Propuesta metodológica para identificar soluciones de ecuaciones e inecuaciones mediante la función cuadrática

Miguel Rodrigo Hernández Aragón
Universidad Internacional Sek
Quito-Ecuador
miguel.hernandez@uisek.edu.ec
miguelhernandezaragon@hotmail.es

Resumen: Una de las problemáticas más comunes que presentan los estudiantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, tiene que ver con la falta de capacidad para relacionar los procesos analíticos (algebraicos) con esquemas gráficos (interpretación geométrica), estas deficiencias no permiten que el estudiante construya un aprendizaje significativo, por el contrario, se practica un aprendizaje memorístico-mecánico, sin ningún tipo de razonamiento, con poca capacidad de análisis y síntesis. Para el presente taller se plantea como objetivo: trazar la gráfica de una función cuadrática de dos formas, construyendo una tabla de valores y por medio de geogebra, para relacionar con los procesos algebraicos de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas e identificar sus soluciones. Las actividades propuestas constan de una serie de pasos a seguir, empezando con la construcción de gráficas, luego realizar procesos algebraicos e identificar relaciones (patrones) y finalmente una generalización de cada tema. Al iniciar el taller se darán algunas indicaciones generales sobre el objetivo, así como también los prerrequisitos y condiciones para realizar las actividades propuestas.

Palabras clave: procesos, aprendizajes, capacidad, algebraicos, gráficos, razonamiento, análisis, síntesis

Abstract: One of the most common problems that students present in the teaching-learning processes of mathematics is the lack of ability to relate analytical (algebraic) processes to graphical schemes (geometric interpretation), these deficiencies do not allow that the student constructs meaningful learning, and rather, on the contrary, a rote-mechanical learning is practiced, without any reasoning, with little capacity for analysis and synthesis. The objective of this workshop is to draw the graph of a quadratic function in two ways, by constructing a table of values and by means of geogebra, to relate to the algebraic processes of equations and quadratic inequalities and to identify their solutions. The proposed activities consist of a series of steps to be followed, starting with the construction of graphs, then performing algebraic processes and identifying relationships (patterns) and finally a generalization of each theme. At the beginning of the workshop there will be some general indications about the objective, as well as the prerequisites and conditions for carrying out the proposed activities.

Keywords: processes, learning, ability, algebraic, graphics, reasoning, analysis, synthesis.

1. Introducción

Los temas de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas son muy importantes en el estudio de matemáticas, tanto a nivel de Bachillerato como de Educación Superior, pues estos se constituyen en prerrequisitos de otros cursos como: Análisis Matemático, Cálculo, Álgebra Lineal, etc.

Los procesos de resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas tienen mucha relación, por lo que se plantea como estrategia de enseñanza - aprendizaje, el tratamiento de estos dos temas, desde el punto de vista geométrico, relacionándolos con la función cuadrática; la experiencia en la enseñanza de matemáticas, especialmente ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, tanto a estudiantes de tercer curso de bachillerato como de primeros semestres de carrera universitaria, han puesto en evidencia que los procesos algebraicos por sí solos, resultan muy abstractos, lo que genera una serie de problemáticas consecutivas para los estudiantes, especialmente porque van acumulando vacíos en algunos procesos algebraicos y conceptos matemáticos; *"…desde el punto de vista didáctico los docentes de matemáticas debemos enfocar la enseñanza de tal manera que los estudiantes participen en la elaboración de las definiciones…".* (MORA, 2003).

2. Aspectos teóricos

2.1 Resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas

2.1.1. Algunas estrategias adoptadas por los estudiantes

Para estudiar estas temáticas, muchos estudiantes, adoptan como estrategia, aprenderse de memoria ciertos pasos de la resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, por ejemplo: cuando realizan el análisis de signos en la resolución de una inecuación cuadrática,

$ax^2 + bx + c > 0$ (ver tabla 1), no entienden por qué y para qué lo hacen, tampoco entienden el significado de los resultados obtenidos en dicha tabla.

Tabla 1: Intervalos para una inecuación cuadrática

Intervalo	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	$(x_2, +\infty)$
$x \in R$	?	?	?
Valor de prueba en $ax^2 + bx + c$; para $x \in R$	?	?	?
Signo de $ax^2 + bx + c$; en el intervalo	?	?	?

Fuente: Autor

Así mismo, cuando los estudiantes resuelven una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, no relacionan las soluciones de la ecuación, con los valores de las intersecciones de la función cuadrática en el eje X (ceros de la función), etc.

Frente a esta problemática, estudiantes y profesores, *"…debemos abandonar la idea de que los conceptos matemáticos duraderos son aquellos que se aprenden de memoria; por el contrario, el ser humano recuerda con mayor frecuencia y facilidad las ideas que él ha elaborado por sus propios medios y recursos…".* (MORA, 2003).

En este contexto (resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas), puedo indicar que muchos estudiantes, enfrentan tres tipos de problemas principales:

a) Realizan los procesos algebraicos de manera mecánica, no comprenden que una ecuación cuadrática puede tener: una, dos o ninguna raíz real.

b) No comprenden el por qué y el para qué, en el proceso de resolución de una ecuación cuadrática por factorización, se iguala a cero cada uno de los factores obtenidos.

c) No comprenden el significado (interpretación geométrica) de: $ax^2 + bx + c = 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$.

Estas reflexiones están en concordancia con lo manifestado por García y Benítez, *"…Se identifican dos tipos de razonamiento relacionados con el contexto y la representación gráfica que los estudiantes emplean: a) razonamiento basado en el contexto, en el que la gráfica y la explicación escrita del estudiante no se encuentran relacionadas. y, b) razonamiento basado en restricciones, que se caracteriza por una comprensión más completa de la actividad y el establecimiento de relaciones entre las variables del problema, presentes tanto en la gráfica como en la explicación escrita…"* (Garcia & Benítez, 2011)

Con la propuesta planteada, se espera que los estudiantes adquieran la segunda opción de razonamiento, con lo cual estarían construyendo aprendizajes significativos.

2.2. Algunas estrategias propuestas por el docente

La experiencia en la docencia, evidencia que se consiguen mejores aprendizajes, cuando el estudiante participa de manera activa en el proceso, para lo cual, el profesor debe guiarle por el camino correcto, proporcionarle las herramientas y estrategias más idóneas, para que él vaya construyendo su propio aprendizaje, es así que, en este camino el estudiante puede ir descubriendo sus errores, lo que a su vez, le permitirá concientizar sobre sus fortalezas y debilidades en el aprendizaje de matemáticas.

Por otro lado, en este mismo contexto, es poco probable que el estudiante construya aprendizaje, cuando es un ente inactivo, es decir, cuando se limita a copiar textualmente lo que el profesor explica o escribe en la pizarra, o presenta en una diapositiva, por lo que, es condición necesaria que el estudiante participe activamente en la construcción de su aprendizaje, incluso, es necesario que se equivoque muchas veces, esto le permitirá ir descubriendo y diferenciando poco a poco, aquellos procesos que son correctos y otros que son incorrectos.

Estas ideas corroboran la propuesta de Castillo, que manifiesta: *"…en cuanto al aprendizaje, las tendencias actuales coinciden en argumentar a favor de enfoques constructivistas del aprendizaje, donde el alumno realiza actividades y proyectos que le permiten comprender los procesos y principios subyacentes. Estas tendencias implican que no basta con presentar un conjunto de contenidos, sino se deben entregar los medios necesarios para desarrollar actividades que tengan sentido para los alumnos en sus propios contextos y faciliten el desarrollo de habilidades superiores…"* (Castillo, 2008).

3. Metodología de trabajo

Se plantea como estrategia metodológica para el proceso de resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, a través del análisis de la gráfica de la función cuadrática, para lo cual, como proceso general, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Trazar la gráfica de una función cuadrática.
2. Resolver matemáticamente una ecuación y una inecuación cuadrática (las relacionadas con la función cuadrática anterior)
3. Identificar la relación que existe entre los valores de las intersecciones de la gráfica con el eje X, y las soluciones (raíces) de la ecuación de segundo grado.
4. Identificar en la gráfica, los intervalos en el eje X, donde la función está por arriba del eje X y los intervalos o intervalo, donde la función está por abajo del eje X, y relacionarlos con la inecuación de segundo grado.

Esta metodología está en concordancia con lo manifestado por García y Benítez, *"…los profesores, quienes pueden contribuir al aprendizaje de sus estudiantes diseñando tareas con características y contenido matemático acorde con los objetivos curriculares de las asignaturas…", "…las tareas que pueden ser exploradas a través de múltiples* *representaciones (icónica, verbal, numérica), favorecen el razonamiento de los estudiantes, independientemente de sus conocimientos previos…"* (García & Benítez, 2013)

Público meta. - Estos talleres pueden ser resueltos por estudiantes de: bachillerato (tercer curso), primeros niveles de carreras universitarias relacionadas con ingenierías o afines; para el desarrollo de las actividades, se requiere aula con infocus y computadores que tengan descargado geogebra, hojas a cuadros, calculadora, lápiz, borrador, esferográficos; como prerrequisitos los estudiantes deben tener conocimientos de aritmética y álgebra básica.

La propuesta metodológica consta de 4 actividades, sin embargo, por cuestiones de tiempo y por estrategia didáctica, se desarrollará únicamente la actividad 1, se estima que tomará un tiempo aproximado de una hora, dependiendo de las condiciones iniciales (prerrequisitos); las actividades 2, 3 y 4, complementan el proceso metodológico y como el objetivo es que el estudiante vaya construyendo su aprendizaje, por lo que éstas quedarán como tarea.

4. Guías de trabajo y/o actividades

Tema: Resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas mediante análisis gráfico de la función cuadrática.

Objetivo: Trazar la gráfica de la función cuadrática, de forma manual y por medio de Geogebra, para identificar la solución de la ecuación e inecuación de segundo grado.

Actividad N. 1

Dada la función cuadrática: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

a) Trace la gráfica de $f(x)$ construyendo una tabla de valores (sugerencia: primero calcule la coordenada x del vértice $V(x, f(x))$; $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, luego asigne algunos valores arbitrarios a la variable x).

b) Trace la gráfica de $f(x)$ utilizando el programa Geogebra; en la ventana inicial dar clic en vista, luego en cálculo simbólico (CAS), a continuación, en el campo desplegado escriba el lado derecho de la función $(x^2 - 2x - 3)$ y enter, finalmente clic en el punto que aparece.

c) Resuelva la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ de forma matemática: factorizando o por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

d) Encuentre una relación entre los valores donde la gráfica de $f(x)$ interseca al eje X y la solución de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$. Explique con argumentos.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………....

e) Resuelva la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ utilizando Geogebra; una vez que ha trazado la gráfica, en el campo desplegado, escriba la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$, luego clic en (X=), finalmente clic en el punto que aparece.

f) Observe la gráfica de $f(x)$, indique los conjuntos (intervalos en el eje X), donde la función está por arriba del eje X y por abajo del eje X, especifique en cada caso.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………....

g) Resuelva matemáticamente las inecuaciones cuadráticas: $x^2 - 2x - 3 > 0$; $x^2 - 2x - 3 < 0$; (verifique la veracidad o falsedad de cada inecuación, tomando puntos de prueba en los intervalos que tiene la gráfica en el eje X).

h) Encuentre una relación entre las respuestas de los literales f y g.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

i) Resuelva por medio de Geogebra las inecuaciones cuadráticas: $x^2 - 2x - 3 > 0$; $x^2 - 2x - 3 < 0$; escriba cada inecuación (una por una) en un campo vacío, luego clic en (X=), finalmente clic en el punto que aparece.

j) Si las inecuaciones toman la forma: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$; $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ¿Cuál es el conjunto solución en cada caso?, compare con las soluciones del literal g, explique.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Actividad N. 2

Dada la función cuadrática: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

a) Trace la gráfica de $f(x)$ construyendo una tabla de valores (sugerencia: primero calcule la coordenada x del vértice $V(x, f(x))$; $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, luego asigne algunos valores arbitrarios a la variable x).

b) Trace la gráfica de $f(x)$ utilizando el programa Geogebra; en la ventana inicial dar clic en vista, luego en cálculo simbólico (CAS), a continuación, en el campo desplegado escriba el lado derecho de la función $(-x^2 + 2x + 3)$ y enter, finalmente clic en el punto que aparece.

c) Resuelva la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$ de forma matemática: factorizando o por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

d) Encuentre una relación entre los valores donde la gráfica de $f(x)$ interseca al eje X y la solución de la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$. Explique con argumentos.

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………....

e) Resuelva la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$ utilizando Geogebra; una vez que ha trazado la gráfica, en el campo desplegado, escriba la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$, luego clic en (X=), finalmente clic en el punto que aparece.

f) Observe la gráfica de $f(x)$, indique los conjuntos (intervalos en el eje X), donde la función está por arriba del eje X y por abajo del eje X, especifique en cada caso.

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………....

g) Resuelva matemáticamente las inecuaciones cuadráticas: $-x^2 + 2x + 3 > 0$; $-x^2 + 2x + 3 < 0$; (verifique la veracidad o falsedad de cada inecuación, tomando puntos de prueba en los intervalos que tiene la gráfica en el eje X).

h) Encuentre una relación entre las respuestas de los literales f y g.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

i) Resuelva por medio de Geogebra las inecuaciones cuadráticas: $-x^2 + 2x + 3 > 0$; $-x^2 + 2x + 3 < 0$; escriba cada inecuación (una por una) en un campo vacío, luego clic en (X=), finalmente clic en el punto que aparece.

j) Si las inecuaciones toman la forma: $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$; $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$ ¿Cuál es el conjunto solución en cada caso?, compare con las soluciones del literal g, explique.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Actividad N. 3

Dada la función cuadrática: $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

a) Trace la gráfica de $f(x)$ construyendo una tabla de valores (sugerencia: primero calcule la coordenada x del vértice $V(x, f(x))$; $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, luego asigne algunos valores arbitrarios a la variable x).

b) Trace la gráfica de $f(x)$ utilizando el programa Geogebra; en la ventana inicial dar clic en vista, luego en cálculo simbólico (CAS), a continuación, en el campo desplegado escriba el lado derecho de la función $(2x^2 - 3x + 4)$ y enter, finalmente clic en el punto que aparece.

c) Resuelva la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$ de forma matemática: factorizando o por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

d) Encuentre una relación entre los valores donde la gráfica de $f(x)$ interseca al eje X y la solución de la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Explique con argumentos.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………....

e) Resuelva la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$ utilizando Geogebra; una vez que ha trazado la gráfica, en el campo desplegado, escriba la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$, luego clic en (X=), finalmente clic en el punto que aparece.

f) Observe la gráfica de $f(x)$, indique los conjuntos (intervalos en el eje X), donde la función está por arriba del eje X y por abajo del eje X, especifique en cada caso.

……………………………………………………………………………………

g) Resuelva matemáticamente las inecuaciones cuadráticas: $2x^2 - 3x + 4 > 0$; $2x^2 - 3x + 4 < 0$; (verifique la veracidad o falsedad de cada inecuación, tomando puntos de prueba en los intervalos que tiene la gráfica en el eje X).

h) Encuentre una relación entre las respuestas de los literales f y g.

……………………………………………………………………………………

i) Resuelva por medio de Geogebra las inecuaciones cuadráticas: $2x^2 - 3x + 4 > 0$; $2x^2 - 3x + 4 < 0$; escriba cada inecuación (una por una) en un campo vacío, luego clic en (X=), finalmente clic en el punto que aparece.

j) Si las inecuaciones toman la forma: $2x^2 - 3x + 4 \geq 0$; $2x^2 - 3x + 4 \leq 0$ ¿Cuál es el conjunto solución en cada caso?, compare con las soluciones del literal g, explique.

……………………………………………………………………………………

ACTIVIDAD N. 4 (GENERALIZACIÓN)

PREGUNTA 1: ¿Cuál es la condición para que una función cuadrática, interseque al eje X en dos puntos?

a) Analice la condición de forma gráfica y algebraica, indique los posibles casos que pueden presentarse.

b) ¿Qué puede decir de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para los casos que puedan presentarse?

c) ¿Qué puede decir sobre las soluciones de las inecuaciones $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ para los casos anteriores?

PREGUNTA 2: ¿Cuál es la condición para que una función cuadrática, interseque al eje X en un punto?

a) Analice la condición de forma gráfica y algebraica, indique los posibles casos que pueden presentarse.

b) ¿Qué puede decir de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para los casos que puedan presentarse?

c) ¿Qué puede decir sobre las soluciones de las inecuaciones $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ para los casos anteriores?

PREGUNTA 3: ¿Cuál es la condición para que una función cuadrática, NO interseque al eje X?

a) Analice la condición de forma gráfica y algebraica, indique los posibles casos que pueden presentarse.
b) ¿Qué puede decir de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para los casos que puedan presentarse?
c) ¿Qué puede decir sobre las soluciones de las inecuaciones $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ para los casos anteriores?

5. Recomendaciones

Frente a la falta de capacidad para relacionar los procesos analíticos (algebraicos) con esquemas gráficos (interpretación geométrica), es importante destacar y reconocer que estas deficiencias que tienen los estudiantes, probablemente, son consecuencias de los procesos de enseñanza aprendizaje, es decir, fueron orientados bajo esquemas que los llevaron a adquirir esas capacidades; en esta problemática, no se descarta las diferencias individuales (fortalezas y debilidades propias de cada estudiante).

Una estrategia adecuada para mejorar los procesos de enseñanza - aprendizaje de matemáticas, consiste en caracterizar los temas mediante esquemas gráficos (interpretación geométrica) y luego contrastarlos con la forma algebraica. (procesos matemáticos).

Para la resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, se recomienda caracterizar la función cuadrática (construir manualmente y por medio de geogebra), y establecer relaciones entre la forma de la gráfica, las intersecciones con los ejes, los intervalos (conjuntos) donde la gráfica está sobre o bajo el eje x, etc.

En el estudio de conceptos matemáticos, siempre será ventajoso explorarlos desde los puntos de vista algebraico-geométrico o viceversa, esto permite que el estudiante vaya progresivamente mejorando su nivel de razonamiento lógico-abstracto, lo cual a su vez ayuda a construir aprendizajes significativos.

En este contexto, es importante destacar el papel que juega la tecnología en los procesos de enseñanza – aprendizaje, de manera particular, los relacionados con las matemáticas, por lo que, en el presente trabajo, el uso del programa geogebra, permite de una manera sencilla, comprobar que los procesos desarrollados por los estudiantes de forma manual, estén en concordancia con las gráficas y soluciones matemáticas arrojados por dicho programa; esto a su vez, coadyuva a que el estudiante pueda razonar de mejor manera, sobre los aspectos generales de un tema en específico, en este caso, sobre la función cuadrática, sus características, la relación con las ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, etc.

Por otra parte, es importante que los objetivos curriculares de matemáticas, estén en concordancia con los niveles educativos (Bachillerato o Educación Superior), es decir, que estos se ajusten a los requerimientos académicos de cada institución educativa y / o carrera universitaria.

6. Referencias bibliográficas

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(2)*, p, 171-194. Recuperado el 05 de septiembre de 2017, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200002&lng=es&tlng=es.

García, M. L., & Benítez, A. A. (2013). Design and Implementation of Homework to Facilitate the Learning of Mathematics. *Formación universitaria, 6(1)*, p, 13-20. Recuperado el 22 de Octubre de 2017, de http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062013000100003.

Garcia, M., & Benítez, A. (2011). Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE. *Formación universitaria, 4(3)*, p, 31-42.

MORA, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía, 24(70)*, p, 181-272. Recuperado el 06 de Septiembre de 2017, de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&tlng=es.