
Una Aproximación Artística a los Conjuntos de Julia por medio de Programación de Computadoras.

Lic. Eduardo Adam Navas López
Universidad de El Salvador, El Salvador
eduardo.navas@ues.edu.sv

Resumen: En este artículo se menciona cómo el resurgimiento del estudio de los Conjuntos de Julia se dio gracias a la difusión de las computadoras personales y luego se propone la vía artística para aumentar y enriquecer la imagen mental sobre los Conjuntos de Julia. Esta vía incluye lo matemático, lo lúdico, lo artístico y lo computacional; y se argumenta que no son disjuntos ni disociados a pesar del rechazo general por parte de las comunidades académicas tradicionales y de las comunidades de críticos de arte. Después se mencionan algunas colecciones significativas de Arte Computacional o Arte Matemático Generado por Computadora, y finalmente se presentan cuatro creaciones artísticas basadas en Conjuntos de Julia a manera de ejemplo utilizando el lenguaje CFDG.

Palabras clave: Graficación por Computadora, Fractales, Conjuntos de Julia, CFDG, contextfree, Arte Matemático, Arte Computarizado, Arte Matemático Generado por Computadora.

Abstract: This article mentions how the resurgence of the study of Julia Sets was due to the diffusion of personal computers and then the artistic way is proposed to increase and enrich the mental image on Julia Sets. This way includes the mathematical, the playful, the artistic and the computational approach; and it is argued that they are not disjointed or dissociated approaches despite the general rejection by traditional academic communities and art critics communities. Some significant collections of Computational Art or Computer-Generated Mathematical Art are mentioned, and finally four artistic creations based on Julia Sets are presented as an example using the CFDG language.

Keywords: Computer Graphics, Fractals, Julia Sets, CFDG, contextfree, Mathematical Art, Computer Art, Computer Generated Mathematical Art.

1. Introducción

Como explica Bergweiler (1993) el estudio de la teoría de iteraciones es fundamental en la matemática, y su problema clásico es el estudio del comportamiento iterativo de una familia de funciones que dependen de un parámetro. En este sentido aparece el estudio de lo que hoy conocemos como Conjuntos de Julia a principios del siglo XX. Por supuesto que en aquel entonces no existían las computadoras y el estudio de estos conjuntos era muy difícil.

En las últimas décadas, como apunta Hitt (2003): «El avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos. Ahora, con la tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado.» (p. 214)

El estudio de muchas áreas de la matemática y de la enseñanza de la matemática se han visto modificadas con la popularización de diferentes tecnologías como las computadoras personales, entre ellas la Geometría Fractal. De tal forma que la construcción de múltiples imágenes generadas por computadora para formarse una más enriquecida imagen mental de conjuntos fractales como los Conjuntos de Julia es algo bastante asequible para los estudiantes de nuestros días.

Una forma de implementar esa construcción para alcanzar un mejor entendimiento de los Conjuntos de Julia (y de otros tipos de fractales) es por la vía artística, motivando que el aprendiente en un proceso meramente lúdico construya (en el sentido de crear) imágenes no sólo estéticamente agradables sino también dotadas de algún significado por medio de programas de computadora.

Esta vía no es muy utilizada en nuestro tiempo en la matemática en general, ya que a pesar de que la matemática y el arte han estado muy próximas desde las primeras manifestaciones

de racionalidad de la especie humana, lamentablemente, hemos visto que esas dos áreas del conocimiento se distanciaron en los programas escolares. (Zaleski, 2017)

La dimensión lúdica es más común. Bishop (1998) discute acerca del papel de los juegos en la educación matemática y apunta: «Los educadores en matemáticas han descubierto mediante su experiencia, [y] que han apoyado con investigaciones teóricas, que jugar puede ser una parte integrante del aprendizaje. Esto ha hecho del acto de jugar y de la idea del juego una actividad de enseñanza y aprendizaje mucho más extendida de lo que había sido anteriormente» (p. 21).

Está además la dimensión computacional, que es cada vez más común. Por ejemplo, Hoffmann (2001) presenta una experiencia en sexto grado de primaria utilizando una simulación de Monte Carlo para la introducción del concepto de área de un círculo unitario (que es la aproximación del número π). Está también la experiencia de DeJarnette (2016) en la que los estudiantes utilizan el entorno de programación Scratch para ayudarse a comprender cómo las distancias recorridas por ciertos objetos son funciones del tiempo.

Así que tenemos la aparentemente extraña conjunción de las cuatro dimensiones: la matemática, la artística, la lúdica y la computacional. Esta conjunción no es directamente acogida ni por los matemáticos, ni por los artistas y críticos del arte, ni por los computólogos tradicionales. De hecho, los pioneros en el Arte Computacional se enfrentaron al rechazo por parte de la comunidad matemática, como destacan Mumford & Wright: «¿Qué hacer con las imágenes? [...] no se podían publicar de la manera estándar. No había teoremas, sólo cuadros muy sugestivos. Proporcionaban pruebas convincentes de muchas conjeturas y alicientes para una exploración más profunda, pero los teoremas eran la moneda legal y las convenciones de ese día dictaban que las revistas sólo publicaban teoremas.» (2002)

Así mismo hay problemas con la aceptación artística según Franke: «[Las imágenes] eran consideradas sólo trazos de un plotter, el principal problema es la incerteza de los expertos, los historiadores del arte y los críticos, y encima de todos ellos los propietarios de galerías de

arte. El problema es que la computadora puede producir un número arbitrario de “originales” igual de buenos, que pueden estar en detrimento del mundo del negocio del arte.» (1986)

Sobre la aparente incompatibilidad entre la ciencia y el arte, y haciendo referencia al libro de Peitgen y Richter (1986), Eilenberg (1986) ofrece una conciliación: «Es bastante inusual que los científicos naturales [físicos y matemáticos] se esfuercen con tal tenacidad para llevar sus resultados e ideas al público en general, [...] En lugar de dar una presentación abstracta en palabras secas, han elegido imágenes con un atractivo directo y universal: ¡una combinación de matemática y arte!» Es decir, que el arte científico (ya sea arte matemático o arte computacional) puede usarse principalmente para dar a conocer resultados al público general.

Sobre la confusión entre el Arte Computacional y el Arte Estándar, Franke plantea la siguiente reflexión: «El arte de cada Era ha usado los medios de su tiempo para dar forma a la innovación artística [...] ¿Por qué no debería la computadora, ese medio universal de información y comunicación que incluso ha invadido nuestros hogares [y nuestras vidas], ser usada como medio e instrumento del arte?» (1986)

Más aún, Zalesky (2017) nos dice: «Siendo así, el arte verdadera, que no tiene fin en ninguna de sus realizaciones exteriores, tiene como identificación un principio espiritual que a todos vivifica y supera». Así que a fin de cuentas, el arte computacional, el arte matemático y el arte científico en general, así como todos los demás tipos de arte, no necesitan más justificación que su capacidad de propiciar que el ser humano se regocije en las obras en sí mismas.

Así es como han proliferado diversas colecciones y productores de Arte Matemático Generado por Computadora, como la colección de Peitgen & Richter (1996) que incluye muchos gráficos de fractales de sistemas dinámicos complejos, como la de The Bridges Organization (2010) que anualmente realiza una exposición y concurso internacional de arte matemático (no sólo generado por computadora), como la colección realizada por Aslaksen (s/f) para cursos universitarios, como la presentada por Navas (2015) que incluye varios tipos de fractales y otros tipos de técnicas de graficación por computadora, etc. También hay otras

colecciones menos formales, pero no menos impresionantes, como las de Nylander (s/f), la de la comunidad de Context Free Art (s/f), y el activo blog de Math Munch (s/f) que no sólo incluye arte matemático sino muchas cosas interesantes. Hay algunas colecciones que son muy específicas como los análisis matemáticos de Ross (2007) a partir de la espiral de Sacks.

Hablando ahora del arte matemático en el aula de clase y en el currículo en general, secundamos el razonamiento de Figueiras et al:

«En las Matemáticas que se enseñan, aquellas que en la Enseñanza Obligatoria se dice que servirán para adquirir lo que se necesita para desenvolverse en la vida, ¿quién puede negar un sitio a la belleza? ¿Pretendemos dejarnos llevar sólo por el dudoso pragmatismo de una matemática recortada tanto en el tiempo disponible para su enseñanza como en la potencialidad de sus valores?» (2000).

Más aún, «El estudio de los fractales es un elemento motivador en el alumnado, debido a la estética implícita en sus construcciones y a lo sugerentes que pueden resultar sus diseños. » (Figueiras, et al, 2000)

Las propuestas de Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria de Redondo & Haro (2004 y 2005) son una excelente fuente de ideas para planificar actividades de acercamiento a diferentes tipos de fractales, entre ellos los Conjuntos de Julia (ver Redondo & Haro, 2005, p.17). Sin embargo en este planteamiento vasto y general, escasea la componente artística además de los colores.

La presentación de los Conjuntos de Mandelbrot y de Julia hecha por Varona (2003) explica detalles técnicos sobre cómo graficarlos en el software Mathematica, que es software propietario, y propone la inclusión de paletas de colores para realzar las imágenes aunque sólo puede mostrarlas en escala de grises debido al tipo de publicación. Este es un ejemplo de que aunque hay aceptación del tema, no todas las revistas, editoriales o medios de publicación están interesados o preparados para aceptar «matemáticas con colores».

Entonces esta ponencia tiene como objetivo ampliar la parte de la propuesta de Redondo & Haro (2004 y 2005) en el tema de los Conjuntos de Julia, utilizando programación de computadoras como en la presentación de Varona (2003), pero con las siguientes diferencias: (a) enfatizando la componente artística y no la matemática, (b) no reduciendo a la dimensión estética sino incorporando las dimensiones comunicativa y didáctica, (c) agregando color, y (d) usando software libre, en este caso el software ContextFree (www.contextfreeart.org).

2. Aspectos teóricos

2.1. Los Conjuntos de Julia

Podemos tomar la definición de Conjuntos de Julia de Bergweiler (1993, p.153):

«Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorífica, donde \mathbb{C} es el plano complejo y $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Denotamos por f^n la n -ésima iteración de f , que es $f^0(z) = z$ y $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$ para $n \geq 1$ [...]»

Sin embargo se elegirá trabajar con la versión más simplificada de Navas (2010, p. 263):

«El Conjunto de Julia de una función $f_c(z)$ con semilla $c \in \mathbb{C}$, denotado por $J_c(f)$, es el conjunto de todos los valores $z \in \mathbb{C}$, tales que la siguiente sucesión sea acotada:

$$\begin{cases} z_0 = z \\ z_{n+1} = f_c(z_n) \end{cases}$$

Y típicamente $f_c(z) = z^2 + c$.» Sin embargo, pueden utilizarse muchas otras funciones diferentes que proporcionan resultados interesantes como los presentados en Peitgen & Richter (1996).

El criterio usado para determinar si las sucesiones divergen o no, es si z_k , con $k \leq N$, tiene un módulo mayor que 2, es decir $|z_k| \geq 2$ (procedimiento estándar para los conjuntos de Julia y de Mándelbrot). Puesto que no puede evaluarse hasta el infinito, se

usa una cota: N . Si la sucesión no “diverge” antes de llegar al N -ésimo término, se considera que no diverge, es decir que es acotada. (Navas, 2010)

2.2. Implementación

Para la implementación se utiliza el lenguaje CFDG del software Context Free (<https://www.contextfreeart.org/>) versión 3, y técnicas de graficación adaptadas de Baker (1995) y algunas de Foley et al (1996) de sus respectivos capítulos sobre graficación de fractales.

El lenguaje CFDG no es un lenguaje de programación propiamente dicho. En realidad, es un lenguaje en el que se puede definir un tipo particular de gramáticas libres de contexto cuyos símbolos terminales son las figuras primitivas: cuadrados, círculos y triángulos. A estas figuras se les pueden aplicar diferentes transformaciones afines (desplazamiento, escalamiento, rotación, etc.). Para mayor información, visitar la página de documentación de Context Free Art (s/f).

El objeto geométrico básico que se usará en los ejemplos es el cuadrado. Este se construye usando la siguiente primitiva:

```
SQUARE [  
  
  x <despl_x>  
  
  y <despl_y>  
  
  size <ancho> <alto>      #Se puede abreviar como s  
  
  hue <matiz>              #Se puede abreviar como h  
  
  saturation <saturación> #Se puede abreviar como sat  
  
  brightness <brillo>      #Se puede abreviar como b  
  
]
```

donde $\langle \text{despl}_x \rangle$ y $\langle \text{despl}_y \rangle$ indican el desplazamiento respecto del origen, $\langle \text{ancho} \rangle$ y $\langle \text{alto} \rangle$ determinan el tamaño de la figura, $\langle \text{matiz} \rangle$ es un ángulo entre 0° y 360° que indica el color de la figura según el modelo de color HSV, y $\langle \text{saturación} \rangle$ y $\langle \text{brillo} \rangle$ indican lo correspondiente. Para mayor información, ver Modelo de color HSV (2017).

La función requerida para determinar la convergencia de un punto (z_r, z_i) es:

MAXPASOS = 40

pasos(numPasos, z_r, z_i, c_r, c_i) =

if((numPasos < MAXPASOS) && (z_r*z_r+z_i*z_i < 4),

pasos(numPasos+1,

z_r*z_r - z_i*z_i + c_r, 2*z_r*z_i + c_i, c_r, c_i),

numPasos)

donde MAXPASOS es el valor de N del criterio de convergencia descrito en la sección 2.1.

La llamada inicial debe ser de la forma `pasos(0, z_r, z_i, c_r, c_i)`, donde (c_r, c_i) es el valor de la semilla. Esta llamada devuelve el número de iteraciones ejecutadas a partir de las cuales la sucesión diverge.

Luego, debe implementarse una figura (shape) determinada por la semilla con la siguiente estructura:

LIMITE = 1000 #Resolución de la imagen

#Extremos del plano complejo a mostrar:

LIMIZQ = -1.5

LIMDER = 1.5

LIMARRIBA = 1.5

LIMABAJO = -1,5

#Ancho y alto de los cuadros que discretizarán la imagen:

TAMX = (LIMDER-LIMIZQ)/(LIMITE-1)

TAMY = (LIMARRIBA-LIMABAJO)/(LIMITE-1)

shape julia(c_r,c_i) {

 loop i = (LIMITE) [] {

 z_i = (LIMARRIBA-LIMABAJO)*i/(LIMITE-1) + LIMABAJO #y

 loop j = LIMITE [] {

 z_r = (LIMDER-LIMIZQ)*j/(LIMITE-1) + LIMIZQ #x

 numPasos = pasos(0, z_r, z_i, c_r, c_i)

 if (numPasos==MAXPASOS){

```
        #Negro

        SQUARE[x z_r y z_i size TAMX TAMY b 0]

    } else {

        #Blanco

        SQUARE[x z_r y z_i size TAMX TAMY b 1]

    }

}

}

}

}
```

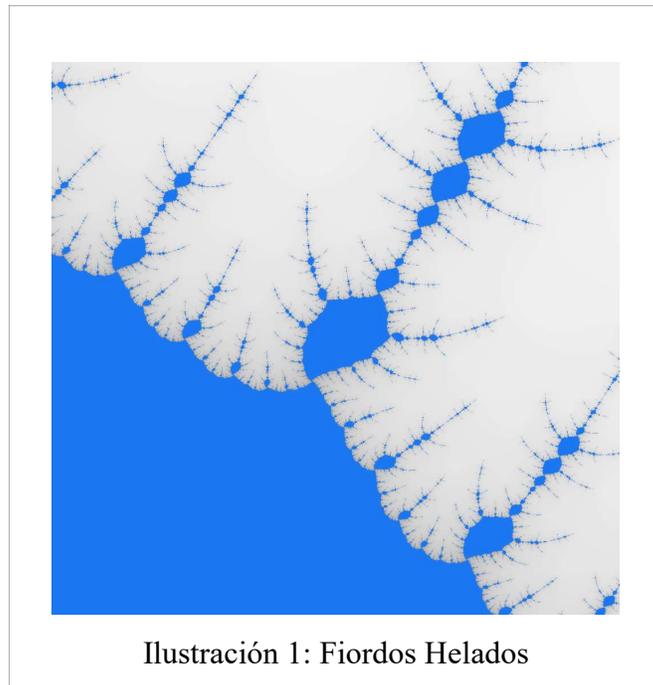
Para indicar cuál es la figura generadora se utiliza la siguiente directiva:

```
startshape julia(-0.381966, 0.618034)
```

3. Obras planteadas como ejemplos

Se recomienda tomar estas propuestas y experimentar con los parámetros (la semilla, el intervalo dibujado, los colores, etc.)

3.1. *Fiordos Helados*



Esta obra muestra una vista aérea de unos fiordos nevados, sus delgadas costas de arena oscura y el mar profundamente azul. La motivación es que los fiordos tienen una forma fractal natural.

Desde el punto de vista técnico, es una vista de un conjunto de Julia con semilla $c = -1.384286 + 0.004286i$ en el intervalo de los reales: $[0.01, 0.09]$ y en los imaginarios: $[0.02i, 0.10i]$.

La coloración de esta obra tiene un tinte constante al igual que la saturación, pero el brillo es variable en función del número de pasos en donde se determina que el punto pertenece o no pertenece al conjunto.

Código:

```
# Copyright 2015 Eduardo Adam Navas López  
  
# Este archivo es Software Libre liberado bajo la licencia GNU GPLv3 o su  
# versión más reciente:
```

```
# http://www.gnu.org/licenses/gpl.html

#Para generar la imagen ejecute la siguiente línea:

#$ cfdg -b 0 -s 1000 fiordos.cfdg fiordos.png

startshape fiordos(-1.384286,0.004286)

LIMITE = 1000 #Resolución de la imagen

MAXPASOS = 300

LIMIZQ = 0.01

LIMDER = 0.09

LIMARRIBA = 0.10

LIMABAJO = 0.02

TAMX = (LIMDER-LIMIZQ)/(LIMITE-1)

TAMY = (LIMARRIBA-LIMABAJO)/(LIMITE-1)

pasos(numPasos,z_r,z_i,c_r,c_i) =

    if((numPasos < MAXPASOS) && (z_r*z_r+z_i*z_i<4),

        pasos(numPasos+1,
```

```

        z_r*z_r - z_i*z_i + c_r, 2*z_r*z_i + c_i, c_r, c_i),
        numPasos)

shape fiordos(c_r,c_i) {
    FILL[h 214 sat 0.89 b 0.95] #Océano

    loop i = (LIMITE) [] {
        z_i = (LIMARRIBA-LIMABAJO)*i/(LIMITE-1) + LIMABAJO #y

        loop j = LIMITE [] {
            z_r = (LIMDER-LIMIZQ)*j/(LIMITE-1) + LIMIZQ #x

            numPasos = pasos(0, z_r, z_i, c_r, c_i)

            if(numPasos<MAXPASOS){
                SQUARE[x z_r
                    y z_i
                    size TAMX TAMY
                    h 30 sat 0
                    b (1+(1-numPasos)/(MAXPASOS-1))]
            }
        }
    }
}

```

3.2. *El Gemido del Bosque de Prípiat*

Esta obra muestra un bosque enfermo en los alrededores de la ciudad de Prípiat. Esta ciudad fantasma (abandonada) es conocida porque sufrió los efectos del peor accidente de la historia de la energía nuclear el 26 de abril de 1986, cuando se produjo el sobrecalentamiento y explosión del reactor número 4 de la Central Nuclear de Chernóbil durante una prueba de apagado. La motivación surgió luego de ver un documental detallado sobre el desastre nuclear de la central de energía nuclear de Chernóbil.

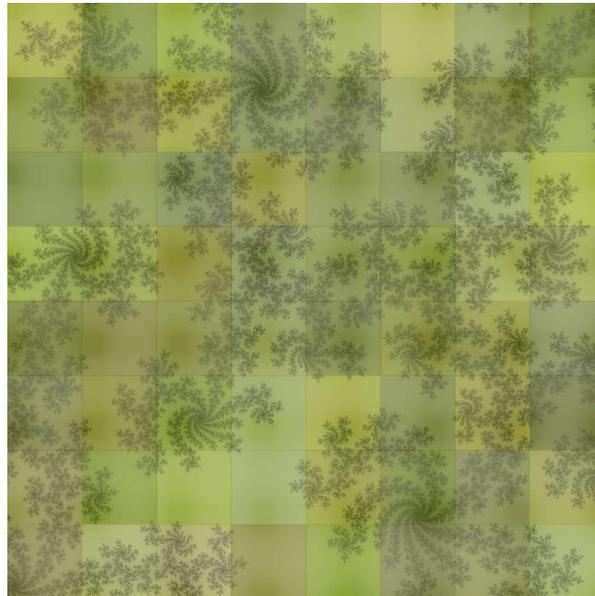


Ilustración 2: El Gemido del Bosque de Prípiat

Desde el punto de vista técnico es una vista de un conjunto de Julia con semilla $c = -0.381966 + 0.618034i$ en el intervalo de los reales: $[-0.052857, 0.188571]$ y en los imaginarios: $[-0.105714i, 0.135714i]$.

La coloración de esta obra tiene un tinte variable aleatorio entre 60 y 74, una saturación aleatoria variable entre 0.41 y 0.66, y un brillo máximo aleatorio variable entre 0.32 y 0.35 para los puntos que no pertenecen al conjunto.

Código:

```
# Copyright 2015 Eduardo Adam Navas López

# Este archivo es Software Libre liberado bajo la licencia GNU GPLv3 o su
# versión más reciente:

# http://www.gnu.org/licenses/gpl.html

#Para generar la imagen ejecute la siguiente línea:

#$ cfdg -b 0 -s 1000 -v PAJBHA bosque.cfdg bosque.png

LIMITE = 1000 #Resolución de la imagen

MAXPASOS = 200

MINMAXBRILLO = 0.32

MAXMAXBRILLO = 0.68

startshape bosque

LIMIZQ = -0.052857

LIMABAJO = -0.105714

LIMDER = 0.188571

LIMARRIBA = 0.135714
```

```
TAMX = (LIMDER-LIMIZQ) / (LIMITE-1)

TAMY = (LIMARRIBA-LIMABAJO) / (LIMITE-1)

pasos(numPasos, z_r, z_i, c_r, c_i) =

    if((numPasos < MAXPASOS) && (z_r*z_r+z_i*z_i<4),

        pasos(numPasos+1,

            z_r*z_r - z_i*z_i + c_r, 2*z_r*z_i + c_i, c_r, c_i),

        numPasos)

NUMBLOQUES = 8

shape bosque{

    loop i = NUMBLOQUES []{

        loop j = NUMBLOQUES [] {

            julia(-0.381966, 0.618034,

                j*(LIMDER-LIMIZQ)/NUMBLOQUES+LIMIZQ,

                i*(LIMARRIBA-LIMABAJO)/NUMBLOQUES+LIMABAJO,

                rand(MINMAXBRILLO,MAXMAXBRILLO)) [h rand(60,74)

                sat rand(0.41,0.66)

                b rand(0.32,0.35)]

        }

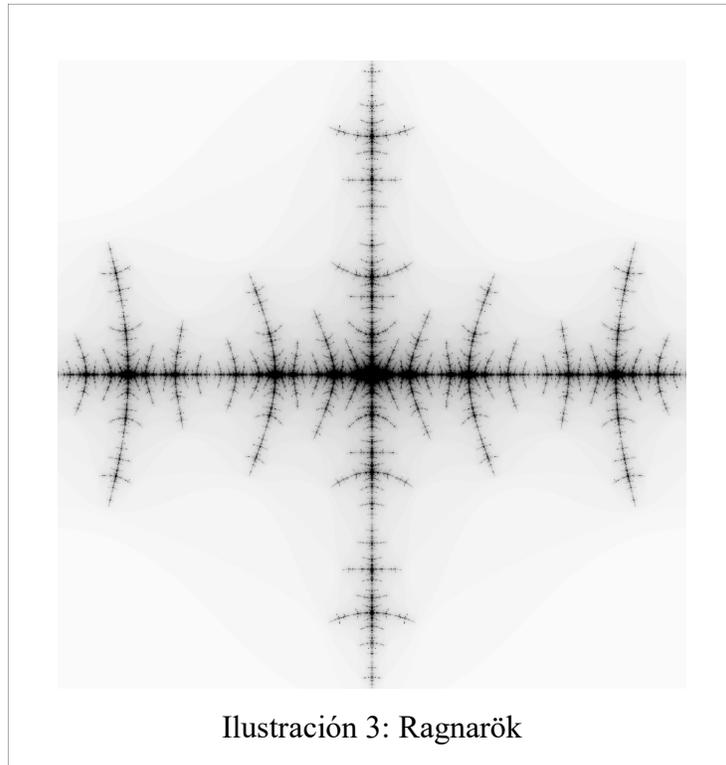
    }

}
```

```
}  
  
shape julia(c_r,c_i,xi,yi,maxbrillo) {  
  
    xf = xi+(LIMDER-LIMIZQ)/NUMBLOQUES  
  
    yf = yi+(LIMARRIBA-LIMABAJO)/NUMBLOQUES  
  
    loop i = LIMITE/NUMBLOQUES [] {  
  
        z_i = (yf-yi)*i/(LIMITE/NUMBLOQUES-1) + yi  
  
        loop j = LIMITE/NUMBLOQUES [] {  
  
            z_r = (xf-xi)*j/(LIMITE/NUMBLOQUES-1) + xi  
  
  
            numPasos = pasos(0, z_r, z_i, c_r, c_i)  
  
            SQUARE[x z_r y z_i size TAMX TAMY  
  
            b ( maxbrillo+maxbrillo*(1-numPasos)/(MAXPASOS-1) )]  
  
        }  
  
    }  
  
}
```

3.3. Ragnarök

En esta obra se muestra un escenario áspero, afilado y nórdico que ilustra el cataclismo del



Ragnarök, que es el apocalipsis vikingo. La motivación viene de la historia del violento apocalipsis vikingo.

Desde el punto de vista técnico, es una vista de un conjunto de Julia con semilla $c = -1.4 + 0.0i$ en el intervalo de los reales: $[-0.6, 0.6]$ y en los imaginarios: $[-0.6i, 0.6i]$.

La coloración de esta obra tiene un brillo blanco variable más alto mientras más rápido se determina que los puntos no pertenecen al conjunto. Los puntos que sí pertenecen al conjunto son negros.

Código:

```
# Copyright 2015 Eduardo Adam Navas López
```

```
# Este archivo es Software Libre liberado bajo la licencia GNU GPLv3 o su
versión más reciente:
```

```
# http://www.gnu.org/licenses/gpl.html
```

```
#Para generar la imagen ejecute la siguiente línea:
```

```
#$ cfdg -b 0 -s 1000 ragnarok.cfdg ragnarok.png
```

```
#Posibilidades de ragnarok
```

```
#-1.384286,0.004286
```

```
#-1.3, 0.00525
```

```
#-1.3,0.0
```

```
#-1.5, 0.0
```

```
startshape rag(-1.4, 0.0)
```

```
LIMITE = 1000 #Resolución de la imagen
```

```
MAXPASOS = 100
```

```
LIMIZQ = -0.6
```

```
LIMDER = 0.6
```

```
LIMARRIBA = 0.6
```

```
LIMABAJO = -0.6
```

```
TAMX = (LIMDER-LIMIZQ) / (LIMITE-1)
```

```
TAMY = (LIMARRIBA-LIMABAJO) / (LIMITE-1)
```

```
pasos(numPasos, z_r, z_i, c_r, c_i) =
```

```
  if((numPasos < MAXPASOS) && (z_r*z_r+z_i*z_i<4),
```

```
    pasos(numPasos+1,
```

```
    z_r*z_r - z_i*z_i + c_r, 2*z_r*z_i + c_i, c_r, c_i),
```

```
    numPasos)
```

```
shape rag(c_r, c_i) {
```

```
  loop i = LIMITE/2 [] {
```

```
    z_i = (LIMARRIBA-LIMABAJO)*i / (LIMITE-1) + LIMABAJO #y
```

```
    loop j = LIMITE/2 [] {
```

```
      z_r = (LIMDER-LIMIZQ)*j / (LIMITE-1) + LIMIZQ #x
```

```
      numPasos = pasos(0, z_r, z_i, c_r, c_i)
```

```
      brillo = (1+(1-numPasos) / (MAXPASOS-1))
```

```
      SQUARE[x z_r    y z_i    size TAMX TAMY b brillo]
```

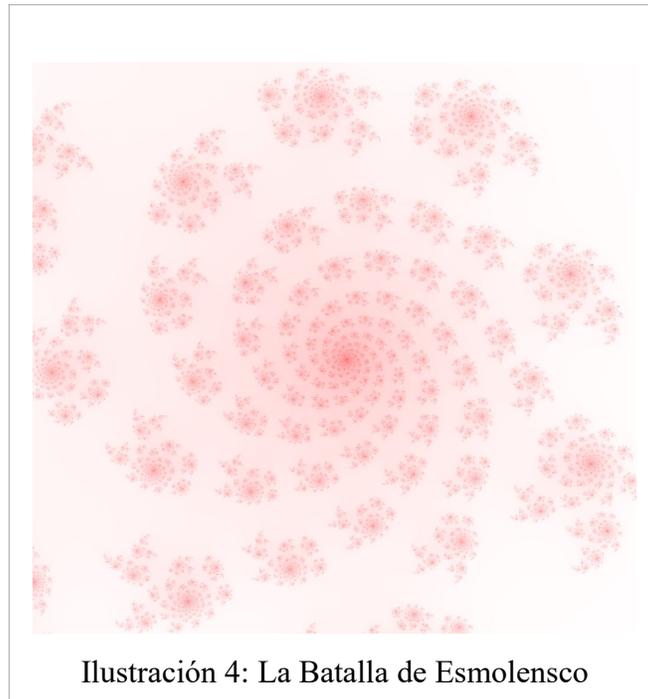
```
      SQUARE[x (-z_r) y z_i    size TAMX TAMY b brillo]
```

```
      SQUARE[x z_r    y (-z_i) size TAMX TAMY b brillo]
```

```
SQUARE[x (-z_r) y (-z_i) size TAMX TAMY b brillo]
    }
}
}
```

3.4. *La Batalla de Esmolensco*

Aquí lo que se quiere representar es un baño de sangre sobre el suelo helado de Esmolensko. La motivación viene de una serie de documentales sobre la Segunda Guerra Mundial, particularmente sobre la Operación Barbarroja y cómo se desarrollaron los hechos del avance alemán en suelo soviético en el período de 1941-1943.



Desde el punto de vista técnico es una vista de un conjunto de Julia con semilla $c = 0.39 - 0.252857i$ en el intervalo de los reales: $[-0.21, 0.63]$ y en los imaginarios: $[-0.865714i, -0.025714i]$.

La coloración de esta obra son puntos de tono rojo y brillo máximo con saturación más baja para los puntos mientras más rápido se determine que no pertenecen al conjunto, y más alta mientras más se tarde en determinar la no pertenencia. Los puntos que sí pertenecen al conjunto se pintan como rojo intenso.

Código:

```
# Copyright 2015 Eduardo Adam Navas López

# Este archivo es Software Libre liberado bajo la licencia GNU GPLv3 o su
# versión más reciente:

# http://www.gnu.org/licenses/gpl.html

#Para generar la imagen ejecute la siguiente línea:

#$ cfdg -b 0 -s 1000 batalla.cfdg batalla.png

LIMITE = 1000 #Resolución de la imagen

MAXPASOS = 400

startshape julia3(0.39, -0.252857)

LADO = 0.84

CX = 0.21
```

```
CY = -0.445714

LIMIZQ = CX - LADO/2

LIMABAJO = CY - LADO/2

LIMDER = CX + LADO/2

LIMARRIBA = CY + LADO/2

TAMX = (LIMDER-LIMIZQ)/(LIMITE-1)

TAMY = (LIMARRIBA-LIMABAJO)/(LIMITE-1)

pasos(numPasos,z_r,z_i,c_r,c_i) =

    if((numPasos < MAXPASOS) && (z_r*z_r+z_i*z_i<4),

        pasos(numPasos+1,

            z_r*z_r - z_i*z_i + c_r, 2*z_r*z_i + c_i, c_r, c_i),

        numPasos)

shape julia3(c_r,c_i) {

    loop i = LIMITE [] {

        z_i = (LIMARRIBA-LIMABAJO)*i/(LIMITE-1) + LIMABAJO #y

        loop j = LIMITE [] {

            z_r = (LIMDER-LIMIZQ)*j/(LIMITE-1) + LIMIZQ #x
```

```

        numPasos = pasos(0, z_r, z_i, c_r, c_i)

        SQUARE[x z_r y z_i size TAMX TAMY b 1

                sat ((numPasos-1)/(MAXPASOS-1))]

        }

    }

}

```

4. Conclusiones y recomendaciones

Tal como dicen González, Molina y Sánchez (2014), sin duda existe potencial en la inclusión de actividades lúdicas en la enseñanza pero deben tomarse precauciones para que las sesiones resulten útiles a los propósitos del plan de estudios. Así que este tipo de actividades deben realizarse principalmente en espacios extracurriculares, ya que los alumnos tienen diferentes niveles de aptitud y sensibilidad artística.

Las actividades artísticas en general se ven muy enriquecidas gracias a que la computadora nos ofrece la posibilidad de experimentación, ya que se puede chequear la influencia de parámetros en los resultados, se puede verificar el resultado de las transformaciones, los valores limitantes de cálculos aplicados interactivamente, etc. (Franke, 1986)

«Los estudios de arte Moderno han mostrado, sin embargo, que conseguir la definición clásica de belleza no es en sí mismo suficiente para crear una obra de arte. Además debe haber algo que estimule el interés, exija implicación, y motive pensamientos adicionales» Franke (1986). Así que no basta con «crear» imágenes fractales complicadas o que sean estéticamente bellas, sino que deben tener un significado más trascendente.

Hay que notar que las estructuras finas de estas imágenes son manifestaciones del hecho de que las más pequeñas variaciones (en este caso el valor de la semilla) al comienzo de un procedimiento pueden dar lugar a enormes diferencias posteriormente (los diferentes

conjuntos de Julia son muy diferentes entre sí), y como nos dice Eilenberg (1986), la investigación de los sistemas dinámicos indica que esto es típico de los procesos naturales.

Finalmente podemos hacer eco del documental de McCabe y Reisz y decir que podemos extraer arte de la matemática ya que «La matemática es una parte inherente de la naturaleza» (2015).

5. Referencias bibliográficas

Aslaksen, H. (s/f). Mathematics in Art and Architecture (GEK1518) [Programa del curso]. Department of Mathematics, Faculty of Science, National University of Singapore. www.math.nus.edu.sg/aslaksen/teaching/math-art-arch.shtm

Baker, P., & Hearn, D. (1995). *Gráficas por computadora*. Prentice Hall.

Bergweiler, W. (1993). Iteration of meromorphic functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29(2), 151-188.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en la educación matemática. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 18, 9-19.

Context Free Art. (s/f). Galería de Arte usando el lenguajej CFDG. Recuperado de <https://contextfreeart.org/gallery/>

DeJarnette, A. F. (2016). Students' use of a computer programming environment to represent distance as a function of time. En Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PMENA 38)*. Tucson, AZ: The University of Arizona. ISBN 978-0-692-62876-8.

Eilenberg, G. (1986). Freedom, Science, and Aesthetics. En Peitgen, H. O., & Richter, P. H. *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems*. Springer Science &

Business Media. pp. 175-180.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A., Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Suma*, 35, 45-54.

Franke, H. W. (1986). Refractions of Science into Art. En Peitgen, H. O., & Richter, P. H. *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems*. Springer Science & Business Media. pp. 181-188.

Foley, J. D., Van Dam, A., Feiner, S. K., Hughes, J. F., & Phillips, R. L. (1996). *Introducción a la Graficación por Computador*. Addison-Wesley.

González Peralta, A. G., Molina Zavaleta, J. G., & Sánchez Aguilar, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, 26(3), 109-133.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213.

Hoffmann, R. (2001). Computer simulations in mathematics education. En van den Heuvel-Panhuizen, M., (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 25)*. Utrecht, The Netherlands. International Group for the Psychology of Mathematics Education. ISBN-90-74684-16-5.

Math Munch. (s/f). Math Munch. <https://mathmunch.org/>

McCabe, D., Reisz, R. (productores) y McCabe, D., Reisz, R. (directores). (2015). *The Great Math Mystery* [Cinta cinematográfica]. <http://www.imdb.com/title/tt4254160/>

Modelo de color HSV. (2017, 5 de agosto). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 01:10, octubre 30, 2017 desde

https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Modelo_de_color_HSV&oldid=100939084

Mumford, D., Series, C., & Wright, D. (2002). *Indra's pearls: the vision of Felix Klein*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-35253-3.

Navas, E. (2010). *Una Humilde Introducción a la Graficación por Computadora y Otras Yerbas*. Universidad Centroamericana José Simeón Cañas: El Salvador. ISBN: 978-99923-73-36-1. Recuperado de http://dei.uca.edu.sv/publicaciones/libro_graficos_v1.0.tar.gz

Navas, E. (2015). Arte Matemático 2015 [Álbum de imágenes]. Recuperado de <http://flic.kr/s/aHsk8rHNRi>

Nylander, P. (s/f). Math Artwork. Recuperado de <http://bugman123.com/Math>

Peitgen, H. O., & Richter, P. H. (1986). *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN-13: 978-3-642-61719-5.

Redondo, A., & Haro, M. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I). *Suma*, 47, 19-28.

Redondo, A., & Haro, M. (2005). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II). *Suma*, 48, 15-21.

Ross, M. M. (2007). The Sacks Number Spiral. Recuperado de <http://www.naturalnumbers.org/sparticle.html>

The Bridges Organization. (2010). Mathematical Art Galleries <http://gallery.bridgesmathart.org/>

Varona, J. L. (2003). Representación gráfica de fractales mediante un programa de cálculo

simbólico. *La Gaceta de la RSME*, 6, 213-230.

Zaleski Filho, D. (2017). *Matemática e Arte*. Autêntica. Coleção: Tendências em educação matemática.