Modelización matemática en la resolución de problemas

M. Sc. Alexander Borbón Alpízar
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
aborbon@itcr.ac.cr

Bach. Dayana Calderón Prado
Estudiante Licenciatura MATEC
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
gdayanacp@gmail.com

Resumen: El objetivo principal de este taller es mostrar de manera teórica y práctica la forma en que se puede aplicar la modelización matemática en la resolución de problemas y, por ende, en los nuevos programas del Ministerio de Educación Pública. El taller está dirigido a maestros de primaria y profesores de secundaria, se enfoca más en aspectos prácticos, aunque se revisarán los conceptos teóricos también. A los participantes se les darán 9 problemas (3 de primaria y 6 de secundaria) en donde se puede aplicar la modelización matemática en el aula.

Palabras clave: modelización matemática, resolución de problemas

Abstract: The main goal of this workshop is to show the theorical and practical way to use mathematics modeling in problema solving and, therefore, in the new Ministerio de Educación Pública's program. The workshop is aimed at primary and secondary teachers, focuses more on practical aspects, although the theoretical concepts will be reviewed as well. We Will give to the participants 9 problems (3 in primary and 6 in secondary school) where mathematical modeling can be applied in the classroom.

Keywords: mathematical modeling; problem solving

1. Introducción

La educación de las nuevas generaciones está llena de retos y situaciones que no se tomaban en cuenta hace algunos años, las carreras universitarias que surgen en la actualidad requieren docentes con una excelente preparación académica, especialmente en el área de matemática. En la actualidad las carreras de ingeniería cuentan con una gran demanda y además, son carreras profesionales que hacen un uso constante de las matemáticas en diferentes contextos;

es por esto que surge la preocupación de cómo enseñar matemática en primaria y secundaria, de forma que los estudiantes no tengan dificultad con la aplicación de esta materia en el futuro, ya sea al ingresar a una carrera universitaria o posteriormente en su vida laboral.

Para lograr este objetivo, es necesario utilizar en el aula metodologías en donde el estudiante puede experimentar directamente con la matemática en contextos de aplicación y, así el estudiante visualice la matemática como una herramienta útil para su vida diaria, de esta forma se podrá disminuir el pensamiento erróneo y lamentablemente muy popular de ver a la matemática como una asignatura innecesaria para las actividades cotidianas.

En Costa Rica, a partir del año 2012, se implementó una reforma en la educación con el nuevo Programa de Estudio en Matemática para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado (MEP, 2012), donde la principal propuesta metodológica es la resolución de problemas con situaciones de la vida real, es aquí donde entra en juego el papel de la modelización matemática.

En este taller se introducirán algunos conceptos fundamentales sobre la modelización matemática, y posteriormente se realizarán actividades donde se aplicará esta teoría o proceso en la resolución de problemas, de esta forma se proporcionarán ideas a los profesores de primaria y secundaria para dar mejor provecho a las actividades propuestas por el Ministerio de Educación Pública (MEP). Cabe aclarar que el enfoque que se dará a la modelización matemática en este taller será su aplicación en la resolución de problemas, por lo que pueden diferir algunos conceptos en la aplicación de la teoría, esto porque se desea ajustar el taller al ambiente que se puede presentar en las aulas costarricenses.

2. Aspectos teóricos

2.1. Resolución de problemas

En la vida cotidiana constantemente nos encontramos con diferentes situaciones matemáticas que se deben resolver, algunas son tan cotidianas que ni siquiera nos percatamos que estamos utilizando matemática, por ejemplo, decidir cuánta pintura se debe comprar de acuerdo con su rendimiento o aproximar la duración y los gastos de un viaje. Al enseñar la matemática en la educación formal es usual que este uso cotidiano se les oculte a los estudiantes y se termine por enseñar fórmulas y procedimientos memorísticos que provocan en última instancia que los estudiantes pierdan el interés al no ver la relación existente o no encontrarle un sentido práctico.

Si desde niños se enseña a analizar cada acción y ver la operación o procedimiento matemático que mentalmente se realiza, los niños comprenderán la utilidad desde diferentes perspectivas. Entre estas situaciones que se presentan, algunas son más complejas de resolver que otras, fuera de la rutina o bien que requieren un proceso más elaborado, es decir, una situación problema. Se puede decir que un problema es una tarea que plantea la necesidad de hallar una solución, sin contar con un procedimiento que la resuelva directamente.

Muchas veces se confunde la resolución de problemas con la resolución de ejercicios o situaciones con contexto que terminan siendo rutinarios para el estudiante, sin algún razonamiento lógico de la situación. Si se desea utilizar la resolución de problemas como estrategia metodológica, la modelización matemática es de gran ayuda.

2.2. Modelización Matemática y modelos matemáticos

Con la modelización, el estudiante tendrá que analizar, experimentar, y evaluar situaciones, y además encontrar un modelo matemático que se ajuste a la situación problema planteada. Así, el estudiante definirá y extenderá sus conceptos matemáticos de una forma interesante, al descubrir la utilidad de sus conocimientos matemáticos para encontrar solución a alguna situación de su interés.

Según Salett & Hein (2004), "Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías."

Como se mencionó anteriormente, al realizar el proceso de modelización matemática, se está buscando un modelo matemático que ayude a visualizar la situación mediante el uso de lenguaje matemático. Para realizar este proceso, se necesitan conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, y además de suficiente intuición y creatividad para la construcción efectiva de un modelo que represente la situación de la mejor manera.

Al aplicar modelización matemática, el estudiante no sólo aprende los contenidos, sino que despierta el sentido crítico y creativo en temas de su interés. Para muchos docentes, la idea de modelización parte de dar libertad al estudiante al elegir un tema de su agrado, realizar una investigación, proponer un problema y elaborar un modelo matemático, de esta forma el estudiante construye su conocimiento y el profesor se convierte en facilitador del proceso.

Sin embargo, en el sistema educativo costarricense no se lleva a cabo de esta forma ya que, según los nuevos programas del MEP, la clase debe iniciar con la propuesta de un problema por parte del profesor y el estudiante debe buscar la estrategia de solución, el docente sigue siendo facilitador, pero el proceso de construcción de aprendizaje del alumno no es completo sino parcial, y en muchas ocasiones la situaciones problema no son de su interés, perdiendo así su atención durante la clase y por consiguiente del aprendizaje de la asignatura.

Por otro lado, algunos factores como la cantidad de contenidos por nivel, horario de clases, número de alumnos por grupo o tiempo, entre otros, hacen que los profesores se pregunten si se podría utilizar la modelización matemática para impartir las lecciones, nosotros creemos que sí se podría, pero no para cada uno de los contenidos del programa, sobre todo por el tiempo que demora el proceso de enseñanza bajo esta metodología.

Una de las ventajas de la modelización matemática es que puede integrar los contenidos matemáticos con otras asignaturas logrando proyectos interdisciplinarios, esto despierta el interés del estudiante por la matemática al ver aplicada la situación problema en un contexto real y propio, lo que facilita la comprensión de los conceptos matemáticos, estimula la interpretación, formulación y resolución de situaciones problema, fortalece la creatividad para realizarlo, desarrolla habilidad en el uso de la tecnología, para investigar y redactar informes, además de la capacidad de trabajar en equipo. Además, permite al profesor realizar actividades más enriquecedoras con el grupo y abordar más objetivos a partir de modelaje de problemas, y así evitar las clases magistrales que algunos estudiantes no comprenden.

La modelización matemática puede utilizarse como método de enseñanza para desarrollar contenidos de una forma diferente, o bien como método de investigación en donde se guía a los estudiantes a construir el modelo de diferentes situaciones cotidianas. En cualquiera de los dos, se requiere de habilidad para aplicarlo en otras áreas del conocimiento, proporcionar al estudiante elementos tanto matemáticos como de la situación problema para que desarrolle su potencial y el pensamiento crítico.

La resolución de problemas está relaciona con la modelización matemática, pero son procesos diferentes con características similares. Ambas se pueden considerar como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de conceptos, la modelización en particular permite describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria mediante el uso de matemáticas, se pueden comprender distintos fenómenos al proporcionar diferentes representaciones y así darles sentido.

Según Salett & Hein (2004) en el proceso de modelización se realizan procedimientos como: la elección del tema; el reconocimiento de la situación problema y la delimitación del problema; familiarización con el tema que se quiere modelar; formulación del problema y las hipótesis; formulación de un modelo matemático y su desarrollo; resolución del problema a partir del modelo propuesto y aplicación del mismo; interpretación de la solución obtenida, y además la validación del modelo y su evaluación. Sin embargo, en este caso particular se realizará una aplicación en la resolución de problemas, utilizando las etapas que se muestran a continuación:

2.3. Construcción del modelo matemático:

2.3.1. ***Formular y comprender el problema:*** tener clara la situación problema que se desea modelar, determinar qué preguntas se quieren responder o qué problema se quiere resolver. Identificar las palabras clave, hacer un dibujo que represente el problema, identificar las unidades en las cuales se debe brindar la solución.

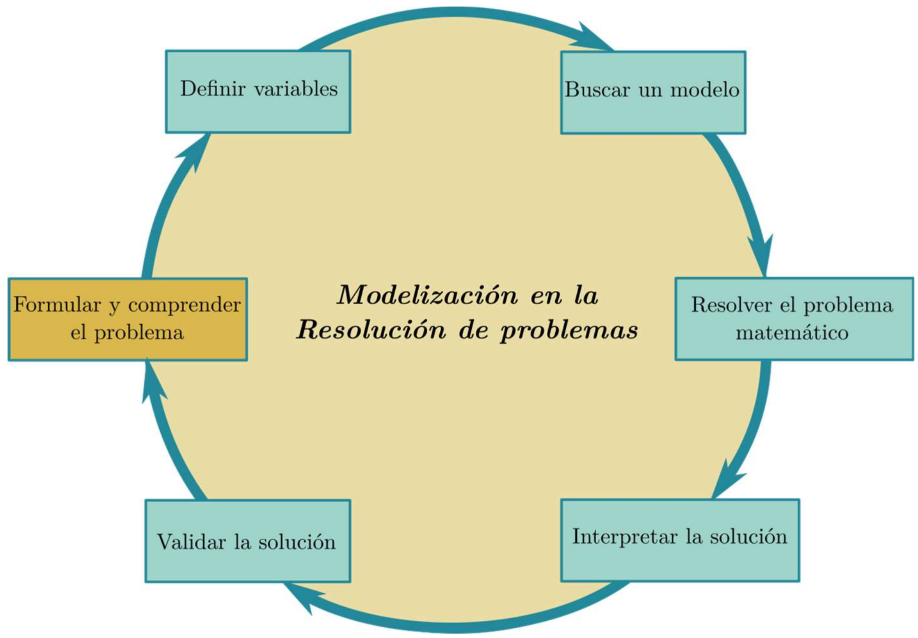
2.3.2. ***Definir variables:*** Identificar y definir las variables que están presentes en el problema, hacer las suposiciones necesarias para entender el problema matemáticamente.

2.3.3. ***Formular el problema en lenguaje matemático (modelar):*** guiar a los estudiantes, tomando en cuenta los conocimientos matemáticos según el nivel en el que se encuentre el estudiante, para que construyan relaciones, ecuaciones o procedimientos que permite dar respuesta al problema. En este punto se puede involucrar el uso de tecnología, utilizando algún programa computacional que permita realizar el modelo que mejor se adapte a la situación problema.

2.3.4. ***Resolver el problema matemático:*** Identificar los valores que resuelven el problema, resolver las ecuaciones u operaciones necesarias para encontrar la solución.

2.3.5. ***Interpretar la solución:*** Representar e interpretar gráfica y analíticamente la solución obtenida y, además, si se utilizó tecnología, comparar los resultados.

2.3.6. ***Validar la solución:*** Verificar que la solución cumple las condiciones iniciales e identificar limitaciones de la solución obtenida, comparando con la situación problema que fue dada al inicio.



3. Metodología de trabajo

El presente taller está dirigido a maestros de primaria y profesores de secundaria, para su realización se requerirá un laboratorio con los programas Excel, Libre Office y GeoGebra (5 y 6, las dos versiones), además de video beam.

Se necesitará que los participantes posean conocimientos básicos sobre GeoGebra y Excel o Libre Office, se desea incentivar el uso de software libre.

Para las actividades con material concreto se necesitarán los siguientes materiales: pabilo o lana, paletas de madera, plastilina, palillos de dientes (1100), tijeras, goma. Las cantidades dependen de la cantidad de personas, lo ideal sería trabajar con un grupo de máximo 30 personas.

4. Guías de trabajo y/o actividades

Actividades propuestas:

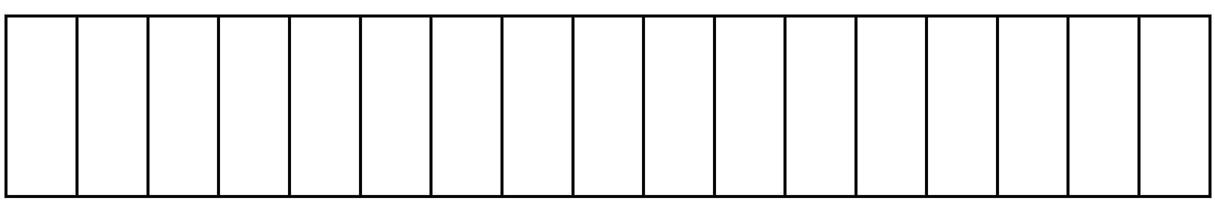
Problema #1: Determine la cantidad aproximada de pasos que usted ha dado el día de hoy.

Solución:

Es claro que los resultados varían para cada persona, pero, como procedimiento general, se espera que los participantes determinen la cantidad de pasos que dan en una distancia corta para luego aproximar la cantidad de kilómetros o metros que han caminado durante el día y así, por multiplicación, hacer un cálculo de los pasos que han dado en total.

Como una segunda parte se podría proponer: Si han caminado n kilómetros (o metros), ¿cuántos pasos habrán dado? Esto se puede hacer para algunos casos particulares y construir una tabla de valores que luego puede ser graficada, incluso algún estudiante podría llegar a responder la pregunta para un n general.

Problema #2: Considere un juego en donde se tiene una fila de cuadrados tal como se muestra en la figura, cada jugador tiene la opción de marcar uno o dos cuadrados en su turno, el ganador es el jugador que al final marque el último cuadro. Determine (si existe) una estrategia ganadora para el juego.



Solución:

Para encontrar la estrategia ganadora se puede dividir el problema en casos más sencillos:

- **<u>Caso de tres cuadros:</u>** Para el caso de tres cuadros es claro que el que juegue de segundo será el ganador, ya que sin importar lo que juegue el primero, él podrá completar de marcar los cuadros.

Así, una estrategia ganadora será lograr que sea el turno del contrincante cuando queden tres cuadros.

- **<u>Caso de seis cuadros:</u>** Para este caso, y teniendo en mente que al quedar tres cuadros entonces el que juegue de segundo gana, se puede notar que la estrategia ganadora vuelve a ser del que juegue de segundo ya que sin importar lo que juegue el primer jugador, el segundo podrá completar de forma que queden sólo tres cuadros y será el ganador.
- **<u>Caso de nueve cuadros:</u>** Ya se empieza a notar un patrón ya que se sabe que al tener 6 cuadros el que juegue de segundo será el ganador y, al tener nueve, entonces no importa lo que juegue el primer jugador, el segundo siempre debe completar para que le queden 6 cuadros y será el ganador.
- **<u>Caso de un número múltiplo de 3:</u>** Se nota entonces que al quedar un número que sea múltiplo de 3 siempre ganará el que juegue de segundo, de esta forma hay que tratar que el otro jugador tenga que jugar un número de cuadros que sea múltiplo de 3.
- **<u>Caso final de los 17 cuadros:</u>** Viendo el procedimiento anterior lo único que tiene que hacer el primer jugador es marcar de forma que al otro jugador le queden un número de cuadros múltiplo de 3. Así, el primer jugador deberá marcar la primera vez 2 cuadros y posteriormente seguir jugando al contrario de su contrincante (buscando siempre completar tres cuadros por jugada).

Note la importancia en este juego de reconocer los múltiplos de 3, estos son los que nos llevan a ganar; de igual forma, si se cambian las reglas del juego y se permiten marcar 1, 2 ó 3 cuadros entonces los números importantes serán los múltiplos de 4 y así sucesivamente.

Problema #3: Se tienen dos presentaciones de cajas de lápices, una caja pequeña que contiene 10 lápices y una caja grande que contiene 10 cajas pequeñas. Suponga que usted tiene 5 cajas grandes, 2 cajas pequeñas y 8 lápices sueltos y tiene que dividir los lápices entre tres profesores, ¿cómo haría la distribución? ¿cuántos lápices le tocó a cada profesor?

Solución:

La manera más simple de realizar la distribución es:

- ⇨ Se le da una caja grande a cada uno de los profesores y sobran dos cajas.
- ⇨ Se sacan las cajas pequeñas de las dos cajas grandes que sobraron.
- ⇨ Ahora se tienen 22 cajas pequeñas por lo que se le dan 7 a cada profesor y sobra una.
- ⇨ Se abre la caja que sobró y se sacan los lápices por lo que ahora se tienen 18 lápices sueltos.
- ⇨ Por último, se le dan 6 lápices a cada profesor

Al final, cada profesor obtuvo 1 caja grande, 7 pequeñas y 6 lápices sueltos, es decir 176 lápices.

Note como este procedimiento es exactamente el que se realiza en el algoritmo de la división, a saber:

$$
\begin{array}{r|l}
528 & \underline{\;3\;} \\
\underline{-3} & 176 \\
22 & \\
\underline{-21} & \\
18 & \\
\underline{-18} & \\
0 &
\end{array}
$$

Problema #4: Se quiere determinar el tiempo que toma para un cubo de hielo derretirse en un vaso de agua, para ello se hace el experimento de llenar varios vasos iguales con la misma cantidad de agua e introducir cubos de hielo de distintos tamaños, se obtienen los siguientes datos[2]:

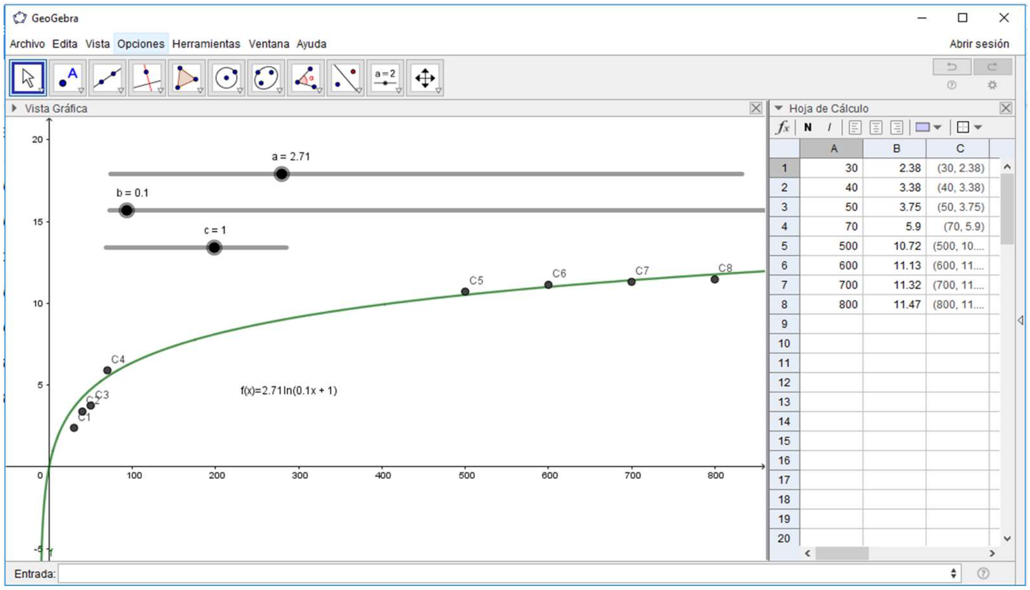
Tamaño (en cm3)	***Tiempo***
30	2 horas, 23 minutos
40	3 horas, 23 minutos
50	3 horas, 45 minutos
70	5 horas, 54 minutos
500	10 horas, 43 minutos
600	11 horas, 8 minutos
700	11 horas, 19 minutos
800	11 horas, 28 minutos

Utilice estos datos para crear un modelo matemático del tiempo que dura un cubo de hielo en derretirse por completo y utilice ese modelo para predecir cuánto durará en derretirse un cubo de hielo de $3000\ cm^3$.

Solución:

Al buscar en GeoGebra una curva que se ajuste aproximadamente a los datos se encontró la función $f(x) = e * ln(0.1x + 1)$

[2] Datos reales tomados de https://es.slideshare.net/debiiMendoza/ejemplo-de-modelizacin-matemtica



	A	B	C
1	30	2.38	(30, 2.38)
2	40	3.38	(40, 3.38)
3	50	3.75	(50, 3.75)
4	70	5.9	(70, 5.9)
5	500	10.72	(500, 10....
6	600	11.13	(600, 11....
7	700	11.32	(700, 11....
8	800	11.47	(800, 11....

De esta forma, un cubo de $3000\ cm^3$ tardará aproximadamente 15 horas y 30 minutos.

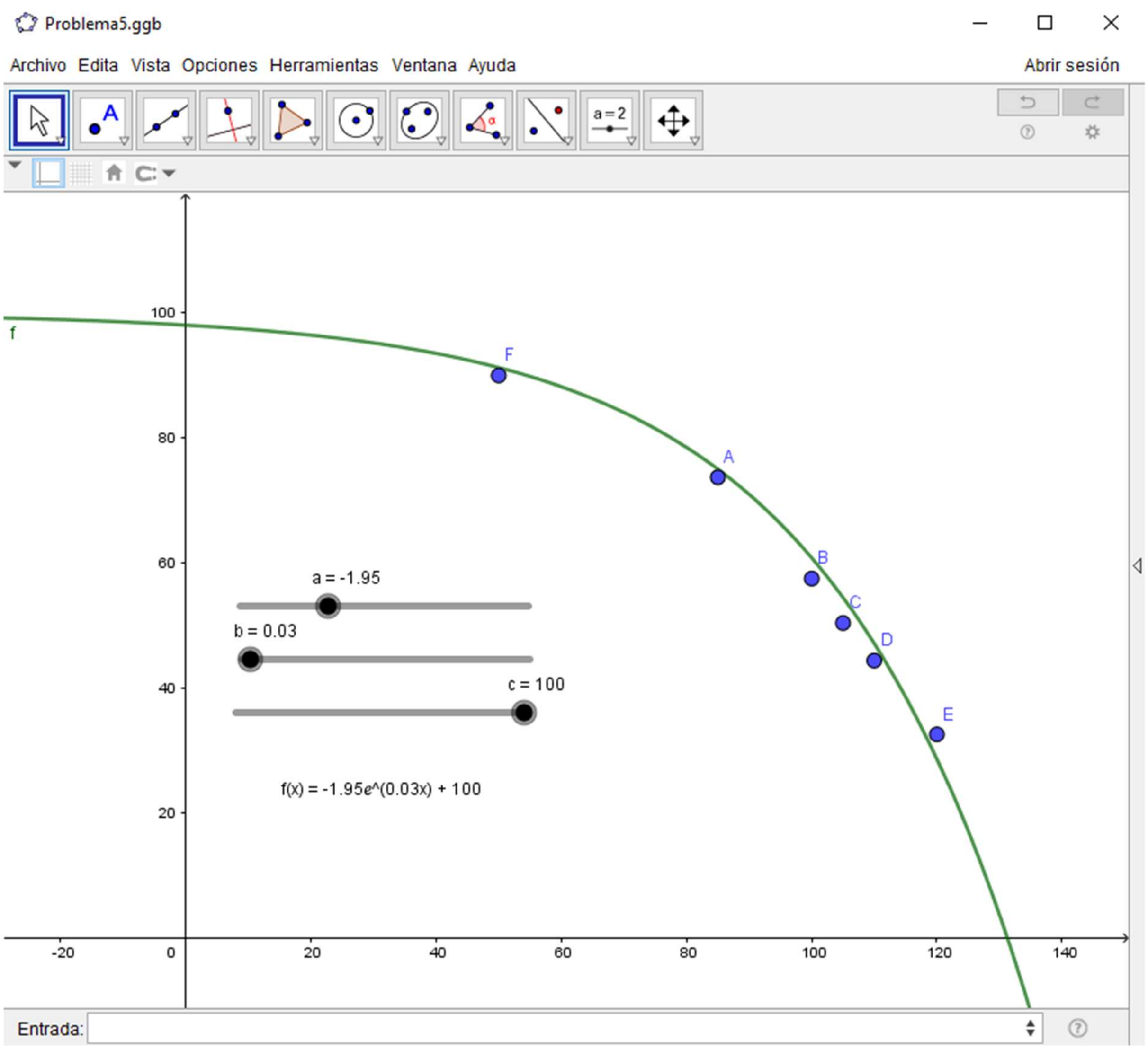
Problema #5: La deforestación ha sido un problema que ha venido aumentando considerablemente en los últimos años. Considere la siguiente imagen en donde se muestra la deforestación en Borneo (Indonesia) entre los años 1950 y 2000. Utilice dicha imagen para aproximar el porcentaje de deforestación en Borneo en 1950, 1985 y 2000, con ello realice un modelo que indique el porcentaje de deforestación de Borneo a lo largo de los años y utilice dicho modelo para pronosticar el porcentaje de deforestación que tendrá Borneo en el año 2020.

(Imagen tomada de http://wald23.altervista.org/news.php?lng=fr&pg=0&id=2)

Solución:

En 1985 se estima que en Borneo se tenía un 73.7 % del territorio cubierto de bosque. En el 2000 este número bajó a un 57.5 %, en el 2005 llegó a ser de 50.4 %, en el 2010 de 44.4 % y se espera que para el 2020 sea de 32.6 % (datos tomados de https://global.mongabay.com/es/rainforests/borneo/).

Con los datos obtenidos se puede crear un modelo en GeoGebra, una posible función matemática para los datos es $f(x) = -1.95 * e^{0.03x} + 100$.



El mapa pronosticado para Borneo en el año 2020 se muestra a continuación:

Problema #6: Mi papá puede pelar 6 papas en 2 minutos, mi mamá pela la misma cantidad de papas en 3 minutos, ¿cuánto durarán si hoy están haciendo el almuerzo juntos para unas visitas y entre los dos tienen que pelar 85 papas? ¿cuántas papas habrá pelado cada uno? Describa un modelo matemático para este problema si se tienen que pelar n papas siendo n un número múltiplo de 5, es decir $n = 5k$, con k en N.

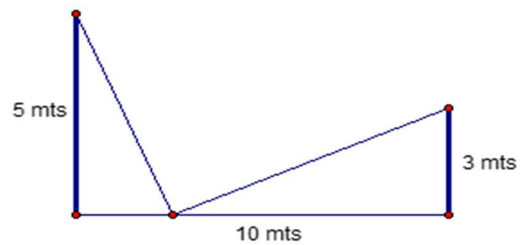
Solución:

Mi papá logra pelar 3 papas por minuto, mientras que mi mamá logra pelar 2 papas por minuto, es decir, entre los dos pueden pelar 5 papas por minuto por lo que en 17 minutos habrán pelado las 85 papas. Mi papá habrá pelado 51 papas mientras que mi mamá habrá pelado 34 papas.

Este es un problema muy interesante, el estudiante debe obtener el promedio de papas que pela cada uno de sus padres por minuto, para esto necesita trabajar con razones, tema que usualmente es complicado para los estudiantes. El contexto es muy cercano al estudiante, además enseña valores como la igualdad y el compañerismo al mencionar que el padre y la madre cocinan juntos.

Por último, se le puede solicitar al estudiante que mencione cuánto durarán sus padres para pelar n papas y lo represente gráficamente utilizando puntos en un sistema de coordenadas.

Problema #7: La distancia entre dos postes de teléfono es de 10 metros (como se muestra en la figura). La longitud de los postes es de 3 y 5 metros respectivamente. Para soportar los postes, un cable desde lo alto de cada poste se sujeta a un punto en la tierra entre ellos. ¿Dónde debe estar el punto para que la longitud del cable sea mínima?



Solución:

Si se llama x a la medida del cateto del triángulo de la izquierda entonces la medida del cateto del triángulo de la derecha medirá $10 - x$, la longitud de la cuerda es

$$d = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + (10 - x)^2}$$

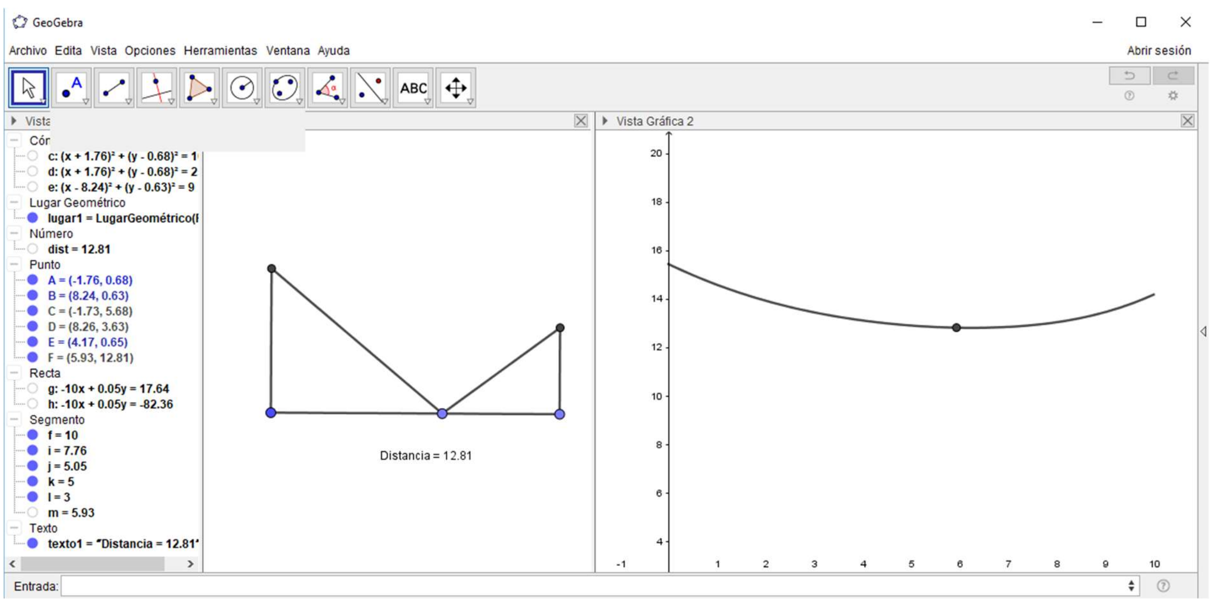
Este ejemplo de optimización se resuelve a un nivel universitario con cálculo, pero en secundaria se puede utilizar esperando que los estudiantes realicen una tabla o una gráfica con algunos datos, también se puede modelar el problema con GeoGebra.

Si se hace una tabla de valores se obtiene:

x	***Distancia***
0	15.44
1	14.59
2	13.93
3	13.45
4	13.11

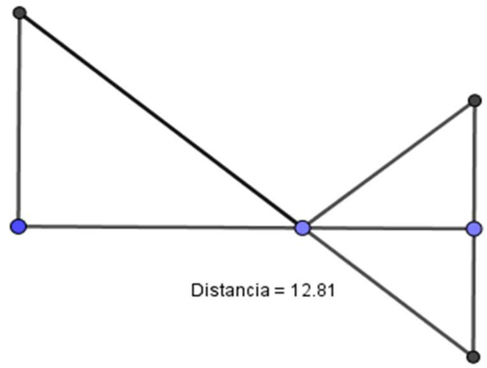
5	12.9
6	12.81
7	12.84
8	13.04
9	13.46
10	14.18

El modelo realizado en GeoGebra se muestra en la siguiente figura:



De estos datos se puede observar que la menor longitud para el cable es de $12.81m$.

Por último, otra forma de resolver este problema es con geometría básica, si se analiza con uno de los postes del lado opuesto entonces la solución se obtiene como el segmento que une los postes.



Así, por semejanza,

$$\frac{5}{x} = \frac{3}{10 - x}$$

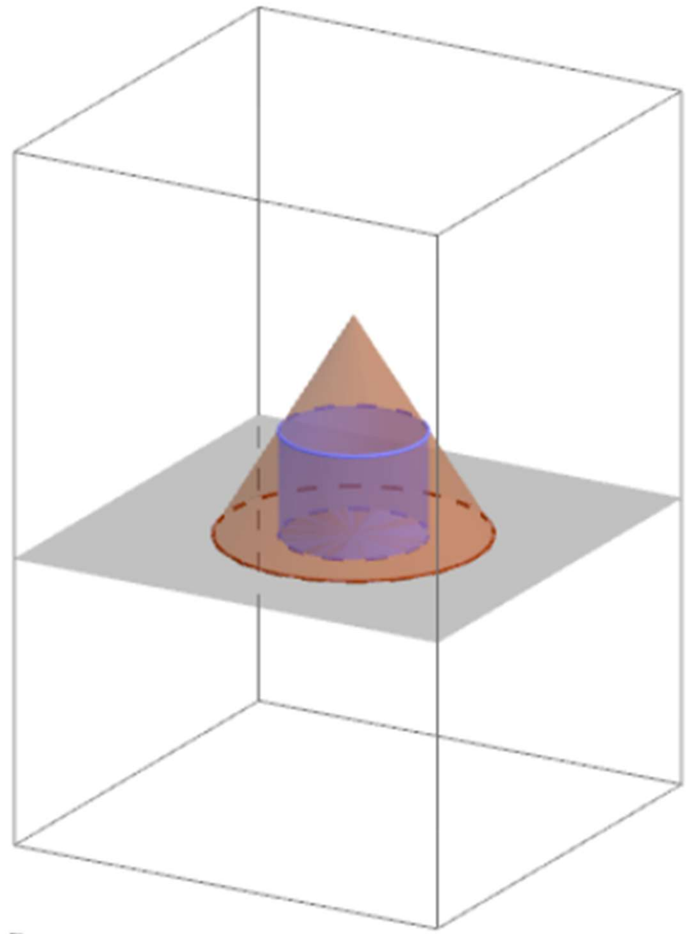
$$\Rightarrow 50 - 5x = 3x$$

$$\Rightarrow \ 8x = 50$$

$$\Rightarrow x = \frac{50}{8} = 6.25$$

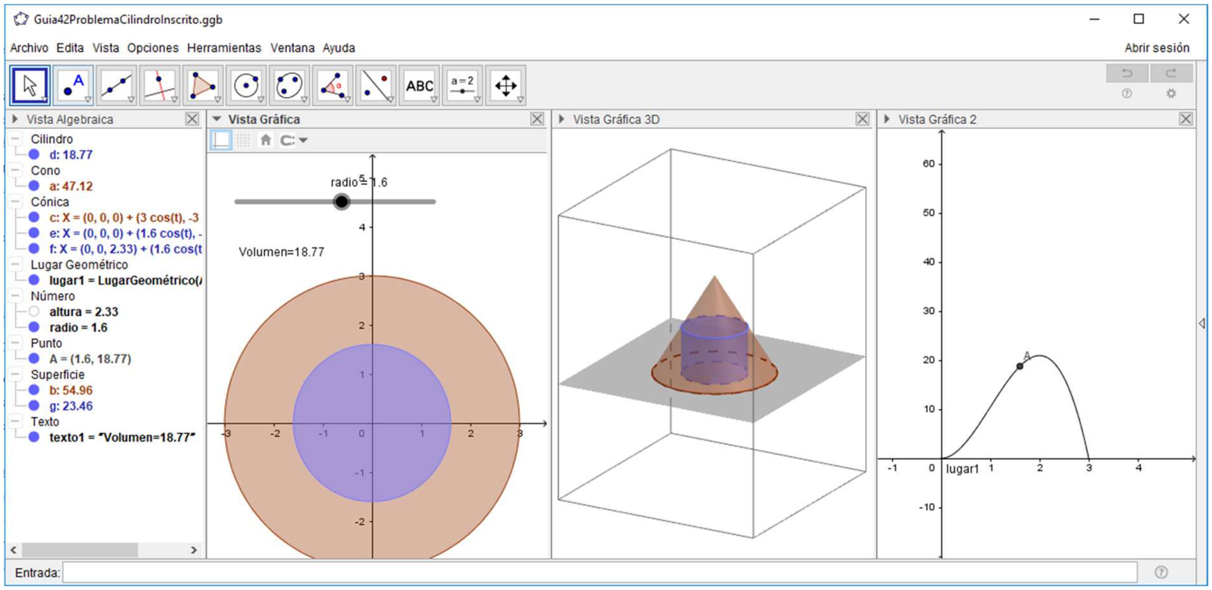
Con este valor de x se obtiene como la distancia 12.806.

Problema #8: Un cilindro circular recto se inscribe dentro de un cono de radio 3 cm y altura 5 cm. Determine el cilindro con mayor volumen que se puede inscribir.



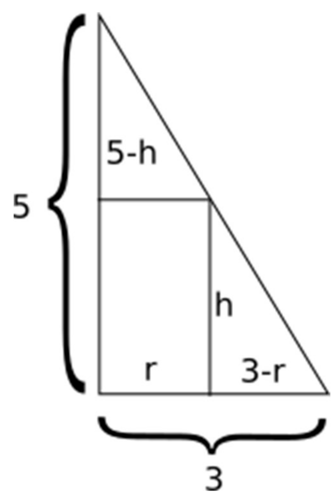
Solución:

En este caso también es posible realizar un modelo en GeoGebra del problema (ver figura), de donde se puede obtener que el máximo es cuando el radio es $2\ cm$ con un volumen de $20.94\ cm^3$.



También es posible plantear el problema como una expresión matemática y evaluar algunos valores para aproximar la solución.

Note que se da una semejanza de triángulos



De acá $\frac{5}{3} = \frac{h}{3-r} \Rightarrow \text{h} = \frac{5(3-\text{r})}{3}$

Por lo que el volumen del cilindro es $V = \pi * r^2 * h = \pi * r^2 * \frac{5(3-r)}{3}$, de aquí se puede aproximar la solución mediante una tabla de valores y la gráfica.

r	*Volumen*
0	0
0.5	3.27
1	10.47
1.5	17.67
2	20.94
2.5	16.36
3	0

La solución también exacta se obtiene mediante cálculo que se sale de los objetivos de este taller.

Problema #9: Un bote parte de un muelle a las $1{:}00\ p.m.$ y viaja hacia el sur a $15\ km/h$. Otro bote se dirige hacia el este a $10\ km/h$ y llega al mismo muelle a las $3{:}00\ p.m.$ ¿A qué hora estuvieron más cerca entre sí los dos botes?

Solución:

Sea t el tiempo transcurrido en horas después de la $1{:}00\ p.m.$

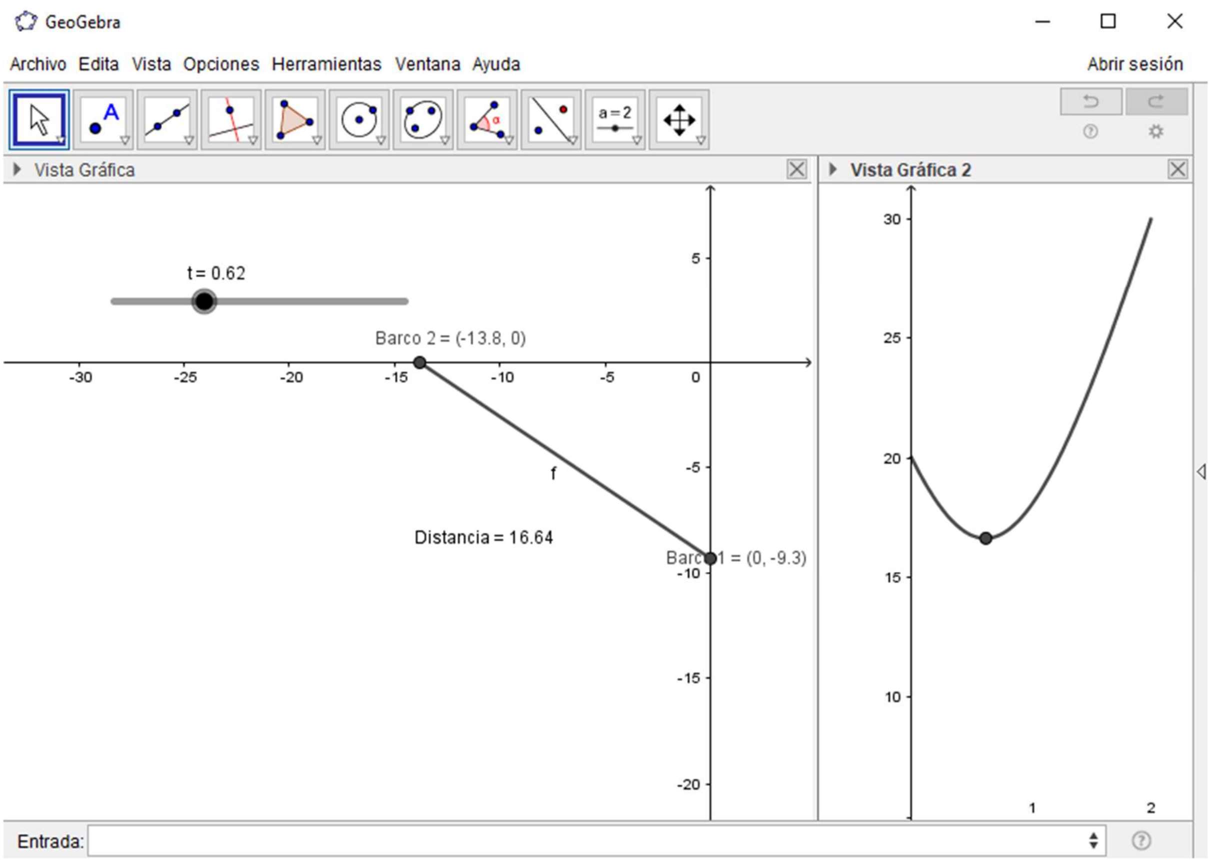
El primer barco se encuentra a una distancia de $15t\ km$ del puerto.

El segundo barco se encuentra a $20 - 10t\ km$ del puerto.

Las rutas de los barcos forman un triángulo rectángulo en donde la distancia que se debe minimizar es la hipotenusa de dicho triángulo, es decir, se quiere minimizar

$$d = \sqrt{(15t)^2 + (20 - 10t)^2}$$

De igual forma que en los problemas anteriores se puede realizar un modelo en GeoGebra (ver figura) de donde se obtiene que los barcos estarán más cerca a las 0.62 horas $(1{:}\,37\ p.m.)$ y es de $16.64\ km$.



Mediante una tabla se puede obtener un valor aproximado:

t	*Distancia*
0	20
0.5	16.77
1	18.03
1.5	23.05

2	30

En donde se nota que la solución está entre 0 y 1, se puede afinar más la búsqueda:

0	20
0.1	19.06
0.2	18.25
0.3	17.59
0.4	17.09
0.5	16.77
0.6	16.64
0.7	16.71
0.8	16.97
0.9	17.41
1	18.03

Por lo que un valor aproximado es 0.6 con una distancia de $16.64\ km$, esta se pudo haber mejorado utilizando una tabla con valores más seguidos entre 0.5 y 0.7.

5. Referencias bibliográficas

Borneo (s.f.). Recuperado de: https://global.mongabay.com/es/rainforests/borneo/

Ejemplo de Modelización (s.f.). Matemática. Recuperado de: https://es.slideshare.net/debiiMendoza/ejemplo-de-modelizacin-matemtica

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio en matemática para la educación general básica y el ciclo diversificado. San José, Costa Rica: Autor

Nouvelle (s.f.). Recuperado de: http://wald23.altervista.org/news.php?lng=fr&pg=0&id=2

Salett Biembengut, Maria; Hein, Nelson; (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática, agosto, 105-125.