Acercamiento Geométrico a las Ecuaciones de Segundo Grado con GeoGebra

Ruiz Hidalgo, Juan Francisco[1] jfruiz@ugr.es
Lupiáñez Gómez, José Luis[1] lupi@ugr.es

Resumen

La introducción de la Historia de la Matemática como elemento del currículo de Educación Secundaria, obliga a una reflexión por parte del profesorado y un esfuerzo por incluir elementos de la misma dentro de las apretadas programaciones de matemáticas. Tomando como referencia algunas de las proposiciones del libro II de los Elementos de Euclides y conjugándolas con GeoGebra, proponemos un acercamiento a las ecuaciones de segundo grado a través de las relaciones dinámicas entre figuras rectilíneas. Esta actividad permite que los estudiantes se involucren, de una manera novedosa, en el estudio de unas ecuaciones que tienen gran presencia en las matemáticas escolares.

1. Introducción

Varios trabajos de investigación sobre el papel que puede jugar la Historia de la Matemática en la enseñanza de esta disciplina, han destacado que puede suministrar modos de instrucción, ofrece soluciones alternativas a problemas, permite obtener y explorar información sobre las dificultades de los escolares y enfatiza determinados factores afectivos y emocionales (Lupiáñez, 2002). Nuestra propuesta, centrada en el trabajo de Euclides, se relaciona con las dos primeras cualidades en conjunción con las posibilidades que brinda GeoGebra para la elaboración de construcciones geométricas dinámicas y para el estudio de actividades y problemas algebraicos.

El tratado “Elementos” de Euclides ha sido uno de los más estudiados y ha ejercido una enorme influencia sobre el pensamiento científico, determinando la enseñanza de la geometría desde su elaboración hasta hoy. A pesar del comentario de Proclo “*Los Elementos contienen una guía incostestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría*” (Proclo, Comentarios 70, 16-18), los Elementos no está dedicado exclusivamente a la geometría, sino que además contiene proposiciones sobre teoría de números y álgebra elemental tratada geométricamente.

Aunque el álgebra no aparece en el texto tal y como hoy la conocemos, en la mayoría de los textos de Historia de la Matemática se encuentra la expresión “álgebra geométrica griega” para referirse a la aplicación o transformación de áreas. Esta aplicación de áreas consiste en transformar figuras geométricas en otras (principalmente paralelogramos o triángulos en paralelogramos) de área similar y distinta forma.

La parte esencial en la transformación de áreas es el libro II, con catorce proposiciones dedicadas a los cuadrados y los rectángulos. De todas estas proposiciones, las diez primeras se suelen presentar en la mayoría de los textos con notación algebraica actual. Entre ellas, aparecen la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma o el cuadrado de la suma. Pero son las proposiciones II.5 y II.6 las que facilitan técnicas para lo que conocemos en la actualidad como resolver

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

ecuaciones de segundo grado, a pesar de que en sí mismas estas proposiciones no son construcciones sino demostraciones de relaciones entre áreas. Para encontrar construcciones propiamente dichas hay que leer hasta las proposiciones II.11 y II.14.

En diversos libros de Historia de la Matemática (Boyer, 1994) se puede leer cómo, partiendo de una ecuación de segundo grado del tipo $x^2+b^2=ax$, se construye geométricamente una solución basándose en las proposiciones anteriormente citadas.

Nuestra intención en este trabajo es acercar dicha construcción al alumnado de Educación Secundaria Obligatoria mediante GeoGebra. Para ello, construiremos las soluciones de la ecuación $x^2+b^2=ax$ y realizaremos dos comprobaciones de su veracidad: una dinámica y la otra mediante el Teorema de Pitágoras. Queremos destacar que, además de esa ecuación, mediante construcciones similares se pueden resolver los tres tipos de ecuaciones de segundo grado que se obtienen al considerar sólo números positivos, esto es, (1) $x^2+b^2=ax$, (2) $x^2=ax+b^2$ y (3) $x^2+ax=b^2$. La primera es consecuencia de la proposición II.5 y las dos siguientes de la II.6.

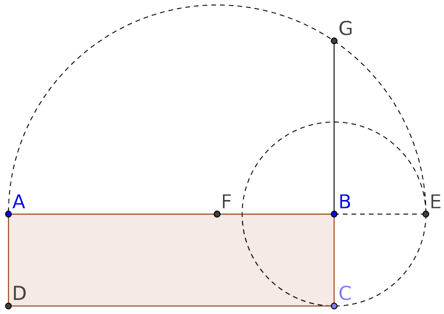
Otra consideración importante es que, en la actualidad, el alumnado no se encuentra las ecuaciones escritas en ninguna de las formas anteriores. Concretamente, una ecuación cuadrática aparecerá en la forma $x^2+ax+c=0$. Será necesario tener en cuenta que los griegos en ningún momento podía igualar una suma de áreas a cero y que, obligados por la construcción, necesitaremos trabajar con la raíz cuadrada del término independiente. Esto nos obligará a introducir, como primer elemento, la raíz cuadrada de un número o, más exactamente, la raíz cuadrada de un segmento de recta.

2. Raíz Cuadrada de un Segmento

La raíz cuadrada, tan usual en las aulas de matemáticas y que tantos quebraderos de cabeza provoca en el alumnado, está esencialmente ligada a su representación numérica o de operador. En pocas ocasiones, más como curiosidad que como contenido, se considera su representación geométrica como elemento de aprendizaje. Sin embargo, como es bien conocido y está implícito en su nombre, la raíz cuadrada de un número tiene un origen geométrico y práctico necesario para el cálculo de medidas, particularmente, para la división de tierras de cultivo.

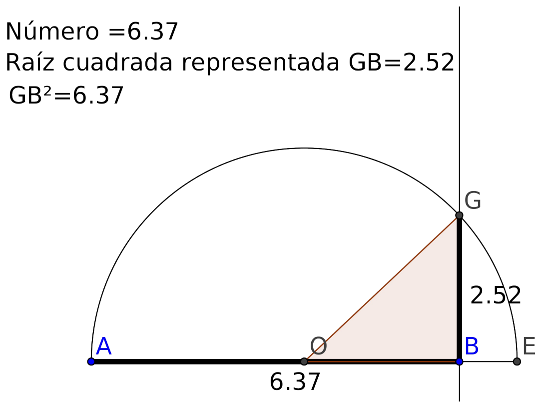
Se puede encontrar una primera abstracción de la raíz cuadrada en los Elementos donde es tratada como parte de la transformación de áreas desligándola de todo contacto con el mundo real. Euclides da los pasos necesarios para, partiendo de cualquier figura rectilínea, construir un cuadrado de área igual a la figura original. Usando términos actuales, el problema que se resuelve en la proposición II.14, es: “dado un número positivo, calcular su raíz cuadrada”. Es importante resaltar que, para Euclides, una longitud no es lo mismo que un área y que si las cantidades vienen dadas por segmentos de recta, las áreas han de venir determinadas por figuras rectilíneas. Esta homogeneidad es importante e implica que el proceso de calculo de una raíz cuadrada requiere trabajar con áreas y sus transformaciones, pues un número será una longitud y su cuadrado ya no será un número, sino un área. De la misma forma, un cuadrado siempre será un área y una raíz cuadrada será un segmento.

Tras estas consideraciones, se puede describir el proceso de creación propuesto por Euclides. Partiendo de una figura rectilínea de área S, tras dividirla en triángulos y con la ayuda de las proposiciones I.45, I.44 y I.42 de cada triángulo se crea un paralelogramo (que puede ser un rectángulo) que tenga la misma área y se anexan uno con otro. Sobre la figura siguiente, una vez construido el rectángulo *ABCD* de área S, si es un cuadrado se termina la demostración. Si no lo es, se prolonga el lado mayor (*AB* en este caso) del rectángulo la longitud del menor y se traza la semicircunferencia cuyo diámetro es el nuevo segmento (*AE*). El lado menor (*BC*) se prolonga hasta intersectar a la semicircunferencia (punto *G*). El cuadrado cuyo lado es *BG* tiene la misma área que *ABCD*.



La demostración no es trivial tanto por la cantidad de pasos como por lo aparentemente lejano que tiene una demostración geométrica para nuestros enfoques aritmético-algebraicos. Sin embargo, la construcción actualizada de este método de cálculo de la raíz cuadrada e incluso la demostración, pueden ser perfectamente asimilables por un alumno de secundaria. Bastaría con actualizar el lenguaje, aceptar el concepto de número como segmento y, por supuesto, utilizar el Teorema de Pitágoras (proposición I.47).

Dado un número *S*, trazar un segmento de longitud *S*, *AB*. Prolongarlo una unidad hasta *E*. Trazar la semicircunferencia de diámetro *AE*. Trazar la perpendicular a *AB* que pase por *B* e intersecarla con la semicircunferencia en el punto *G*. La longitud *BG* es la raíz cuadrada de *S*:



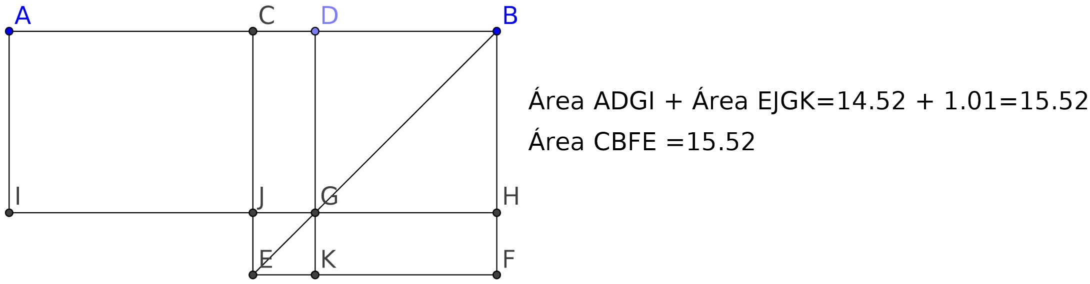
Una primera demostración, a la que llamaremos dinámica, consiste en sencillas comprobaciones numéricas con GeoGebra. Una segunda demostración, basada en el Teorema de Pitágoras, sería: sea *O* es el punto medio de *AE*, es decir, el centro de la semicircunferencia, el triángulo *OGB* es rectángulo. Por tanto, $BG^2=OG^2-OB^2$. Puesto que *OG* es *(S+1)/2* y *OB=(S+1)/2 - 1*, *BG2=S*, luego, BG es la raíz cuadrada de S (ver figura anterior).

3. Una Ecuación de Segundo Grado

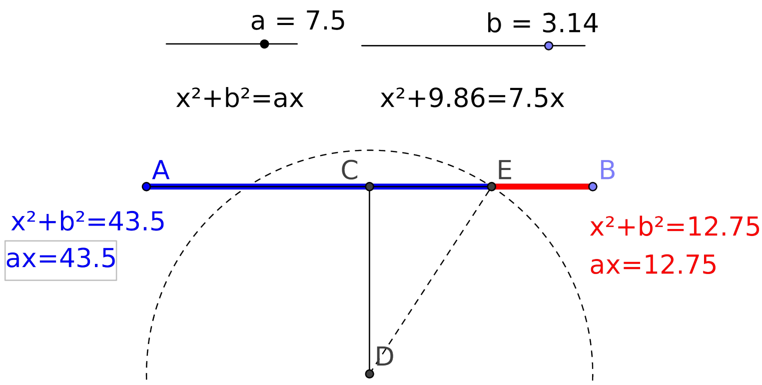
Mediante la Proposición I.11 (*dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante*) se puede resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2=a(a-x)$, usando la proposición II.6. Ésta, junto con la II.5, permiten afrontar la resolución de las ecuaciones cuadráticas (1), (2) y (3) citadas anteriormente. Centraremos nuestra atención en la II.5 para detallar todos los pasos; el uso de la II.6 es similar.

Proposición II.5. Si se corta una línea recta en iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Lo que indica la proposición es que el rectángulo *ADGI* más el cuadrado *EJGK* tienen el mismo área que el cuadrado *CBFE*. O, dicho de otro modo, los rectángulos *ACJI* y *DBFK* tienen el mismo área. La demostración dinámica es sencilla:



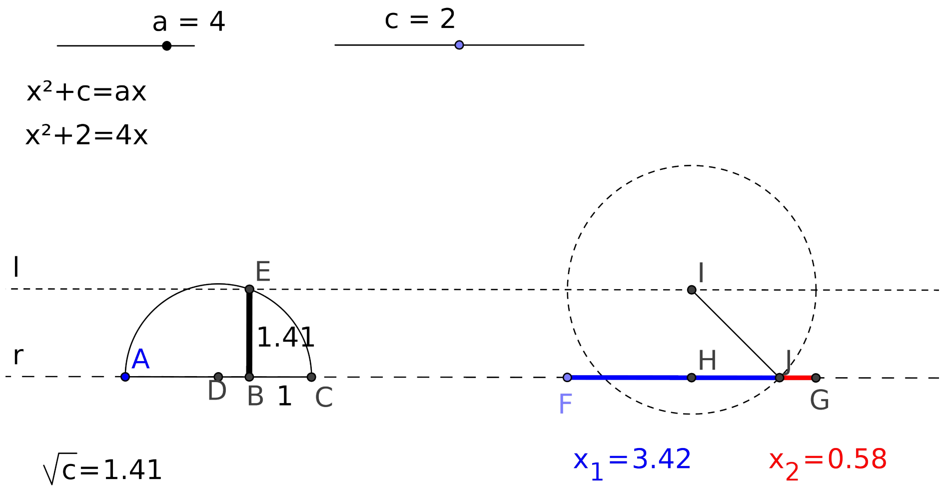
La utilidad práctica que se le daba a este problema (resuelto numéricamente por los babilonios), era la de dividir un segmento en dos partes de forma que el producto de éstas tenga un valor determinado. En nuestro lenguaje, si *AB*=*a* es el segmento que se pretende dividir en dos partes *x* e *y*, y *b* es el área que se quiere obtener con dichas secciones, se puede escribir: $x+y=a$ y $xy=b$; despejando se obtiene $x^2+b^2=ax$, una de las ecuaciones canónicas. El procedimiento de construcción es sencillo. Se traza un segmento *AB* de longitud *a* y se divide en dos partes por el punto *C*. Sobre *C* se traza el segmento perpendicular a *AB* de longitud raíz cuadrada de *b*, hasta el punto *D*. Se dibuja la circunferencia de centro *D* y de radio *a/2* y el punto de intersección *E* con el segmento *AB* determina las soluciones, de manera que, *AE* es una de ellas y la otra *EB:*



Es importante llamar la atención sobre las condiciones que debe cumplir *b* en función de *a*. Para que exista solución real, el parámetro *b* debe ser menor que la mitad de *a/2*. En la figura siguiente se observa claramente que si no se satisface dicha condición, la intersección de la circunferencia de centro *D* y radio *a/2* no intersecaría con *AB*. Una demostración algebraica pasa por considerar *DE*=*a/2*, *CE*=*a/2 - x* y *CD*=*b* y aplicar el Teorema de Pitágoras. Otra de las ventajas del enunciado original de la ecuación es que, puesto que lo que se pretendía era dividir un segmento en dos partes y se ha encontrado una de ellas, la segunda será *AE* (ver figura anterior).

4. Una Construcción Conjunta: la Resolución de $x^2+c = ax$

Para realizar esta construcción el primer inconveniente es que el término independiente no es un número cuadrado y, como se ha visto en el epígrafe anterior, es necesario representar su raíz cuadrada. Para poder conjugar la construcción de la raíz cuadrada con la de las soluciones de la ecuación, se realizará una figura doble, en paralelo, en la que primero se construye la raíz para después trasladarla a la figura de la ecuación.



5. Conclusiones

El proceso de construcción de raíces cuadradas y resolución de ecuaciones cuadráticas con GeoGebra es sencillo, lo cual permite introducirlo como parte de las actividades de esos temas. A partir de la representación de la raíz cuadrada, con la construcción de las soluciones de la ecuación o con la combinación de ambas, se puede sugerir la elaboración de construcciones para otros tipos de ecuaciones cuadráticas.

Con este tipo de actividades, no sólo se aborda la resolución de algunas ecuaciones de segundo grado, sino que se reinterpretan geométricamente sus elementos, además de profundizar en el uso de figuras geométricas del plano y del Teorema de Pitágoras propuestas. De esta manera, el alumnado trabajará elementos que usualmente no relaciona y explorará problemas clásicos de la Historia de la Matemática con el uso de GeoGebra, relacionando esos problemas con los contenidos y procedimientos que actualmente conforman el currículo.

Referencias

1. C. B. Boyer (1994): *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.
2. Euclides (1991): *Elementos.* Editorial Gredos, Madrid.
3. J. L. Lupiáñez (2001): *Reflexiones Didácticas Sobre la Historia de la Matemática*. SUMA, 40.