Revista de Educación Matemática
Volumen 35, N° 1 (2020), páginas 61 – 76
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

SOBRE EL JUEGO SOLITARIO SENKU

Ricardo A. Podestá

Resumen. En este artículo nos ocupamos del juego solitario *Senku*. Mostraremos, usando un poco de álgebra, que la versión inglesa del juego tiene solución en el centro (dada por de Bruijn en 1972) y que la versión francesa no la tiene. Seleccionamos de la literatura del tema algunas soluciones interesantes, simétricas y la más cortas posibles.

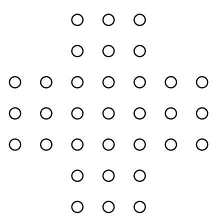
Abstract. In this article, we deal with the Peg solitaire *Senku in Argentina* game. We show, using some algebra, that the english version of the game has a solutionn on the center (given by de Bruijn in 1972) and that the french version does not have a solution. From the literature on the topic, we select some interesting solutions , simetric ones and the shortest possible ones.

The solution often turns out more beautiful than the puzzle
Richard Dawkins

Once I get on a puzzle, I can't get off
Richard P. Feynman

§1. El juego

El juego que nos ocupa es muy popular y es conocido en Argentina como *Senku* o *solitario* o *uno solo* (también *peg solitaire* o *brainvita* en otros países). Muchos de nosotros seguramente hemos pasado unas cuantas horas de niños tratando de resolverlo. Éste, se juega por una sola persona con 32 peonzas en un tablero con 33 agujeros como éste



Palabras clave: Senku, juegos, solitarios, cuerpos finitos, movidas, paquetes, purgas.
Keywords: Peg solitaire, game, finite fields, moves, packages, purges.

Esta es en realidad la versión inglesa del juego, ya que existe también la versión europea o francesa, que se juega con las mismas reglas pero en un tablero ligeramente distinto con 37 agujeros (4 adicionales):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \circ & \circ & \circ & & \\
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\
 & & \circ & \circ & \circ & &
\end{array}$$

Existen otras variantes menos usuales para el tablero como la continental de 41 agujeros (diamante) y la versión alemana de 45 agujeros (Wiegleb):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \circ & & & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \\
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\
 & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & & & \circ & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & &
\end{array}$$

No es necesario disponer de la versión comercial. Todas estas variantes pueden jugarse en tableros de damas 10×10 (o de ajedrez 8×8, los 2 primeros) con las piezas o fichas en lugar de las peonzas (cubriendo casillas sobrantes), o bien con bolitas o piedras y agujeros en la tierra, o bien puede dibujarse el tablero en una cartulina y usar monedas, fichas, bollitos de papel o cualquier otra cosa.

La posición inicial del juego es con todos los agujeros ocupados por las peonzas, salvo el central:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & &
\end{array} \tag{1.1}$$

Cada movimiento consiste en, dadas 2 peonzas contiguas horizontal o verticalmente y un lugar vacío al lado de una de ellas, "saltar" con la peonza más alejada del lugar vacío ocupando dicho espacio y retirando la peonza que es saltada (no están permitidos saltos diagonales). Por ejemplo, si denotamos por $\bullet$ a un agujero ocupado por una peonza y por $\circ$ a un agujero libre, lo siguiente representa un movimiento permitido o *movida*

$$\bullet\bullet\circ \quad \to \quad \circ\circ\bullet \tag{1.2}$$

Los saltos múltiples, cuando son posibles, cuentan como una única movida. Por ejemplo, el siguiente salto doble es una sola movida

$$\begin{array}{lll} \circ & & \\ \bullet & & \\ \circ & \bullet & \bullet \end{array} \;\to\; \begin{array}{lll} \circ & & \\ \bullet & & \\ \bullet & \circ & \circ \end{array} \;\to\; \begin{array}{lll} \bullet & & \\ \circ & & \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \tag{1.3}$$

El juego se acaba cuando no hay movidas legales posibles. Para ganar, sólo debe quedar una peonza en el tablero. En este punto, se invita al lector que no conocía el juego, a dedicarle un buen tiempo a familiarizarse con él e intentar resolverlo por su cuenta.

El tablero es simétrico horizontal, vertical y diagonalmente, por lo que cada solución genera otras 7 por simetría. El juego tiene cierta dificultad. Notar que hay

$$2^{33} = 8.589.934.592$$

posiciones posibles de peonzas en el tablero, aunque no todas pueden ser obtenidas como una sucesión de jugadas legales. El número total de sucesiones de juego posibles es $577.116.156.815.309.849.672$, de las cuales $40.861.647.040.079.968$ son soluciones (esto se hace por búsquedas a fuerza bruta con computadoras). Es decir que la proporción de juegos en que se gana sobre el total es

$$\frac{40.861.647.040.079.968}{577.116.156.815.309.849.672} = 0{,}00007080315$$

o sea de solamente un $0{,}00708315\,\%$.

Pregunta: ¿cuáles son los posibles lugares que puede ocupar la peonza que resta cuando se gana el juego?

§2. El cuerpo $\mathbb{F}_4$

Sorprendentemente, la respuesta que daremos a la pregunta planteada más arriba requerirá el uso del cuerpo finito de 4 elementos. Pero, ¿qué es esto del cuerpo de 4 elementos? Todos sabemos lo que es un cuerpo y estamos familiarizados con ellos. Un cuerpo es un conjunto K con 2 operaciones, llamadas suma y producto, que denotamos por $+$ y $\cdot$, de modo tal que tanto K con la suma y $K^* = K \smallsetminus \{0\}$ con el producto son grupos abelianos. Es decir, las operaciones $+$ y $\cdot$ son asociativas y conmutativas, la suma tiene elemento neutro 0, el producto tiene elemento identidad $1 \neq 0$, y todo elemento no nulo x tiene opuesto $-x$ e inverso x^{-1}, es decir

$$x + (-x) = 0 \qquad \text{y} \qquad x \cdot x^{-1} = 1.$$

Ejemplos de cuerpos son los números racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$, aunque son cuerpos infinitos.

Existen cuerpos finitos. El ejemplo típico son los enteros módulo un primo p,

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\} \quad \text{mód } p.$$

En efecto, como k es coprimo con p, para todo $0 \leq k \leq p-1$ existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $ak + bp = 1$, de donde

$$ak \equiv 1 \pmod{p}.$$

Es decir, a es el inverso de k en $\mathbb{Z}_p$. Por ejemplo, los cuerpos más pequeños son $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ y $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$, con la suma y el producto dados respectivamente por las siguientes tablas:

$\mathbb{Z}_2$:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

y

$\mathbb{Z}_3$:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Más aún, es fácil ver que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo si y sólo si n es primo.

Ya sabemos que $\mathbb{Z}_4$ no es un cuerpo, pues 4 no es primo. En efecto, 2 no es inversible pues $2 \cdot 2 = 0$ en $\mathbb{Z}_4$. ¿Existe un cuerpo de 4 elementos? ¿Podemos construirlo? Consideremos el conjunto

$$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$$

donde ω es la raíz cúbica primitiva de la unidad

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i \sin(\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

O sea que ω es raíz de $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Notar que, como $\omega \neq 1$ se cumple

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Definamos en $\mathbb{F}_4$ las operaciones de suma y producto de la siguiente forma

$\mathbb{F}_4$:

$+$	0	1	ω	ω^2
0	0	1	ω	ω^2
1	1	0	ω^2	ω
ω	ω	ω^2	0	1
ω^2	ω^2	ω	1	0

$\cdot$	0	1	ω	ω^2
0	0	0	0	0
1	0	1	ω	ω^2
ω	0	ω	ω^2	1
ω^2	0	ω^2	1	ω

donde se usa que $\omega^3 = 1$, $\omega^2 = \bar{\omega}$ y $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. O sea se tienen las relaciones

$$\omega^2 = \omega + 1 \qquad \text{y} \qquad \omega^2 + \omega = 1.$$

Es fácil chequear de estas tablas, que $\mathbb{F}_4$ con estas operaciones ¡resulta un cuerpo!

§3. La respuesta

La siguiente respuesta, muy elegante, a la pregunta de la Sección 1 fue dada por de Bruijn en 1972 (de Bruijn, 1972). La idea de éste fue identificar al tablero del Senku con puntos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con el origen $(0,0)$ en el agujero central y usar el cuerpo $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Es decir, identificamos el tablero del solitario con el conjunto

$$\mathcal{T} = ([-3,3]\times[-1,1]) \cup \big([-1,1]\times[-3,3]\big).$$

A cualquier conjunto de peonzas lo llamaremos una *situación*. Si $X \in \mathcal{T}$ es una situación definimos las sumas

$$A(X) = \sum_{(x,y)\in X} \omega^{x+y} \in \mathbb{C}, \qquad B(X) = \sum_{(x,y)\in X} \omega^{x-y} \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

donde las operaciones $x \pm y$ se realizan en $\mathbb{F}_4$.

Notar que si la situación Y se obtiene de X luego de una movida, entonces

$$A(X) = A(Y) \qquad \text{y} \qquad B(X) = B(Y). \tag{3.2}$$

Por ejemplo, si la movida es un salto horizontal a la derecha, como en (1.2), entonces reemplazamos las peonzas (x,y) y $(x+1,y)$ por $(x+2,y)$. La contribución de estas peonzas a la situación vieja X es

$$\omega^{x\pm y} + \omega^{x+1\pm y},$$

mientras que la contribución a la situación nueva Y es $\omega^{x+2\pm y}$ (donde el $+$ es para $A(X)$ y el $-$ es para $B(X)$). Pero tenemos

$$\omega^{x+y} + \omega^{x+1+y} = \omega^{x+y}(1+\omega) = \omega^{x+y}\omega^2 = \omega^{x+2+y}. \tag{3.3}$$

Luego, $A(X) = A(Y)$ en este caso. Los casos restantes (horizontal a la izquierda y verticales) son similares y dejamos su verificación como ejercicio para el lector. Así, el par $(A(X), B(X))$ es invariante por cualquier movida, o sea que se mantiene constante durante todo el juego.

Existen 16 pares (x,y) con $x, y \in \mathbb{F}_4$ y todos pueden ocurrir como valores de los pares $(A(X), B(X))$, como se muestra en el siguiente cuadro (¡chequear!)

○ ○ ○ ○	$(0,0)$	● ○ ○ ●	$(0,1)$	○ ● ● ●	$(0,\omega)$	● ● ● ○	$(0,\omega^2)$
● ○ ● ●	$(1,0)$	○ ○ ● ○	$(1,1)$	● ● ○ ○	$(1,\omega)$	○ ● ○ ●	$(1,\omega^2)$
○ ● ● ○	$(\omega,0)$	● ● ● ●	$(\omega,1)$	○ ○ ○ ●	(ω,ω)	● ○ ○ ○	(ω,ω^2)
● ● ○ ●	$(\omega^2,0)$	○ ● ○ ○	$(\omega^2,1)$	● ○ ● ○	(ω^2,ω)	○ ○ ● ●	(ω^2,ω^2)

Sabemos que el valor inicial y final de las funciones $A(X)$ y $B(X)$ coinciden, es decir $(A(X_i), B(X_i)) = (A(X_f), B(X_f))$. Es fácil ver que el valor inicial del juego para estas funciones es

$$A(X_i) = B(X_i) = 1.$$

En efecto, basta ver que cualquier conjunto de 3 peonzas consecutivas aportan 0 tanto a $A(X_i)$ como a $B(X_i)$, pero esto ya lo sabemos de (3.3). Luego, mirando la posición inicial en (1.1) podemos pensar que sólo queda el aporte de las peonzas en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ (tomando por ejemplo las filas horizontales de 3 en el centro y las verticales restantes a los costados). Pero el aporte de estas 2 peonzas es

$$\omega^{-1} + \omega = \omega^2 + \omega = 1.$$

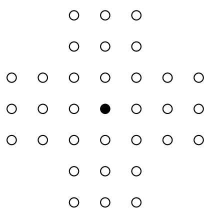
Supongamos que ganamos el juego, o sea solo queda una peonza en (x, y). Sabemos por lo dicho antes que

$$A(X) = \omega^{x+y} = 1 \qquad \text{y} \qquad B(X) = \omega^{x-y} = 1.$$

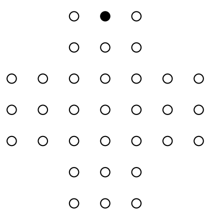
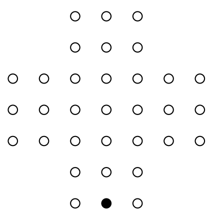
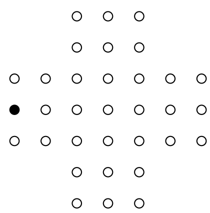
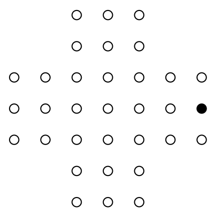
Como $\omega^k = 1$ si y solo si $k = 3\ell$ con $\ell \in \mathbb{Z}$, y buscamos soluciones en el tablero del Senku, tenemos que

$$x + y = 0, \pm 3, \qquad\qquad x - y = 0, \pm 3.$$

Entonces, la posición final ganadora sólo se puede dar en el centro $(0, 0)$



o en los bordes $(0, \pm 3)$, $(\pm 3, 0)$

O sea, hay 5 posiciones en que podemos terminar ganando. Sin embargo notemos que las 4 de los bordes son simétricas y que si podemos terminar en $(0, 3)$, digamos, es porque en la movida previa teníamos $(0, 1)$ y $(0, 2)$ y entonces podemos terminar ganando en el centro $(0, 0)$ –y lo mismo para las otras–. O sea que, por cuestiones psicológicas, podemos asumir que la solución ganadora se da en el centro $(0, 0)$.

Ahora que sabemos donde se ganaría el juego nos hacemos la siguiente

Pregunta: ¿existen soluciones?

El solitario francés no tiene solución. Esto es claro a partir de lo expuesto más arriba. El tablero francés añade al tablero inglés los 4 puntos

$$(-2, -2), \quad (2, 2), \quad (2, -2) \quad \text{y} \quad (-2, 2).$$

Es fácil ver que el aporte de estos 4 puntos juntos a las funciones $A(X)$ y $B(X)$ es de 1 en ambos casos. En efecto,

$$\omega^{-2-2} + \omega^{2+2} + \omega^{2-2} + \omega^{-2+2} = \omega^2 + \omega + 1 + 1 = 1.$$

De este modo, el valor inicial de $A(X)$ y de $B(X)$ en el tablero francés es igual a 2 y si el juego tuviera solución en el agujero central, el valor de estas funciones debería ser igual a 1. A la misma conclusión se puede llegar por un argumento similar usando paridad debida a Hans Zantema (ver wikipedia).

§4. Soluciones: purgas y paquetes

Queremos mostrar que la solución existe. Quien haya intentado solucionar el juego sabe que hacer movidas al azar no conducen a buen puerto. Como en muchas situaciones (de la vida o de la matemática), conviene reducir el problema a problemas menores (¡divide y conquista!). La sencilla pero a la vez brillante idea que muestro aquí está sacada del formidable libro de juegos *Winning Ways* de Berlekamp, Conway y Guy (Berlekamp, Conway, y Guy, 1982).

La estrategia es la siguiente: detectemos primero "paquetes" más o menos sencillos de peonzas que se eliminen ("purgas") y luego tratemos de particionar la posición inicial en paquetes. Esto asegura la solución.

Hay 3 pares de purgas y paquetes sencillos: 2-paquete y 3-purga, 4-paquete y 6-purga y L-paquete y L-purga. Comencemos con el par más sencillo, el 2-paquete y la 3-purga

$$\begin{array}{ccc} \bullet \\ \bullet \\ \circ \\ \\ 2-\text{paquete} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ & \bullet & \\ \times & \bullet & \times \\ \\ & 3-\text{purga} & \end{array}$$

Aquí $\bullet$ denota una peonza como siempre, $\circ$ es un lugar a ser ocupado por una peonza y $\times - \times$ son lugares "catalíticos" de los cuales uno debe estar lleno y el otro vacío. El lugar vacío será usado por la peonza catalítica para llevar a cabo la purga, volviendo luego al lugar del que salió.

Por ejemplo, usando el 2-paquete, podemos obtener la 3-purga y eliminar 3 peonzas consecutivas, donde la peonza usada como catalítica para realizar la purga es la única que sobrevivirá y lo hará en el mismo lugar. Veamos la sucesión de movidas de la purga

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ & \bullet & \\ \cdot & \circ & \bullet \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc} & \cdot & \\ & \cdot & \\ \circ & \bullet & \bullet \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc} & * & \\ & * & \\ \bullet & * & \cdot \end{array}$$

donde $\cdot$ denota los lugares que van quedando vacíos y $*$ denota las peonzas purgadas al final. Como vemos, se usan tres 2-paquetes de forma consecutiva.

Del mismo modo, tenemos el 4-paquete y la 6-purga

$$\begin{array}{ccc} \circ & & \\ & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} \times & & \times & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$4 - \text{paquete} \qquad\qquad 6 - \text{purga}$$

Notar que para llevar las 4-peonzas del 4-paquete al lugar vacío se usan tres 2-paquetes consecutivos (3 movidas). O bien, podemos usar primero un 2-paquete y luego un salto doble (2 movidas) como en (1.3). Por esta razón, consideraremos que el 4-paquete se purga en 2 movidas solamente.

Todo esto nos permite eliminar 6 peonzas de la 6-purga de la siguiente manera es

$$\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \bullet & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \;\; \overset{\longrightarrow}{\text{2-paq}} \;\; \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \bullet & \\ & \cdot & \bullet & \bullet \\ & \cdot & \bullet & \bullet \end{array} \;\; \overset{\longrightarrow}{\text{2-paq}} \;\; \begin{array}{cccc} \bullet & \circ & \cdot & \\ & \ast & \bullet & \bullet \\ & \ast & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$\overset{\longrightarrow}{\text{4-paq}} \;\; \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \circ & \\ & \ast & \cdot & \cdot \\ & \ast & \cdot & \cdot \end{array} \;\; \overset{\longrightarrow}{\text{2-paq}} \;\; \begin{array}{ccc} \cdot & \bullet & \\ \ast & \ast & \ast \\ \ast & \ast & \ast \end{array}$$

decir usamos el 2-paquete dos veces, luego el 4-paquete y por último un 2-paquete (5 movidas).

Finalmente, tenemos el L-paquete y la L-purga

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \\ \circ & & \\ \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & \bullet & & \\ \times & \bullet & \times & \\ & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

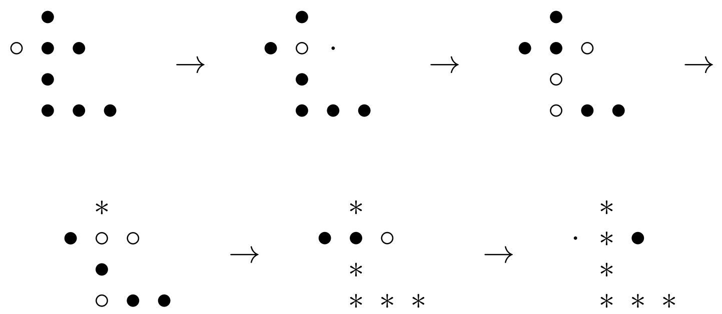
$$L\text{-paquete} \qquad\qquad L\text{-purga}$$

La L-purga elimina 6 peonzas via el uso de seis 2-paquetes, por ejemplo de la forma

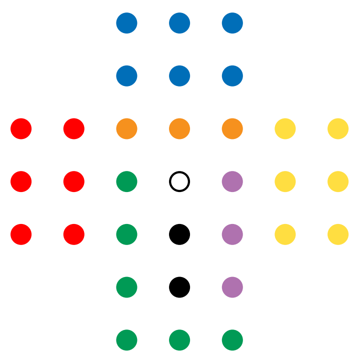
$$\begin{array}{cccc} & \bullet & & \\ \circ & \bullet & \bullet & \\ & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \;\to\; \begin{array}{cccc} & \bullet & & \\ \bullet & \circ & \cdot & \\ & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \;\to\; \begin{array}{cccc} & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \circ & \\ & \circ & & \\ & \circ & \bullet & \bullet \end{array} \;\to$$

$$\begin{array}{cccc} & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \circ & \\ & \circ & & \\ & \bullet & \ast & \ast \end{array} \;\to\; \begin{array}{cccc} & \ast & & \\ \bullet & \circ & \circ & \\ & \bullet & & \\ & \bullet & \ast & \ast \end{array} \;\to\; \begin{array}{cccc} & \ast & & \\ \bullet & \bullet & \circ & \\ & \ast & & \\ & \ast & \ast & \ast \end{array} \;\to\; \begin{array}{cccc} & \ast & & \\ \cdot & \ast & \bullet & \\ & \ast & & \\ & \ast & \ast & \ast \end{array}$$

Observar, sin embargo, que si en el tercer paso anterior hacemos la otra movida posible, entonces podemos hacer el salto doble como en (1.3) y por lo tanto purgar la L en sólo 5 movidas así:



Usemos pues estas purgas y paquetes para dar una solución fácil de recordar. La siguiente solución se debe a Berlekamp, Conway, y Guy (1982, Capítulo 23). Dividimos la posición original de la siguiente forma



Por lo visto antes, la solución es inmediata resolviendo primero las dos 3-purgas violeta y naranja (en ese orden) comenzando por el salto de la peonza amarilla al centro, luego las tres 6-purgas (amarilla, azul y roja, en ese orden) y por último la L-purga verde, para dar el salto final con las peonzas negras. Por favor, controle la solución por sí mismo. Hemos visto, pues, que sí hay solución, ¡y muy bonita!

Soluciones simétricas: Bell y Gardner

En esta sección presentamos dos soluciones simétricas. Para ello, primero debemos introducir alguna notación para las movidas. Las 2 opciones más comunes, y que usaremos indistintamente, son:

		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
		28	29	30		
		31	32	33		

		a	b	c		
		d	e	f		
g	h	i	j	k	l	m
n	o	p	x	P	O	N
M	L	K	J	I	H	G
		F	E	D		
		C	B	A		

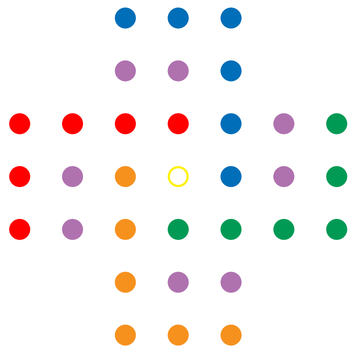
La segunda tiene la ventaja de la simetría.

También se puede usar el sistema algebraico usado en ajedrez (aunque es usual numerar desde arriba, al revés que en ajedrez)

		$c1$	$d1$	$e1$		
		$c2$	$d2$	$e2$		
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$	$e3$	$f3$	$g3$
$a4$	$b4$	$c4$	$d4$	$e4$	$f4$	$g4$
$a5$	$b5$	$c5$	$d5$	$e5$	$f5$	$g5$
		$c6$	$d6$	$e6$		
		$c7$	$d7$	$e7$		

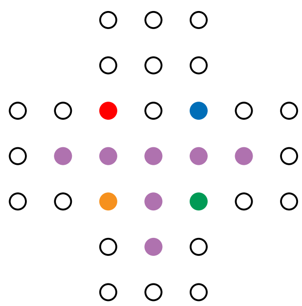
De modo que "15-17" significa que la peonza 15 salta al agujero 17 y quitamos la peonza 16. La misma jugada también se denota ox o $b4$-$d4$.

La solución de Bell. La siguiente solución está sacada de la página de internet de George Bell (Bell, s.f.). Consideremos ahora la posición inicial con 4 L's como sigue.

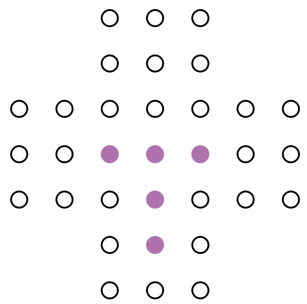


La solución consta de 3 pasos:

(i) Hacer las cuatro L-purgas. Cabe aclarar que aquí, las L-purgas se realizan sin la última movida (i.e., el catalizador no vuelve a su lugar original). Para ello, primero movemos $d2$-$d4$ (violeta salta roja). Ahora, con $f3$-$d3$ 'abrimos' la L azul obteniendo el L-paquete, por lo que podemos llevar a cabo la L-purga. Luego, seguimos con la L-purga verde, luego la L-purga naranja y por último la L-purga roja. Después de esto, si hemos hecho todo bien, llegamos a la siguiente posición de diamante



(ii) Realizar el salto múltiple (6 saltos) comenzando y terminando en $d5$, da igual en que sentido, horario (violeta salta naranja) o antihorario (violeta salta verde). Esto elimina 6 peonzas y quedamos con la figura en forma de “T” que sigue



(iii) Eliminar la “T”. Es automático por inspección, comenzando por el centro $d4$. Esto solo deja una peonza en el centro y es la solución buscada.

La solución de Gardner. Algunas soluciones exhiben simetrías, como la previa. Notar que si encontramos posiciones que sean simétricas respecto del eje vertical podemos, en algunos casos, hacer movidas ¡con ambas manos simultaneamente!

El prestigioso escritor y divulgador de juegos, acertijos y curiosidades matemáticas Martin Gardner dió una tal solución (Gardner, 1991) a la que llamó *Jabberwocky* en homenage al poema escrito por Lewis Carroll incluido en la novela *A través del espejo y lo que Alicia encontró allí* (1871), secuela de la archiconocida obra *Alicia en el país de las maravillas* (1865). Las primeras dos estrofas de este poema dicen

'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

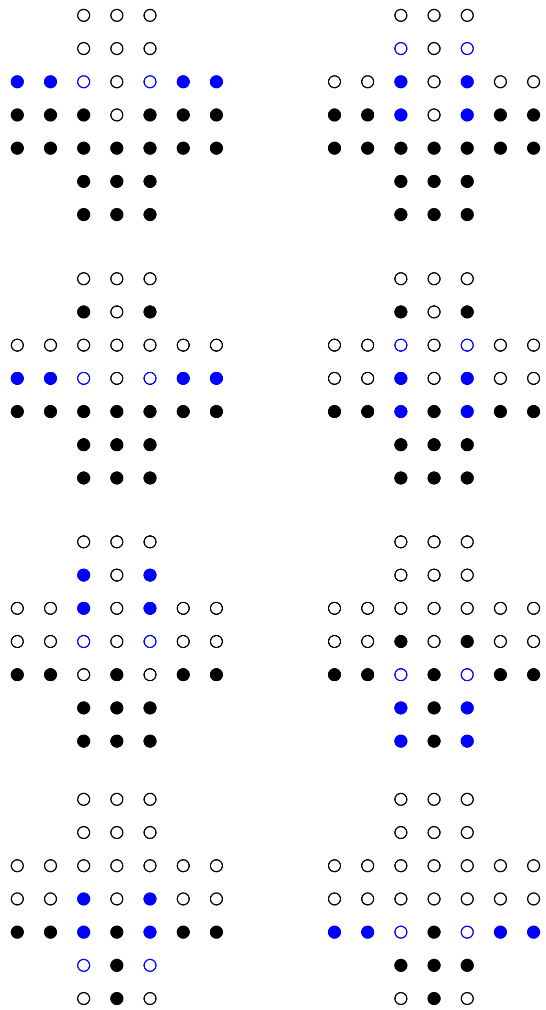
'Beware the Jabberwock, my son!
The jaws that bite, the claws that catch!
Beware the Jubjub bird, and shun
The frumious Bandersnatch!'

Es considerado uno de los mejores poemas sin sentido jamás escritos. El Jabberwock vendría a ser un criatura monstruosa, aparentemente.

Bueno, retomando con lo nuestro, la solución de Gardner, que tiene 11 pasos simétricos, es como sigue. Hacemos las 9 movidas

$$5-17, \quad 12-10, \quad 3-11, \quad 10-12, \quad 8-10,$$
$$17-5, \quad 2-10, \quad 1-9, \quad 10-8$$

llegando a la posición simétrica siguiente, desde la cual hacemos 16 movidas simétricas verticalmente, 8 con la mano izquierda y 8 con la mano derecha como sigue (en azul los 2-paquetes a mover)



Para terminar con las movidas

$$24-26, \quad 23-31-33-25, \quad 26-24, \quad 29-17.$$

¡Un poema! Y hablando de poema, este sigue

...He took his vorpal sword in hand;
Long time the manxome foe he sought–
So rested he by the Tumtum tree
And stood awhile in thought.

And, as in uffish thought he stood,
The Jabberwock, with eyes of flame,
Came whiffling through the tulgey wood,
And burbled as it came!

§5. Soluciones mas cortas: Dudeney, Bergholt y Beasley

Notemos que se necesitan un máximo de 31 saltos para ganar, porque hay que quitar 31 peonzas. Comencemos con una solución de 29 movidas:

$$15-17,\quad 28-16,\quad 21-23,\quad 07-21,\quad 16-28,\quad 31-23,\quad 24-22,$$
$$21-23,\quad 26-24,\quad 23-25,\quad 32-24-26,\quad 33-25,\quad 26-24,\quad 12-26,$$
$$27-25,\quad 13-27,\quad 24-26,\quad 27-25,\quad 10-12,\quad 25-11,\quad 12-10,\quad 03-11,$$
$$10-12,\quad 08-10,\quad 01-09-11,\quad 02-10,\quad 17-05,\quad 12-10,\quad 05-17.$$

Usando la notación con letras es posible escribirla mucho más sucintamente. Por ejemplo, 15-17 sería ox, pero lo escribiremos o_x, o simplement o si sólo hay una opción de salto desde o como en nuestro caso. De este modo, la solución de arriba se puede escribir más brevemente así

$$S_{29} = o\,F\,M\,g\,p\,C\,J\,M\,H\,K\,B_2\,A\,H\,l\,G\,m\,J\,G\,j\,I\,l\,c\,j\,h\,a_2\,b\,x\,l\,e.$$

Aquí usamos la notación B_2 y a_2 para denotar saltos dobles sin ambigüedades. Si hubiera más posibilidades lo denotamos de forma precisa B_{JH} y a_{ik}, respectivamente.

¿Es posible encontrar soluciones en menos movidas? Bueno, si prestamos atención, las soluciones halladas en las secciones previas ya son más cortas:

- La solución Jabberwocky (Gardner) es de 29 movidas.
- La solución de la Sección 4 (Conway y colaboradores) toma en realidad 27 movidas ya que, como vimos, tanto las 6-purgas como la L-purga se pueden hacer en 5 movidas (una menos) lo que baja de 31 a 27 el número total de movidas.
- Por otra parte, la solución de la sección anterior (Bell), además de su simetría es también más corta, con sólo 22 movidas (y un loop o ciclo de ¡6 saltos que purga 6 peonzas!).

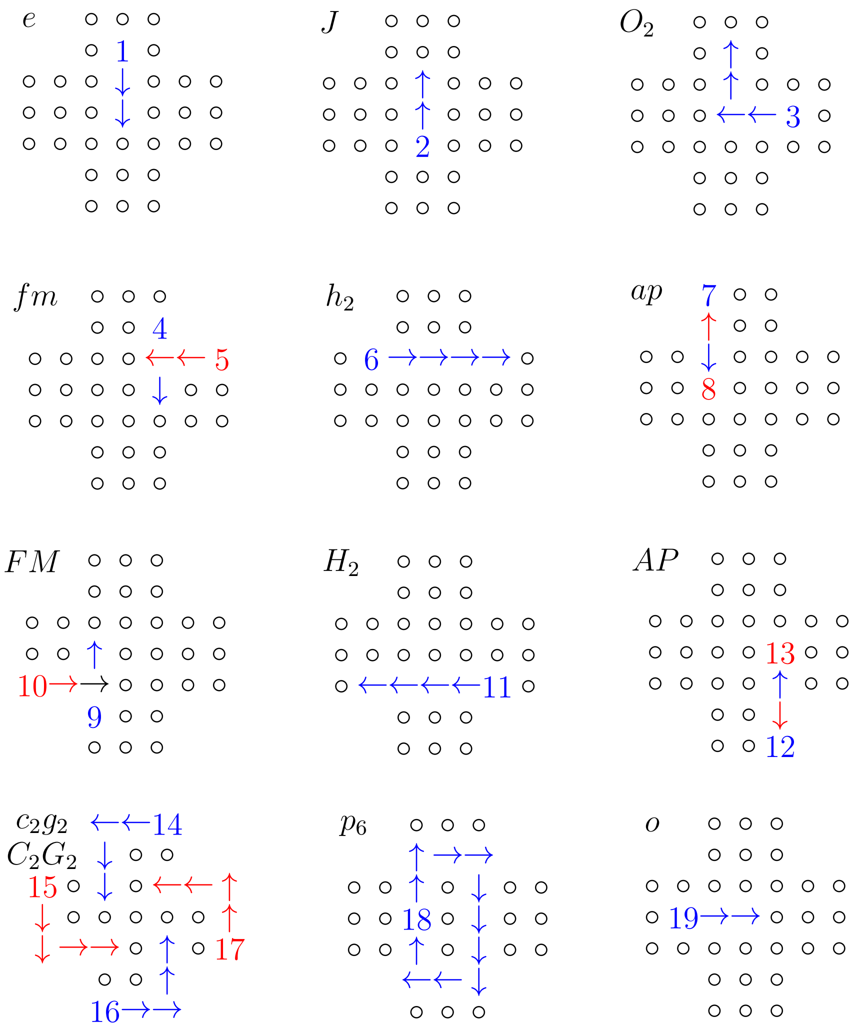
Dejamos como ejercicio para el lector escribir estas soluciones S_{27} y S_{22} en la notación sucinta.

La soluciones que vimos antes son muy elegantes y fáciles de recordar, pero usan muchas movidas. Ahora estamos interesados en buscar soluciones más cortas. En 1908, el famoso y prolífico creador de acertijos y problemas Henry E. Dudeney dió una solución de sólo 19 movidas (Dudeney, 1908), bastante simétrica, como sigue

$$S_{19} = eJO_2 \quad fmh_2ap \quad FMH_2AP \quad c_2g_2C_2G_2p_6o.$$

Notar que consta de 7 saltos dobles y de un 'loop' o ciclo de 6 saltos (como en S_{22}).

Para que se destaque la simetría, exhibimos la solución en forma gráfica



¿Se puede hacer mejor? Dudeney creía que su solución no podía ser mejorada. Sin embargo, en 1912, Ernest Bergholt dió una solución más corta (Bergholt, 1912), de sólo 18 movidas:

$$S_{18} = elcPDGJm_2igL_5CpA_2M_2a_3d_5o.$$

Aquí L_5 es ambigua, pero se refiere a $L_5 = L_{JHlji}$, mientras que d_5 no es ambigua y cualquiera de las posibilidades lleva a la misma posición. Esta solución usa 3 saltos dobles, uno triple y dos saltos quíntuples, aunque es menos simétrica que la de Dudeney.

Y en este punto me parece oir...

...One, two! One, two! And through and through
The vorpal blade went snicker-snack!
He left it dead, and with its head
He went galumphing back.

"And hast thou slain the Jabberwock?
Come to my arms, my beamish boy!
O frabjous day! Callooh! Callay!"
He chortled in his joy...

La de Bergholt es efectivamente la solución más corta posible. Este resultado se debe a John Beasley quien probó que una solución en menos movidas no es posible (Beasley, 1962), ver también (Beasley, 1985). La prueba de este hecho es muy elegante, y una versión accesible puede verse en el mencionado libro de Conway y colaboradores, pero es un poco complicada para exponerla brevemente aquí.

§6. Comentarios finales

Existen muchos problemas interesantes asociados al Senku y muchas cosas más se pueden decir desde el punto de vista matemático. Para el lector curioso recomiendo tanto leer el Capítulo 23 de Berlekamp, Conway y Guy (Berlekamp y cols., 1982), como así también visitar las páginas de internet de George Bell (Bell, s.f.) y de John Beasley (Beasley, s.f.). En ellas se pueden hallar numerosos comentarios, observaciones, soluciones, cálculos y artículos sobre este solitario. En particular, muchas otras versiones de tableros son tenidas en cuenta. Ya se sabe, siempre se puede seguir girando y jugando sobre el mismo tema...

...'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe:
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

Bibliografía

Beasley, J. D. (s.f.). *Beasley's peg solitaire page*. Descargado de `https://www.jsbeasley.co.uk/pegsol.htm`

Beasley, J. D. (1962). Some notes on solitaire. *Eureka*, *25*, 13–18.

Beasley, J. D. (1985). *The ins & outs of peg solitaire*. Oxford University Press.

Bell, G. (s.f.). *George's peg solitaire page*. Descargado de `http://recmath.org/pegsolitaire`

Bergholt, E. (1912). May 11. *The Queen*.

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., y Guy, R. K. (1982). *Winning ways for your mathematical plays* (Vol. II). Academic Press.

de Bruijn, N. G. (1972). A solitaire game and its relations to a finite field. *Journal of Recreational Mathematics*, *5*(2), 133–137.

Dudeney, H. E. (1908). April. *The Strand Magazine*.

Gardner, M. (1991). *The unexpected hanging and other mathematical diversions*. University Of Chicago Press. (Reimpreso como *Knots and Borromean Rings, Rep-Tiles, and Eight Queens*, Cambridge University Press, 2014)

Ricardo A. Podestá
FAMAF (Universidad Nacional de Córdoba) – CIEM (CONICET)
(✉) *podesta@famaf.unc.edu.ar*

Recibido: *14 de febrero de 2020.*
Aceptado: *14 de marzo de 2020.*
Publicado en línea: *14 de abril de 2020.*