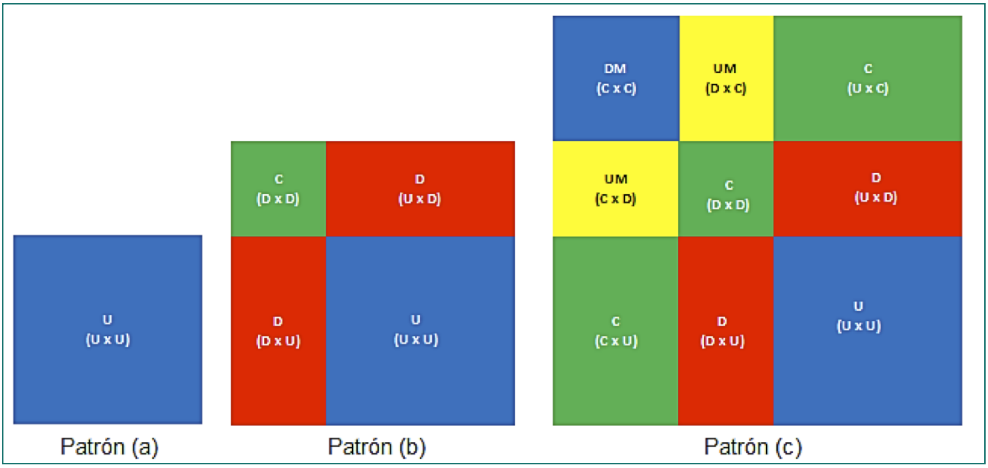

Figura 5. Cuadrados de números de una (a), dos (b) y tres cifras (c).

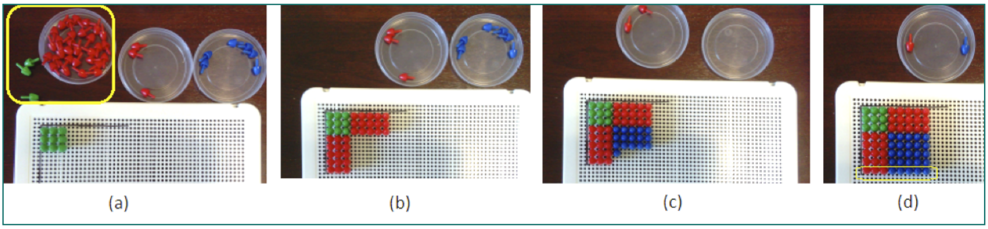

Figura 6. Raíz cuadrada de 1236.

Lo primero es anticipar el número de cifras que tendrá la raíz cuadrada de dicho número, que es dos, sabiendo entonces cómo será al patrón del cuadrado resultante. En este caso, es claro que la raíz cuadrada tendrá dos dígitos, por lo que el cuadrado resultante deberá seguir el patrón mostrado en la Figura 5.b.

Como este patrón trabaja tan solo con tres órdenes de unidades, a saber: con centenas, decenas y unidades; realizaremos la conversión de nuestra unidad de millar (pincho amarillo) a centenas (pinchos verdes); así pues el número 1236 queda representado con 12 centenas, 3 decenas y 6 unidades, con las que empezaremos a construir el cuadrado.

Si para elevar un número al cuadrado comenzábamos por la parte inferior derecha, parece lógico pues que para realizar la operación inversa, extraer su raíz cuadrada, comencemos construyendo por la parte superior izquierda. Así, comenzaremos a construir el cuadrado correspondiente a las centenas, mostrado en el patrón de la Figura 5.b. Como tenemos 12 centenas, solo podremos formar un cuadrado de 3x3, y nos sobrarán 3 centenas que cambiaremos convenientemente por decenas (Figura 6.a).

Tras esto, comenzaremos a formar los dos rectángulos simétricos de las decenas (rojos) resultando dos rectángulos de 3x5 y sobrando 3 decenas (Figura 6.b). Comenzaremos a rellenar el cuadrado de la diagonal principal que nos queda, el correspondiente a las unidades (Figura 6.c) y realizaremos los canjes necesarios hasta completarlo, de nuestras 3 decenas sobrantes, obteniendo el resultado final. Podemos ver en la Figura 6.d cómo el número 1236 ha formado un cuadrado cuya raíz (base) es 35, sobrando 11, una decena (pincho rojo) y una unidad (azul), en el platillo.

$$\sqrt{1236} = 35 \text{ } y \text{ } resto \text{ } 11$$

Se recomienda comenzar hallando raíces exactas e incluso conectar este procedimiento y su representación pictórica o gráfica con el algoritmo en lenguaje matemático que subyace bajo el mismo. Esta actividad puede ser incorporada como actividad de ampliación para el alumnado.

REFLEXIONES

Queremos concluir que trabajar el concepto de raíz cuadrada de un número de esta manera manipulativa favorece la interconexión entre la aritmética y la geometría a la vez que puede servir para reforzar también nociones de álgebra, como la del cuadrado de un binomio.

La clave de esta experiencia que aquí se expone es sin embargo la asunción de un papel activo por parte del alumnado, que el docente deberá fomentar formulando preguntas adecuadas en cada etapa e incitando al alumno a reflexionar sobre los pasos que va realizando.

Consideramos además que esta idea de aula que utiliza la manipulación de estos materiales puede ser trasladada a representaciones gráficas (icónicas) que prescindan ya del material manipulativo y que sirvan de transición a otras representaciones más abstractas utilizando la simbología apropiada.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. Mª. (1988). Materiales para construir la geometría. Madrid: Síntesis.

Brahier, Daniel J. (2016). Teaching Secondary and Middle School Mathematics (5th ed.). New York: Routledge.

Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. Contemporary Issues in Early Childhood, 1(1), 45-60.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori.

Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. Epsilon. Revista de Educación Matemática, 81, 105-112.

Montessori, M. (1934). Psicoaritmética: la aritmética desarrollada con arreglo a las directrices señaladas por la psicología infantil, durante veinticinco años de experiencia. Barcelona: Casa editorial Araluce.

Piaget, J. e Inhelder, B.(1997). Psicología del niño. Madrid: Ediciones Morata.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015). BOE, 3, 169-546. Recuperado de http://www.boe.es.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Madrid: Paidós-MEC.