Lupiáñez, J. L., Cañadas, M. C., Molina, M., Ruiz-Hidalgo, J. F. y García Serrano, Mario (2011).*Medida de magnitudes con GeoGebra en la formación de maestros.* En Sociedad Andaluza de Educación Matemática, SAEM Thales (Ed.), II Jornadas sobre GeoGebra en Andalucía (pp. 1-5). Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Medida de Magnitudes con GeoGebra en la Formación de Maestros[1]

Lupiáñez, Jose Luis lupi@ugr.es
Cañadas, María C. mconsu@ugr.es
Molina, Marta martamg@ugr.es
Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco jfruiz@ugr.es
García Serrano, Mario mgs0170@hotmail.com

Resumen

En este trabajo presentamos una propuesta de trabajo diseñada con GeoGebra centrada en la medida de magnitudes continuas y dirigida a estudiantes de tercer ciclo de Educación Primaria. Esta propuesta se organiza en torno a tres módulos. El primero se centra en el manejo de algunas herramientas básicas de medida e incluye el uso de la cuadrícula de GeoGebra para realizar medidas de manera directa. El segundo módulo explora las condiciones que deben satisfacer tres segmentos para que pueda construirse con ellos un triángulo. El tercer módulo analiza la relación entre área y perímetro en un cuadrilátero. Tras realizar esta actividad con futuros maestros, en el contexto de la primera asignatura de matemáticas que cursan en el Grado en la Universidad de Granada, presentamos el análisis de las respuestas obtenidas.

1. Introducción: Medida de Magnitudes en el Currículo de Educación Primaria

Una de las razones que nos han llevado a orientar la actividad ha sido su adecuación al currículo de primaria. De hecho, dentro de las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) uno de los cuatro bloques de contenidos se denomina *La medida: estimación y cálculo de magnitudes*. En él se indica que los escolares de primaria deben conocer diferentes magnitudes con el objetivo de realizar mediciones manejando las medidas en situaciones diversas: elección de unidad, relaciones entre unidades o grado de fiabilidad.

Ya desde el primer ciclo el bloque de medida tiene un peso importante entre los contenidos, comparando objetos, realizando medidas directas o estimando medidas para que, al llegar al tercer ciclo, se hayan desarrollado estrategias personales en el alumnado que les permitan medir directa e indirectamente, con criterio para elegir aproximaciones adecuadas, expresando los procesos seguidos y las estrategias utilizadas para las mediciones. No debemos olvidar, por supuesto, el cálculo y comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición.

Otro de los bloques que respalda nuestra propuesta es el bloque de *Geometría*. Contenidos como la situación en el espacio o las distancias en el segundo ciclo de primaria y los sistemas de coordenadas cartesianas, la representación elemental de

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

escalas y la utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para análisis y construcción de distintas figuras geométricas pertenecientes al tercer ciclo están incluidos en el desarrollo de nuestra actividad.

Para terminar, un último elemento curricular que fortalece nuestra elección es la interacción con GeoGebra, adecuado para el desarrollo de la competencia *Tratamiento de la información y competencia digital*, que anima a hacer uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles para resolver problemas de forma eficiente.

La presencia del tema sobre medida de magnitudes en el currículo hace necesaria su inclusión en la formación de los futuros profesores de Educación Primaria. Por otro lado, las posibilidades de GeoGebra nos han llevado a proponer y llevar a cabo una actividad sobre ese tema usando este recurso. Contextualizamos este trabajo dentro de una asignatura del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada, describimos la actividad realizada con GeoGebra y resumimos algunos de los resultados obtenidos.

2. Una Propuesta de Formación de Futuros Maestros

La actividad que aquí presentamos fue implementada en un grupo de cuarenta y seis estudiantes de la asignatura "Bases Matemáticas para la Educación Primaria" de primer curso del grado en Maestro en Educación Primaria. En esta asignatura se persigue, entre otros objetivos, que los estudiantes profundicen en su comprensión de las matemáticas de la Educación Primaria y desarrollen competencias matemáticas básicas (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y emplear soportes y herramientas tecnológicas) sobre los bloques de contenido de las matemáticas escolares.

Uno de temas de la asignatura está dedicado a las magnitudes y su medida. En él se abordan nociones como magnitud, cantidad, medir, unidad de medida, tipos de medida, entre otras, centrándose la atención en la medida y estimación de las magnitudes que se trabajan en la Educación Primaria. La magnitudes longitud y superficie destacan entre ellas por su marcada presencia en el currículo y por las importantes dificultades que los estudiantes ponen de manifiesto en su comprensión así como en su medida y estimación (Castillo, Segovia, Castro, y Molina, 2011). Por ambos motivos y buscando además que los estudiantes exploraran el uso del GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la medida, diseñamos la propuesta que a continuación describimos.

3. Actividades de Medida con GeoGebra

La propuesta de trabajo está compuesta por tres módulos. El primer módulo se denomina "Herramientas de Medida en GeoGebra" e incluye cuatro actividades:

1. Dibuja un segmento y calcula cuánto mide.
2. Investiga si es posible construir un segmento con una medida predeterminada.
3. Traza dos rectas paralelas y una recta secante a ellas. ¿Puedes medir los ángulos que se forman? ¿Encuentras alguna relación entre ellos?
4. Dibuja un polígono irregular con al menos 8 lados
   a) Muestra la cuadrícula desde el menú "Visualiza". ¿Puedes calcular el área de la figura usando esa cuadrícula? ¿Cuánto obtienes?

b) Desde el menú "Opciones" entra en "Zona gráfica" y pincha en "Cuadrícula". Activa la casilla "Distancia" y modifica los valores de *x* e *y* para modificar el tamaño de la cuadrícula que muestra GeoGebra. ¿Puedes encontrar un tamaño de la cuadrícula que te permita calcular de manera más precisa el área del polígono? ¿Cuánto obtienes?

c) Calcula su área exacta usando la herramienta de GeoGebra y compara el resultado con tu medición anterior. ¿A qué se debe la diferencia?

El segundo módulo se denomina "Construcción de Triángulos" e incluye otras cuatro actividades:

1. Construye un segmento de longitud 3 centímetros (*a*). Observa la diferencia que hay al mover los extremos del segmento. ¿En qué consiste cada movimiento? ¿A qué se debe? Construye otros dos segmentos, uno con longitud 4 (GeoGebra lo llamará *b*) y otro con longitud 5 (*c*).
2. ¿Es posible construir un triángulo usando esos tres segmentos? Describe el procedimiento que has empleado si has logrado hacerlo.
3. Define un nuevo segmento (*d*) que mida 1 centímetro. ¿Es posible construir un triángulo con los segmentos *b*, *c* y *d*? ¿Cuál crees que es la razón?
4. ¿De qué depende la construcción de un triángulo dados tres segmentos?

El tercer módulo, se centra en la construcción de un rectángulo de área máxima pero con perímetro fijo. Las actividades incluyen cuestiones relativas a la variación de una medida en función de la otra y en la representación gráfica de esa relación.

Los tres módulos se llevaron a cabo en una sesión de hora y media. Los estudiantes trabajaron por grupos de cuatro integrantes, con al menos un ordenador portátil por cada dos personas. Cada uno de los quince grupos entregó sus respuestas a cada uno de los módulos por escrito. La duración de la sesión hizo que no todos los grupos finalizaran su trabajo con el tercer módulo, por lo que no analizaremos las respuestas obtenidas.

4. Resultados de la Experiencia

Analizamos las respuestas a los dos primeros módulos por separado.

Módulo 1: Herramientas de Medida en GeoGebra

Aunque el enunciado de la primera actividad no requiere que se explique cómo se construye el segmento, casi un tercio de los grupos dieron una explicaron apoyada en una representación gráfica que explicita la secuencia de comandos seguida:

Clicamos en el icono del segmento y una vez dibujado el segmento, en el icono del segmento con la señal de cm, lo seleccionamos y pinchamos sobre el segmento y obtenemos su medida.

En la segunda actividad, nueve grupos contestaron que sí se podía construir un segmento con una medida predeterminada, explicando en su gran mayoría (catorce grupos) cómo realizaron la construcción. Un tercio de ellos basó de nuevo su explicación en un gráfico:

Si es posible, dándole a la tercera opción, en segmento dado Punto Extremo y Longitud. Se pone un punto y le pinchas, y ahí marcas la longitud que quieres.

En la tercera actividad todos los grupos midieron correctamente los ángulos. Sin embargo, tres de ellos no encontraron una relación entre esas medidas, mientras que cinco de los que sí la encontraron, no encontraron una justificación. El siguiente argumento es un ejemplo de las respuestas obtenidas:

Si se pueden medir, la relación entre los ángulos obtenidos es que son iguales. Al ser las líneas paralelas, se corten por donde se corten siempre vamos a obtener los ángulos iguales en las 2 líneas.

En la cuarta actividad todos los grupos llegaron a medir de manera directa la superficie del polígono, si bien hay diferencias en el manejo de las unidades. En la primera medición cuatro grupos emplearon el cuadrado base de la cuadricula, seis usaron cm^2, uno emplearon m^2 y los cuatro restantes no indicaron la unidad de medida.

En el apartado siguiente, tres grupos mantuvieron el cuadrado de la cuadrícula como unidad de medida pero ocho pasaron a emplear cm^2, mientras que cuatro grupos no anotaron la unidad de medida en su respuesta. Sólo cuatro de los quince grupos argumentaron correctamente el aumento de la precisión en la medida:

Medida exacta: 5,72. La diferencia se debe a que esta medida es exacta y la nuestra es aproximada. Está claro que cuanto más pequeños sean los cuadrados, mejor se verá la medida de su área.

Módulo 2: Construcción de Triángulos

En la primera de las cuatro actividades que componen este módulo, todos los grupos contestaron correctamente, con argumentos como el siguiente:

Cuando A se mueve, mueve todo el segmento incluyendo el punto B, manteniendo la misma medida. Cuando B se mueve, A se queda fijo y B gira entorno a A. Se debe a que A es el punto inicial y B depende de él.

Trece grupos contestaron que sí es posible construir un triángulo usando tres segmentos de medidas 3, 4 y 5 centímetros; dos grupos dijeron que no dando una explicación errónea en términos de posiciones relativas de los lados. Un ejemplo del argumento seguido es el siguiente:

Si es posible construir un triángulo con 3 segmentos de 3, 4 y 5 cm respectivamente, moviendo los puntos iniciales y moviendo los puntos finales, hasta "encajar" los vértices de unos segmentos con otros. También se puede construir de forma exacta utilizando una circunferencia dando su centro y su radio.

En la tercera actividad de este módulo, catorce de los quince grupos contestaron que no se podía construir el triángulo dados esos segmentos, razonando acertadamente mediante la construcción de circunferencias de radio1 y 4 con centros respectivos en los extremos de un segmento de longitud 5:

No es posible crear un triángulo con 3 segmento de medida 1, 4 y 5, ya que la suma de los catetos debe ser mayor a la hipotenusa, es decir e + b tiene que ser mayor que c.

Sólo un grupo no encontró argumentos para justificar la imposibilidad de la construcción, basándose en las supuestas propiedades dinámicas de la construcción:

Tenemos 3 segmentos con 3 puntos iniciales y 3 puntos que se pueden mover por el plano, de manera, que solo hay que posicionar en el plano los 3 segmentos por el punto de creación y luego los inclinamos hasta hacer coincidir sus vértices.

Finalmente, la conclusión final reafirma lo obtenido en la actividad anterior. Catorce grupos contestaron empleando razonamiento más o menos acertado con diferentes nivel de precisión:

Un triángulo podrá construirse si cualquier lado de dicho triángulo sume más que el otro.

Depende de que la suma de los dos lados sea mayor que la base, es decir, cualquiera de los dos segmentos sumados sean mayor que el tercero.

5. Conclusiones

El diseño de la propuesta nos parece acertado en el contexto de la asignatura en la que se implementó. No obstante, es posible reformular o ampliar algunas actividades para dar a los estudiantes la posibilidad de expresar más propiedades, relaciones y razonamientos.

En relación con los resultados obtenidos y a pesar de identificar regularidades y singularidades en los quince grupos de futuros maestros, podemos identificar algunas de las habilidades puestas en juego por la mayor parte de ellos:

- Identifican los elementos básicos que es necesario conocer para tomar medidas de longitudes, ángulos y superficies.
- Distinguen procesos de medida directa e indirecta, contrastando los fundamentos de ambos.
- Tienen dificultades para estableces relaciones entre medidas de ángulos correspondientes, alternos y opuestos.
- Emplean diferentes unidades de medida y realizan determinadas conversiones entre ellas, aunque un tercio de los grupos expresó sus medidas sin usar ninguna.
- Adoptan, en muchos casos, una técnica de trabajo en matemáticas basada en el establecimiento y la exploración de conjeturas usando GeoGebra.
- Desarrollan un cierto dominio técnico del programa.

La inclusión de este tipo de propuestas complementa y enriquece la formación de profesores de Educación primaria en términos del desarrollo de su competencia matemática y de su futura actuación docente. Pero aún es necesario profundizar acerca de qué directrices o recomendaciones es necesario seguir para lograr que ese aprendizaje sea significativo y eficaz.

6. Referencias

Castillo, J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). *Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie.* Trabajo presentado en el Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática, Granada, 17-19 Febrero 2011.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: Autor.