Probabilidad: un modelo para resolver diversos problemas

Félix Núñez Vanegas
Instituto Tecnológico de Costa Rica – Universidad de Costa Rica, Costa Rica.
fnunez@itcr.ac.cr

Giovanni Sanabria Brenes
Instituto Tecnológico de Costa Rica – Universidad de Costa Rica, Costa Rica.
gsanabria@itcr.ac.cr

Resumen: Con el fin de brindar una faceta distinta de la probabilidad, específicamente la de modelo para resolver problemas ajenos al azar, entre ellos, determinar una cantidad de objetos, aproximar un número irracional y hallar un área, se desarrolló el presente trabajo. Por lo general, en un curso introductorio de probabilidad, la resolución de problemas se enfoca en el cálculo de la probabilidad de un determinado evento, convirtiendo este cálculo en el objeto mismo de resolver el problema y degradando el poder aplicativo de la probabilidad. En este artículo veremos que no es únicamente útil para resolver problemas en los que intervenga la toma de decisiones.

Palabras clave: didáctica, probabilidad frecuencial, ley de los grandes números, modelación, simulación.

Abstract: In order to provide a different use of the probability, specifically as model to solve some kind of problems, including determining a number of objects, approximate an irrational number and calculate an area, this paper was developed. Usually, in an introductory course of probability, problems solving has to do with calculation of some event probabilities, making this calculation the object itself of resolution problem and to degrading, at this way, the application power of probability. In this article we will see that it is not only useful for solving problems in which decision-making involved.

Keywords: teaching, frequency probability, law of large numbers, simulation.

1. Situaciones problema en la enseñanza de la probabilidad

Las teorías de didáctica de las matemáticas actuales se centran en una enseñanza basada en la resolución de problemas. En particular, la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986), señala que el profesor debe diseñar situaciones problema cuya solución sea el conocimiento que se quiere enseñar. Así, se plantean uno o varios problemas al estudiante (situación a-didáctica), el cual debe ser motivado, para que por medio de sus conocimientos previos, logre resolverlos y así lograr la devolución de la situación, en la que le devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al profesor. Cuando se logra la devolución de la situación, el profesor toma este conocimiento para institucionalizarlo, es decir el profesor relaciona este conocimiento contextualizado adquirido con el saber formal pretendido. Luego este saber debe ser aplicado en la resolución de problemas. El aprendizaje en esta teoría se evidencia, cuando en un medio a-didáctico, en un contexto fuera incluso del ámbito escolar, el estudiante es capaz de aplicarlo para resolver algún problema en el que intervenga dicho conocimiento. Por otro lado, Vérgnaud (1990), en su teoría de Campos Conceptuales establece que, un conocimiento si se precia de ser racional, éste debe ser operatorio, de los contrario, no es conocimiento.

En ese sentido, la probabilidad no solamente debe ser útil para la toma de decisiones, por ejemplo, al jugar lotería, el jugador sabe que tiene una probabilidad de acertar el mayor de 1 en 100000, y de esta manera decidirá si compra lotería o no. Lo mismo sucede cuando una persona sabe intuitivamente, en un día dado, que en la tarde de ese día es muy probable que llueva, si lleva o no el paraguas. La probabilidad también funciona como modelo para resolver algunos problemas, como el de calcular una área, estimar un número irracional, estimar el número de objetos que hay en un determinado recipiente, por ejemplo.

La resolución de problemas debe permear el proceso de enseñanza, y debe estar presente no solo al final para aplicar los conceptos adquiridos, sino también, al inicio para aprehender los conceptos. El profesor debe diseñar buenas situaciones problema para lograr estos objetivos.

En el caso de probabilidad, ¿Qué es resolver un problema? Al revisar diversos libros de texto, aunque algunos plantean situaciones atractivas y contextualizadas, el problema se reduce al cálculo de la probabilidad de un determinado evento. Esto da la sensación de que se busca calcular probabilidad sin ningún otro fin, más que el de calcular. Así, después de abordar el estudio de un tópico de probabilidad, los problemas a resolver se reducen a calcular probabilidades.

Por otro lado, cuando se quiere formular una aproximación a una situación a-didáctica para introducir el concepto de probabilidad, el panorama es más negativo. ¿Cuál situación problema se le deben plantear a los estudiantes? Sobresalen los problemas de dados y monedas, pero ¿será correcto introducir el concepto de probabilidad planteando situaciones al estudiante como que determine la probabilidad de que salga un seis en un dado?

Al respecto, mencionamos que en una ocasión, nos comentaba un ex-estudiante de un curso de probabilidades, que él estaba sorprendido, porque en ese curso lo habían enseñado a calcular probabilidades de ganar en juegos de azar como dados, ruletas, cartas, cálculos que a él no le interesaban, le daban la sensación de estar preparándose para ir a un casino, y su formación cristiana chocaba con eso.

Si bien se puede aprovechar el concepto intuitivo de probabilidad que posee el estudiante, el fin de un ambiente a-didáctico es que el conocimiento a enseñar surja del tratamiento con la situación y no que la misma situación lo mencione.

Entonces, ¿cuáles situaciones problema pueden ser útiles en la enseñanza de la probabilidad? Con base en lo anterior, proponemos las siguientes:

1. Para la introducción del concepto de probabilidad. Se recomienda utilizar situaciones sobre toma decisiones.

2. Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de probabilidad. En esta etapa debe predominar las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades, pero estás se pueden combinar con situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilicen la probabilidad como modelo.

3. Para la aplicación de los conocimientos aprendidos. Se recomienda el uso principalmente de situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

Así se proponen tres tipos de situaciones: las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades (ampliamente tratadas en los libros de texto), las situaciones sobre toma de decisiones (que serán abordadas en un próximo trabajo) y las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo (a exponer en el presente trabajo).

En el siguiente apartado, se brinda lo que se entenderá por las situaciones que utilizan la probabilidad como modelo. Posteriormente se brindarán algunos ejemplos y finalmente, se exponen los resultados obtenidos al solicitar a algunos estudiantes avanzados y docentes que intenten resolver ciertas situaciones por medio de la probabilidad.

2. Situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo

Por lo general, un requisito para utilizar la probabilidad como una herramienta para resolver un problema es que el problema posea una situación o experiencia azarosa.

Sin embargo, se puede presentar problemas desprovistos del azar, donde si aquel que lo resuelve quiere utilizar la probabilidad, debe recrear dentro del problema una situación azarosa, modelando las relaciones de la situación problema con los elementos teóricos de la probabilidad.

Este tipo de situaciones que utilizan la probabilidad como modelo requiere de un dominio más completo y complejo de la probabilidad, pues implican aplicar la probabilidad donde no se ve, construyendo una situación azarosa. En estas situaciones, aplicar el concepto adquirido de probabilidad, implica crear las condiciones necesarias para aplicarlo.

¿Cómo se aplica la probabilidad en este tipo de situaciones? Dado que la probabilidad es una medida relativa (medida de la posibilidad de que suceda de un evento), ésta puede ser utilizada para hallar ciertas medidas absolutas.

Más concretamente, de acuerdo a la Generalización de la ley de Laplace, dado un evento X de un espacio muestral equiprobable Ω, con u una medida asociada a Ω, se tiene que la probabilidad de que ocurra X es:

$$P(X) = ((u(X))/(u(\Omega))).$$

Si $P(X)$ y $u(\Omega)$ son conocidos, entonces se puede hallar la medida de X.

Así, en ciertas situaciones que se requiera hallar una medida absoluta (por ejemplo la cantidad de objetos o un área), esta se puede ver como la medida de un evento de una situación azarosa construida.

Para entender de qué estamos hablando, presentamos a continuación algunos ejemplos de estas situaciones, las cuales, en ciertos casos, se suelen abordar con la teoría de estimación de estadística inferencial. Proponemos sin embargo, abordarlas por medio de la Ley de los Grandes Números, involucrando la probabilidad frecuencial y el uso de la tecnología. Confiamos que este tratamiento, distinto al de la estadística inferencial, brinde un camino más justificado para enfrentar estos problemas.

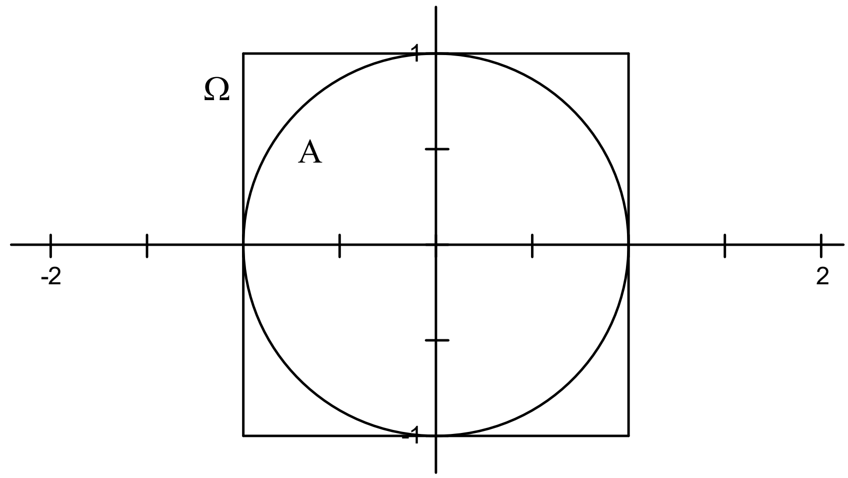
3. Ejemplos de situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo

Aproximación de un número racional

Situación #1. Halle números racionales que se aproximen a π

Para resolver esta situación, primero debemos ver π como la medida de algo. Una opción es verlo como el área de un círculo de radio 1. Más concretamente el círculo centrado en el origen de un plano coordenado de radio 1.

Ahora, la medida escogida es el área, por lo que necesitamos un universo: una figura que contenga al círculo y que tenga un área sencilla de averiguar. Una opción es considerar el cuadrado centrado en el origen y de lado 2. Sea A el conjunto de puntos en el interior de puntos y Ω el conjunto de puntos en el interior del cuadrado. La representación de las figuras definidas es:



Ahora, debemos crear una situación azarosa: Se elige un punto al azar en el interior del cuadrado. Note que el espacio muestral de esta experiencia aleatoria coincide con Ω. Además, A es visto como el evento

A: el punto elegido está en el interior del círculo.

Note que la probabilidad de A es

$$P(A)= \text{área}(A) / \text{área}(\Omega)= pi/4$$

De donde pi= 4*P(A)

Así, si se obtienen aproximaciones racionales de P(A), y por tanto, aproximaciones racionales de pi.

¿Cómo hallar aproximaciones racionales de P(A)? Aquí se utilizará el concepto de probabilidad frecuencial. Si simulamos un número n suficientemente grande de veces la situación azarosa, se tiene que P(A) es aproximadamente:

(Número de veces que sucede A) / n.

Nótese que esta aproximación es un número racional.

Para simular la situación se utilizará Excel. Es importante hacer notar que, el punto a colocar aleatoriamente en el interior del cuadrado, queda determinado de manera única por sus coordenadas. La coordenada X del punto varía de -1 a 1, al igual que la coordenada Y.

¿Cómo elegir un número al azar entre -1 y 1? Dados a y b reales tales que $a<b$, sea r un número al azar entre 0 y 1. Considere la variable Z dada por

$$Z=a+r(b-a)$$

Vamos a probar que Z sigue una distribución uniforme entre a y b ($Z\sim U[a,b]$). Como $r\sim U[0,1]$, entonces

$$P(r<=k) = (k-0)/(1-0) = k \text{ para todo } k \text{ entre } 0 \text{ y } 1 \qquad (*)$$

Por lo tanto, si k está entre a y b se tiene que

$$P(Z<=k)=P(a+r(b-a)<=k) =P(r<=(k-a)/(b-a))= (k-a)/(b-a)) \text{ por } (*)$$

Obteniendo la distribución acumulada de la uniforme, por lo tanto $Z\sim U[a,b]$.

Ahora, r se puede obtener fácilmente en Excel con la función Aleatorio(). Además, de acuerdo al resultado anterior, el valor z=a +Aleatorio()*(b-a) es un número real elegido al azar entre a y b. En particular, un número al azar entre -1 y 1 es dado por Excel escribiendo: -1+Aleatorio()*2.

Para similar la situación azarosa, escribimos en Excel:

	A	B	C
1	Coordenada X de P	Coordenada Y de P	¿P pertenece al interior del círculo?
2	=-1+Aleatorio()*2	=-1+Aleatorio()*2	=Si(A2*A2+B2*B2<1, "SI", "NO")

Luego, utilizando el mouse se puede arrastrar las fórmulas de la fila 2 hasta la fila 1001, obteniendo 1000 simulaciones de la situación azarosa. Si se cuenta el número de simulaciones que tiene "SI" y se divide entre 1000, se obtiene una aproximación racional a P(A).

Así, una aproximación racional a PI se obtiene escribiendo en una celda en blanco de Excel:

=4 * CONTAR.SI(C2:C1001; "SI") / 1000

Para hallar mejores aproximaciones, de acuerdo a la ley de los grandes números, se debe aumentar el número de simulaciones.

Hallar la cantidad aproximada de ciertos objetos

Situación #2. Se compra una bolsa de frijoles rojos. ¿Cuántos frijoles hay en la bolsa?

Sea N la cantidad de frijoles en la bolsa. ¿Cómo determinar, usando probabilidades, el valor de N?

Para ello, debemos recrear una situación aleatoria, pero ¿cómo recrearla, si todos los frijoles son de un mismo color?

La idea es sustituir una cantidad M de frijoles rojos tomados de la bolsa, por M frijoles negros del mismo tamaño. Así nuestra situación azarosa, sería:

Elegir un frijol al azar de la bolsa. Considérese ahora el evento:

A: el frijol elegido es negro.

Notamos que, por la Ley de Laplace, que la probabilidad de A es

$$P(A)=M/N$$

De donde se obtiene que el valor buscado N, está dado por M/P(A).

Por lo tanto, si tuviéramos una aproximación de P(A), tendríamos el valor aproximado de N.

Hallando una aproximación para P(A)

Por Ley de los grandes Números, si se extraen una cantidad suficientemente grande de n frijoles de la bolsa y se obtienen en esa muestra m frijoles negros, una aproximación a P(A) será:

P(A) aprox igual m/n. De ahí se tiene que m/n aprox igual M/N, de donde se obtiene que N aprox igual (n*M)/m

¿Será buena esta aproximación?

Para responder esta pregunta, suponga que la bolsa tiene N=150 frijoles y que este número N se desconoce y simulemos el proceso en Excel. Suponga que ya se sustituyó una cantidad de frijoles negros por una cantidad de frijoles rojos.

Así en la primera columna, se enumeran los 150 frijoles y en la segunda columna indicaremos el color de cada uno de ellos. Para tal efecto, se escribe en la celda B1: SI(ALEATORIO.ENTRE(0;1)=0; “Rojo”; “Negro”).

Hasta este instante hemos simulado la bolsa con frijoles rojos y negros, seguidamente se procede a simular la extracción de un frijol varias veces. ¿Cómo se hace esto? Veamos.

Se va a simular la extracción de n=80 frijoles de la bolsa. Recuerde que estas extracciones son con reposición, es decir extraemos un frijol, y se devuelve a la bolsa antes de la siguiente extracción.

Para extraer un frijol, en la celda D1, escribimos =ALEATORIO.ENTRE(1;150). Este valor, nos da el número del frijol extraído. Si esta fórmula la arrastramos hasta la celda D80, se obtiene el número de los 80 frijoles extraídos. Seguidamente, en la columna E, colocaremos el color de cada uno de estos frijoles extraídos. Pare ello, se debe de buscar el número del frijol en la columna A y ver su color en la columna B. Esto se logra escribiendo en la celda E1: =BUSCARV(D1;$A$1:$B$150;2). ¡Con ello, hemos simulado la 80 extracciones!.

Ahora nos resta contar, de los 80 frijoles extraídos, los frijoles negros. Y además, hallemos la aproximación de N=150. Para esto, se escribe lo siguiente en las celdas respectivas:

	F	G	H	I
1	Frijoles negros en la bolsa	Frijoles negros en los 80 extraidos	Aproximación de P(A)	Aproximación de N
2	=CONTAR.SI(B1:B150; “Negro”)	=CONTAR.SI(E1:E80; “Negro”)	= G2/80	= F2 / H2

Así, se obtiene una aproximación de la cantidad de frijoles en la bolsa, ¿Qué tan buena es está aproximación?

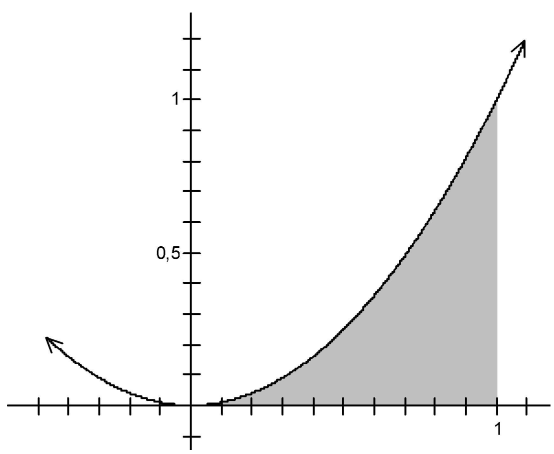
El lector, puede notar que en la simulación el valor en la celda I2 es bastante cercano a 150. La calidad de la aproximación dependerá de la cantidad de frijoles extraídos (n) y del número de veces que se simule la situación aleatoria.

Se invita al lector a realizar otras simulaciones con diferentes valores de n, para que note que este valor no puede ser demasiado grande ni demasiado pequeño. En estadística se dice que valor n debe ser mayor al 5% de N y menor al 95% de N.

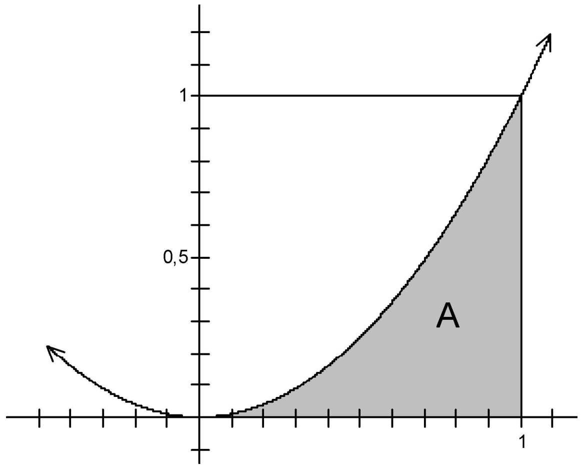
En términos prácticos, volviendo al problema, la cantidad de frijoles extraídos no debe ser mezquina ni exagerada.

Determinar el área aproximada de una figura

Situación #3. Determine aproximadamente el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo [0,1].



Este problema es muy similar a la primera situación. Sea A la región a la cual se le quiere determinar el área y Ω el interior del cuadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,0) y (1,1):



Ahora se necesita recrear una situación aleatoria: se elige un punto Z al azar del interior del cuadrado. Note que la probabilidad de que Z este en A es

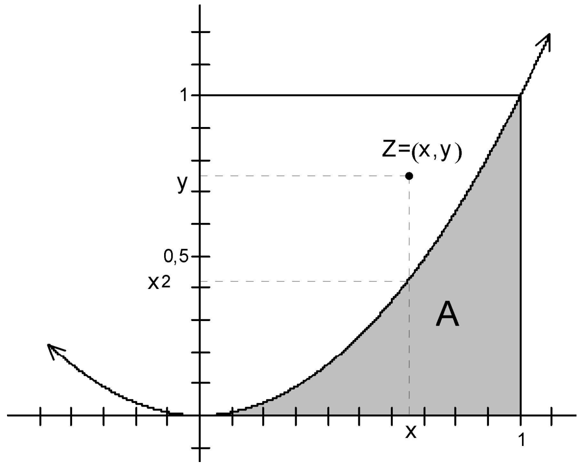
$$P(Z \in A) = \frac{Área(A)}{Área(\Omega)} = Área(A)$$

Así, para determinar el área aproximada de A, basta hallar una aproximación a la probabilidad de que X pertenezca a A. Para ello, utilizando Excel, debemos simular la elección al azar de un punto en el interior del cuadrado. Recuerde que un punto queda determinado de manera única por sus coordenadas.

Se escribe en Excel:

	A	B	C
1	Coordenada X del punto Z	Coordenada Y del punto Z	¿El punto pertenece a A?
2	=Aleatorio()	=Aleatorio()	= SI(B2<A2*A2; “SI”; “NO”)

Note que para saber si el punto está en A se compara la coordenada Y del punto con la imagen de la coordenada X del punto en la función f(x) = x2, por ejemplo:



En este caso $x^2 < y$ por lo tanto $Z \notin A$.

Luego, se arrastran las fórmulas de la fila 2 hasta la fila 1001, obteniendo 1000 simulaciones de la situación azarosa. Si se cuenta el número de simulaciones que tiene “SI” y se divide entre 1000, se obtiene una aproximación a P(A), que es una aproximación de A.

4. Conclusión

De acuerdo con lo desarrollado en este trabajo, nos damos cuenta del enorme poder que tiene la probabilidad, como técnica para resolver algunos problemas como por ejemplo, la aproximación de números irracionales, como estrategia para estimar el número de elementos idénticos en un cierto recipiente y para estimar el área bajo una curva dada.

Hemos visto que los cálculos de probabilidades de eventos son importantes, pero quedarse allí sería desperdiciar la fortaleza que tienen las probabilidades para resolver problemas.

En síntesis, hemos propuesto que, para la introducción del concepto de probabilidad, es recomendable la utilización de situaciones sobre toma decisiones, que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de probabilidad, deben predominar las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades, pero combinándolas con situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilicen la probabilidad como modelo. Por último, para la aplicación de los conocimientos aprendidos, es recomendable el uso principalmente de situaciones, las cuales tengan que ver con la de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

5. Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo. 1986.

Chevallard, Yves. La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique grupo Editor S.A., Argentina, 1991.

Devore, J. Probabilidad y Estádistica para Ingeniería y Ciencias. México: International Thomson Editores, 4a ed.1998.

Ekeland, Ivar. Al Azar. Barcelona: Editorial Gedisa. 1992.

Sanabria, G. Comprendiendo las Probabilidades. Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica. 2012.

Sanabria, G. & Núñez, F. Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universida Estatal a Distancia. Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.

Sanabria, G. & Núñez, F.Introducción a la probabilidad utilizando la simulación en Excel. Memorias del 1er Encuentro Internacional de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (EIEPE), del 12 al 15 de julio de 2011. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Vergnaud, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels", Recherches en Didactique des Mathémathiques Vol. 10 (23): 133-170.

Walpole, R, Myers, R, Myers, S. Probabilidad y estadística para ingenieros. USA: Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A, Sexta Ed. 1999.