Actividades para la enseñanza del concepto elipse utilizando tecnología

Héctor Osorio Abrego

Profesor jubilado, Universidad Autónoma
de Chiriquí, Panamá

hosorioa@cwpanama.net

Resumen: Este taller consta de un conjunto de actividades para la enseñanza del concepto elipse utilizando el programa Geogebra. Le permitirá al participante conocer las características de las actividades, determinar el enfoque metodológico que ellas conllevan y la posibilidad de ser aplicadas en su clase. La metodología que se aplica para el desarrollo del taller está fundamentada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Se trabaja, básicamente, en el segundo nivel de razonamiento y se sigue la orientación de las fases de aprendizaje de dicho modelo. En el taller se estudian las propiedades básicas del concepto elipse utilizando distintos registros de representación semiótica. Se inicia con el uso del registro gráfico, a continuación con el uso del registro lenguaje natural y posteriormente con el uso del registro algebraico.

Palabras clave: orientación dirigida, orientación libre, representaciones semióticas, tratamientos, conversiones.

1. Introducción

El taller consta de 11 actividades didácticas para iniciar el estudio del concepto elipse. A través de ellas se guía al estudiante para que descubra, mediante exploración, experimentación, generalización y formulación de conjeturas propiedades básicas relacionadas con el concepto elipse. Las gráficas que representan el concepto y las configuraciones que contienen permiten al estudiante visualizar situaciones específicas que lo llevan a descubrir las propiedades. Posteriormente, se presenta un grupo de ejercicios y problemas con el objetivo, los primeros, de que el estudiante repase y refuerce los conceptos, relaciones y propiedades presentadas, y los segundos para estimular en el estudiante la reflexión ante situaciones nuevas.

2. Aspectos teóricos

Consideremos lo que señala Aguerrondo (2002, c.p. Asprelli, 2010):

> El aprendizaje no es algo que se tiene o no se tiene, cual posesión acabada. Es un proceso y, además, cada sujeto lo realiza de un modo propio y singular. Así pues, queda rota la fantasía de la homogeneidad y del pensar la clase para el alumno medio o el común de los estudiantes, como si hubiese un modo patrón de aprendizaje (p. 76).

De este pensamiento se concluye que es una necesidad que el docente disponga de diferentes enfoques metodológicos, diferentes estrategias didácticas o diferentes actividades de aprendizaje para el logro de un desarrollo eficaz de sus clases. En el caso particular de la enseñanza del tema de las cónicas se puede encontrar en la literatura sobre matemática educativa un buen número de propuestas didácticas para la enseñanza de dicho tema, encontrándose algunas de ellas en Sánchez (1996), Real (2006) y Bonilla, Parraguez y Solanilla (2014); y de las cuales puede disponer el docente que trata el tema en sus clases. Con la presentación de este taller queremos poner a disposición de los docentes participantes e interesados en la enseñanza del concepto elipse, un conjunto de actividades de aprendizaje que pretendemos constituyan una alternativa más a considerar por parte de ellos al momento de llevar a cabo sus clases.

El taller permitirá al participante conocer las características de las actividades que se proponen, determinar el enfoque metodológico que ellas conllevan y la posibilidad de ser aplicadas en su clase. Algunas de las características de las actividades del taller son:

1. Hacen posible que emerjan las concepciones previas las cuales pueden ser comentadas, recordadas, discutidas o dialogadas al inicio de una sesión de trabajo. Algunas de ellas son: lugar geométrico, distancia entre dos puntos, distancia de un punto a una recta.

2. Fomentan la participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento mediante la experimentación, exploración, observación, el descubrimiento y formulación de conjeturas. Se tiene presente, pues, que “el aprendizaje se realiza a través de la conducta activa del alumno, que aprende mediante lo que él hace y no de lo que hace el profesor” (Tyler, c.p. De Los Ríos, 1992, p. 59).
3. Están estructuradas de manera que facilitan, además de la exposición por parte del docente, el dialogo y la discusión de los alumnos entre si y de estos con el docente.
4. Propician la construcción de dibujos, búsqueda de regularidades y la generalización.
5. Contemplan los tratamientos y las conversiones de las representaciones semióticas de la elipse: gráfica, lenguaje natural, ecuación algebraica.

3. Metodología de trabajo

La metodología que se sigue para el desarrollo del taller está fundamentada en el modelo de razonamiento de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1995; Jaime y Gutiérrez, 1996). Se trabaja, básicamente, en el segundo nivel de razonamiento (identificación y generalización de propiedades como características del concepto, descubrimiento y comprobación de las mismas mediante experimentación); no obstante la primera actividad diseñada para el reconocimiento gráfico del concepto elipse está ubicada en el primer nivel de razonamiento y algunas actividades donde se solicitan argumentaciones para justificar alguna conclusión están ubicadas en el periodo de transición del segundo nivel al tercero.

La implementación del taller sigue la orientación de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. En la primera fase, información, el profesor identifica las concepciones previas que pueden tener los alumnos en el nuevo tema a desarrollar, da a conocer el objetivo que se trata de lograr: estudiar, analizar y comprender el concepto de elipse mediante sus representaciones semióticas y utilizando tecnología; e informa sobre el método y materiales que se utilizarán. Aquí se le señala al estudiante que dispondrán de una guía para desarrollar las actividades programadas y utilizarán el programa Geogebra. En la segunda fase, orientación dirigida, las actividades guiarán al estudiante a descubrir, por sí mismo, propiedades de la elipse: suma constante de las distancias de cualquier punto a sus focos, valor de esa constante, relación entre el semieje mayor, semieje menor y la semidistancia focal, axialmente simétrica, centralmente simétrica, relación entre la longitud del lado recto y las longitudes del semieje mayor y el semieje menor, relación entre la excentricidad de la elipse y su forma, razón constante de la distancia de un punto a un foco a la distancia del punto a una recta, relación entre la excentricidad y esa constante. Aprendidas las propiedades se insta al estudiante para que transite de la representación gráfica de la elipse (representación fundamentalmente usada para el descubrimiento de las propiedades) a representaciones de la elipse en lenguaje natural (definiciones de la elipse como lugar geométrico) y posteriormente representación de la elipse en lenguaje algebraico (ecuaciones). En la tercera fase, explicitación, los estudiantes expresan, verbalmente o por escrito lo que han descubierto anteriormente y se fomenta las discusiones entre los estudiantes y diálogos profesor-alumno. En la cuarta fase, orientación libre, se proponen ejercicios y problemas orientados a consolidar los aspectos aprendidos. Algunos problemas permiten resolver situaciones nuevas con los conocimientos que se adquirieron previamente. En la quinta fase, integración, el docente debe proponer resúmenes de todo lo aprendido, destacando los resultados fundamentales.

Las actividades han sido diseñadas para aplicarlas a estudiantes de nivel secundario y dirigidas a participantes que se desempeñen como docentes en ese nivel educativo, así como también a estudiantes de la licenciatura de matemática o de la licenciatura de matemática educativa o en general a un público interesado en el tema. Para el correcto desarrollo del taller se requiere de un laboratorio de cómputo provisto del programa Geogebra y un proyector digital. Es aconsejable que los participantes tengan conocimientos básicos en el uso del programa Geogebra.

4. Guías de trabajo y/o actividades

En la guía que a continuación se presenta las palabras en mayúscula aluden a herramientas o comandos del programa Geogebra. Al finalizar cada actividad se debe limpiar la pantalla a menos que de forma explícita se señale lo contrario.

CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA ELIPSE

Objetivo: Asimilar de manera visual la forma común particular de las representaciones gráficas de las elipses.

ACTIVIDAD No. 1

1. En la ventana inicial de Geogebra oculta la vista algebraica y los ejes. Utilizando PUNTO construya dos puntos en cualquier parte del plano. Denota a los puntos con las letras F y F’, respectivamente.
2. Utilizando ELIPSE construya la gráfica de una elipse. Para ello, haga CLIC en los puntos F y F’ y seguidamente haga CLIC en algún punto del plano que no se encuentre entre F y F’. Denota con Q el último punto construido. Observa la configuración creada.
3. Utilizando ELIGE Y MUEVE, modifica la posición del punto F, del punto F’ y observa las configuraciones correspondientes. De igual manera, modifica la posición del punto Q y observa las configuraciones correspondientes. (NO BORRE LA PANTALLA)

Nota: Las configuraciones de puntos que has observado son representaciones gráficas del concepto *elipse*. Los puntos F y F’ se llaman focos de la elipse y la distancia entre F y F’ distancia focal. ¿Qué relación existe entre los focos y los puntos de la elipse? A continuación usted investigará y determinará esta relación.

LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO

ACTIVIDAD No. 2

1. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto en la elipse, denótalo P. Utilizando SEGMENTO construya el segmento que tiene por extremos los punto F y P y el segmento que tiene por extremos los puntos F’ y P.

2. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida la distancia de P a F y la distancia de P a F'. Observa a que es igual la suma de las distancia PF y PF'. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si mueves el punto P a lo largo de la elipse. ¿Se mantiene constante la suma anterior para los distintos puntos de la elipse? ________________________.
3. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si modificas la posición de los puntos F, F' y Q. ¿Se mantiene constante la suma de las distancias PF y PF' para cada elipse así construida? ________________________.
4. Utilizando PUNTO construya un punto M que no se encuentre en la elipse. Construya los segmentos MF y MF'. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida las distancias de M a los focos F y F'. Observa a que es igual la suma de las distancias MF y MF'. ¿Es igual la suma de las distancias MF y MF' a la suma de las distancias PF y PF'? ____________. Mueva el punto M a distintas posiciones del plano y observa si la suma de las distancias MF y MF' es igual a la suma de las distancias PF y PF' para las nuevas posiciones de M. Anota tus observaciones ____
5. Con base a las experiencias anteriores formula una conjetura y con fundamento en ella (asumiendo que es verdadera) elabora una definición de elipse como lugar geométrico:

____
____
____

CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA ELIPSE. PROPIEDADES.

ACTIVIDAD No. 3

1. Tal como se indicó en la ACTIVIDAD No. 1, construya una elipse. Utilizando RECTA construya la recta FF' que pasa por los focos, denótala con m. Construya el segmento FF'. Utilizando MEDIO O CENTRO construya el punto medio del

segmento FF’, denótalo con O. Utilizando INTERSECCIÓN construya las intersecciones de la elipse con la recta m, denótalas con V y V’, respectivamente.

2. Utilizando SEGMENTO construya el segmento VV’. Utilizando MEDIO O CENTRO construya el punto medio del segmento VV’, denótalo con O’. ¿Qué observas? ¿Coincide el punto medio del segmento VV’ con el punto medio de FF’? _______________. Utilizando PERPENDICULAR construya la perpendicular a la recta FF’ y que pasa por O, denótala con la letra n. Construya las intersecciones de la recta n con la elipse, denótalas con los símbolos B y B’. Construya el segmento BB’. Utilizando MOSTRAR/OCULTAR OBJETO oculta las rectas m y n.

Nota: La recta m que pasa por los focos, se denomina eje focal o eje principal de la elipse. La recta n, perpendicular al eje focal que pasa por O, se denomina eje secundario de la elipse. El punto medio O del segmento FF’ se denomina centro de la elipse. Los puntos V y V’, intersección del eje focal y la elipse y los puntos B y B’, intersección de la recta n con la elipse, se denominan vértices de la elipse.

El segmento VV’ se denomina eje mayor de la elipse. El segmento BB’ se denomina eje menor de la elipse. Los segmentos OV y OV’ se denominan semiejes mayores de la elipse y los segmentos OB y OB’ semiejes menores de la elipse.

3. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto en la elipse. Denótalo con P. Utilizando SEGMENTO construya los segmentos PF y PF’. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD determina las longitudes de los segmentos PF, PF’ y VV’. ¿Qué relación hay entre la suma de las distancias de P a los focos F y F’ y la distancia de V a V’, longitud del eje mayor? ___________________. Explora moviendo el punto P a otras posiciones de la elipse. ¿Se conserva la relación? ___________. Modifica las posiciones de los focos F y F’, del punto Q de la elipse y observa para cada nueva elipse si se conserva la relación. De acuerdo a las experiencias anteriores, formula una conjetura: _____________________________

____

Argumenta la validez de tu conjetura: ______________________________________

____

____

4. Borra el punto P y el texto donde se indica la distancia entre los vértices V y V'. Construya los segmentos BF y OV. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD determina las longitudes de los segmentos BF y OV (longitud del semieje mayor). ¿Qué relación existe entre las longitudes de estos segmentos? _________________. Explora modificando las posiciones de los focos F, F', y del punto Q de la elipse. ¿Para cada nueva elipse se conserva la relación? _____________. ¿Puedes dar una argumentación que justifique tu respuesta? _________________________________

   ____

   ____

5. Si denotamos con a, b, y c las longitudes del semieje mayor OV, del semieje menor OB y del segmento que tiene por extremos el centro O de la elipse y un foco F, distancia semifocal, respectivamente, determina una relación entre a, b y c y da una justificación de la misma. ____

   ____

ACTIVIDAD No. 4 (Simetrías)

1. Tal como se indicó en la ACTIVIDAD No. 1, construya una elipse. Construya el eje focal de la elipse. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto en la elipse. Denótalo con la letra P. Utilizando PERPENDICULAR construya una recta perpendicular al eje focal que pase por el punto P. Utilizando INTERSECCIÓN construya los puntos de intersección de la recta perpendicular al eje focal, con el eje focal y con la elipse. Denótalos con las letras G y P', respectivamente. Utilizando ÁNGULO, verifica que la recta PP' es perpendicular al eje focal, para ello haga CLIC sucesivamente en los puntos P, G y F. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida

las distancias de P a G y de P' a G. ¿Qué observas?, ¿Las distancias PG y P'G son iguales? _______

Nota: En estas circunstancias, en que P y P' se encuentran en una misma recta perpendicular a la recta que representa al eje focal y cuyas distancias a dicha recta son iguales, se dice que P' es un punto simétrico de P con respecto a la recta y viceversa, que P es simétrico de P' respecto a la recta.

2. Utilizando ELIGE Y MUEVE, mueve el punto P a lo largo de la elipse. ¿Qué observas? ¿Para cada nuevo punto P, las rectas PP' son perpendiculares al eje focal? __________. ¿Las nuevas distancia PG y P'G son iguales?, ________. ¿Todo punto de la elipse tiene un punto simétrico con respecto al eje focal que se encuentra en la misma elipse? __________________________.
3. Repite las experiencias del numeral 2 moviendo los focos F y F' a otras posiciones del eje focal, así como el punto Q a otras posiciones del plano. Para todas las nuevas elipses, ¿tus respuestas a las interrogantes del numeral 2 siguen siendo las mismas? ___________________________

Nota: Dada una figura, si cualquier punto de la figura tiene su simétrico, con respecto a una recta, en la misma figura, se dice de esa figura que tiene simetría axial o que es axialmente simétrica y que la recta es su eje de simetría.

4. **De** las experiencias realizadas en los numerales 2 y 3, y de lo expuesto en la nota anterior, ¿a qué conclusión llegas? ____.

Nota: De manera similar a como has procedido en los numerales anteriores puedes realizar acciones para verificar que la elipse es axialmente simétrica con respecto a la recta que contiene el eje menor.

La simetría central (de centro O) es una transformación del plano mediante la cual cada punto A del plano se transforma en un punto A'; tal que el punto O es el punto medio del segmento

AA'. Se dice entonces que los puntos A y A' son simétricos con respecto al punto O, el cual se denomina centro de simetría.

Existen figuras geométricas que coinciden con su imagen simétrica con respecto a un punto. Es decir que cualquier punto de la figura tiene su simétrico con respecto a un punto, en la misma figura. Se dice de estas figuras, que tienen simetría central o que son centralmente simétricas y que el punto es su centro de simetría.

De manera análoga como has procedido en ésta ACTIVIDAD No. 4 puedes realizar acciones para verificar que la elipse es centralmente simétrica y que su centro es su centro de simetría.

ACTIVIDAD No. 5 (Lado recto)

1. Tal como se indicó en la ACTIVIDAD No.1 construya una elipse. Utilizando RECTA construya el eje focal, denótalo con la letra m. Utilizando MEDIO O CENTRO construya el punto medio del segmento FF’, denótalo con la letra O. Utilizando INTERSECCIÖN construya las intersecciones del eje focal con la elipse (vértices de la elipse). Denota estos puntos de intersección (vértices de la elipse) con V y V’. Construya el segmento VV’ (eje mayor).
2. Utilizando PERPENDICULAR construya la perpendicular al eje focal y que pasa por O, denótala con la letra n. Construya las intersecciones de la recta n con la elipse, denótalas con los símbolos B y B’. Construya el segmento BB’ (eje menor de la elipse). Utilizando MOSTRAR/OCULTAR OBJETO oculta las rectas m y n.
3. Utilizando PERPENDICULAR construya una perpendicular al eje focal y que pase por el foco F. Utilizando INTERSECCIÓN construya las intersecciones de la recta perpendicular con la elipse, denótalos con M y M’. Utilizando SEGMENTO construya el segmento MM’.

Nota: El segmento determinado por dos puntos distintos de una elipse se denomina cuerda. Una cuerda que pase por un foco de la elipse se denomina cuerda focal. Una cuerda focal que es perpendicular al eje focal de la elipse se denomina “lado recto”.

4. Utilizando POLÍGONO REGULAR construya un cuadrado de lado OB. Para ello, haga CLIC en O, luego en B y seleccione en la ventana que aparece el número 4. Utilizando PARALELA construya una recta paralela al eje focal que pase por M’, denótala con “r”. Construya la intersección de la recta r con el semieje menor, denótalo con I. Utilizando PERPENDICULAR construya una perpendicular al eje focal que pase por V, denótalo con “s”. Construya la intersección de las rectas r y s, denótalo con G. Utilizando POLÍGONO construya el rectángulo OIGV. Utilizando ÁREA determina las áreas del cuadrado y del rectángulo. ¿Qué relación existe entre estas áreas?_________________. Explora e investiga para otras elipses, moviendo los focos F, F’ y el punto Q. ¿Para cada elipse nueva la relación anterior se mantiene?_________.
5. Si denominas con “b” la longitud del lado OB del cuadrado (b longitud del semieje menor de la elipse), con “a” la longitud del lado OV del rectángulo (a longitud del semieje mayor de la elipse) y con “h” la longitud del lado VG del rectángulo (h longitud de la mitad del lado recto), expresa mediante un simbolismo algebraico la relación que determinaste en el numeral 4, ___________________. A partir de esta relación expresa h (longitud de la mitad del lado recto) en función de a y b, semiejes mayor y menor, respectivamente, de la elipse, ________________. Y de aquí expresa L (longitud del lado recto) en función de a y b, _______________.

ACTIVIDAD No. 6 (Excentricidad)

1. En una pantalla limpia activa la Vista Algebraica si no está activada. En la Vista Gráfica desactiva los ejes si están activados. Construya una elipse, denota sus focos con F y F’ y el otro punto utilizado en la construcción denótalo con Q. Construya el eje focal. Construya el centro de la elipse, denótalo con O. Construya los vértices V y V’ de la elipse, extremos del eje mayor. Construya el segmento OF, denótalo con c. Construya el segmento OV (semieje mayor), denótalo con a.
2. En la ventana de ENTRADA escribe la expresión para calcular la razón c/a denotándola con la letra e, es decir, escribe e = c/a y teclea ENTRAR. En el acápite **Número** de la Vista Algebraica puedes observar el valor de e.

Nota: La razón e = c/a (razón de la longitud del segmento OF, semidistancia focal, a la longitud del segmento OV, semieje mayor de la elipse) se denomina excentricidad de la elipse.

3. Explora y observa la forma de las elipses al variar la excentricidad. Para ello, mueva los focos F y F' o el punto Q. ¿Qué observas cuando los focos se aproximan uno al otro?, ¿Cómo varían las formas de las elipses?________________________________

   ¿Cómo varían los valores de las excentricidades de las elipses? __________________

   ¿Qué figura se forma cuando los focos coinciden? _____________________________

   ¿Cuál es el valor de la excentricidad cuando los focos coinciden? ________________

   ¿Qué observas cuando los focos se aproximan a los vértices?, ¿Cómo varían las formas de las elipses? ____

   ¿Cómo varían los valores de las excentricidades de las elipses? __________________

   ¿Qué figura se forma cuando los focos y vértices coinciden? ____________________

   ¿Cuál es el valor de la excentricidad cuando los focos y vértices coinciden? _______

4. Utilizando ENTRADA calcula la razón r = a/e. Utilizando CIRCUNFERENCIA (CENTRO, RADIO) construya una circunferencia con centro en O y radio igual a r. Construya las intersecciones de la circunferencia con el eje focal, denótalas con D y D'. Construya dos rectas perpendiculares al eje focal, una que pase por D y otra que pase por D', denótalas con d y d', respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran las rectas d y d' del centro de la elipse? ____________________________.

5. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto P sobre la elipse. Construya una perpendicular a d y d' que pase por P. Construya las intersecciones de la perpendicular con d y d', denótalas con T y T', respectivamente. Oculta la circunferencia y la perpendicular a d y d'. Construya los segmentos PF y PT, denótalos con m y n, respectivamente.
6. Utilizando ENTRADA calcula la razón t=m/n. Observa la Vista Algebraica, ¿qué relación hay entre t (la razón de la distancia del punto P al foco F, a la distancia del punto P a la recta d) y e, la excentricidad de la elipse. _____________________. Explora moviendo el punto P a otras posiciones en la elipse. ¿Se mantiene la relación anterior? _________. Explora moviendo los puntos F, F' y Q a otras posiciones en el plano. ¿Para cada nueva elipse así formada se mantiene la relación anterior? __________________.
7. Construya los segmentos PF' y PT', denótalos con m' y n', respectivamente. Coloréalos con colores iguales. Calcula la razón q = m'/n', donde m' es la distancia de P al foco F' y n' es la distancia de P a la directriz d'. ¿Qué relación hay entre q y e, excentricidad de la elipse, _________________. Explora moviendo el punto P a otras posiciones de la elipse. ¿Se mantiene la relación anterior? ________.

   Explora moviendo los puntos F, F' y Q a otras posiciones del plano. ¿Para cada nueva elipse así formada se mantiene la relación anterior? ________________.

8. Con base a las experiencias obtenidas en esta actividad, formula una definición alterna de la elipse como lugar geométrico. ________________________________

   ____

   ____

   ____

Nota: Las rectas d y d' se denominan directrices de la elipse.

CAMBIO DE REGISTRO DE REPRESENTACIÓN PARA EL CONCEPTO ELIPSE

Hasta aquí hemos utilizado dos registros de representación del concepto elipse. Iniciamos con las representaciones gráficas y a partir de las gráficas de elipses estudiamos dos condiciones que satisfacen los puntos de una elipse permitiendo esto representar el concepto de elipse como una expresión escrita en lenguaje natural de dos formas diferentes (expresiones utilizadas para definir el concepto de elipse). Ahora, aprovecharemos la potencia de cálculo simbólico que posee Geogebra para cambiar a otro registro de representación. Para ello, trabajaremos en una pantalla con las vistas gráfica y algebraica activadas. Estudiaremos algunas características de la nueva representación para elipses con centro en el origen de coordenadas, eje focal en el eje “x” y focos localizados en el eje “x”. Posteriormente, se generalizará esta situación.

ACTIVIDAD No. 7

1. Teniendo presente la definición de elipse como lugar geométrico obtenida en la Actividad No. 2 prueba que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es la ecuación de una elipse con centro en el origen del sistema de coordenadas, eje focal coincidiendo con el eje “x”, focos F(c, 0) y F’(-c, 0), semieje mayor igual a “a” y semieje menor igual a “b”.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

2. Verifica que en efecto la ecuación señalada es una representación de la elipse con las características mencionadas. Para ello, construya la intersección de los ejes “x” y “y”,

denótalo con O. Utilizando PUNTO SOBRE OBJETO construya un punto F sobre el eje x. Utilizando SIMETRÍA CENTRAL construya el punto simétrico de F con respecto al centro de la elipse O, denótalo con F'. Construya una elipse con focos F y F', y denota el punto utilizado en la construcción con Q. Construya las intersecciones de la elipse con los ejes "x" y "y" (eje principal y eje secundario de la elipse), denota con V y V' las intersecciones con el eje principal y con B y B' las intersecciones con el eje secundario. Construya el segmento OV (semieje mayor), denótalo con a, y el segmento OB (semieje menor), denótalo con b. Utilizando ENTRADA calcula el cuadrado de a, para ello, escribe a'= a^2 y calcula también el cuadrado de b escribiendo b'= b^2.

3. En el numeral 2 has construido una elipse con las características dadas en el numeral 1. En la sección **Cónica** de la Vista Algebraica observa la ecuación de la elipse construida anteriormente y determinada por Geogebra (si la ecuación no tiene la forma normal o canónica a Clic con la tecla derecha del ratón sobre la ecuación y en la ventana que se despliega selecciona la forma canónica). ¿Los valores de los parámetros a^2 y b^2 de la ecuación son iguales a los valores a' y b', cuadrados de los semiejes mayor y menor, respectivamente? ___________

   Explora y observa. Mueve el foco F o el punto Q, ¿para cada elipse así obtenida los valores de los parámetros a^2 y b^2 de la ecuación son iguales a los valores a' y b', respectivamente? ____________.
4. Verifica que se satisface la relación $a^2 = b^2 + c^2$, donde c es la semidistancia focal.
5. Recordando a que distancia se encuentran las directrices de una elipse de su centro (Numeral 4 de la Actividad 6, construya las directrices de la elipse. ¿Cuáles son sus ecuaciones? _______________________. Verifica tus respuestas con las dadas por Geogebra en la Vista Algebraica. Escriba las ecuaciones de las directrices para cualquier elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, siendo $a > b$. _________________, _____________

Nota: De manera análoga a la Actividad No.7 se pueden realizar actividades para determinar las representaciones por medio de ecuaciones de elipses con centro en el origen del sistema de coordenadas, eje focal coincidiendo con el eje "y", focos F(0, c) y F'(0,-c), semieje mayor igual a “a” y semieje menor igual a “b”, [$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$]. Así mismo, se puede generalizar aún más la situación para encontrar las representaciones de las elipses por medio de ecuaciones para los casos en que el centro se encuentre en cualquier punto (h, k) del plano y cuyo eje focal ya sea paralelo al eje “x” o al eje “y”, [$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, siendo\ a > b$].

CONSTRUCCIÓN DE ELIPSES A PARTIR DE LA ECUACIÓN

$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.}$ **Verificación de sus características.**

ACTIVIDAD No. 8

A continuación realizarás algunas acciones en las que unas veces a > b y otras en que b > a. Observa la ubicación de las elipses y su relación con los valores de los denominadores de los términos a la izquierda de la igualdad de las ecuaciones que las representan.

1. Utilizando DESLIZADOR construya un deslizador de nombre “a” con valor mínimo de 0 y valor máximo de 10. Asígnale el valor de 4.
2. Utilizando DESLIZADOR construya un deslizador de nombre “b” con valor mínimo de 0 y valor máximo de 10. Asígnale el valor de 2.
3. Utilizando DESLIZADOR construya un deslizador de nombre “h” con valor mínimo de -10 y valor máximo de 10. Déjale el valor de 1.
4. Utilizando DESLIZADOR construya un deslizador de nombre “k” con valor mínimo de -10 y valor máximo de 10. Déjale el valor de 1.
5. Activa CUADRÏCULA. Escriba en la ventana de ENTRADA la ecuación

$$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

   y da ENTER. ¿Qué observas? __________________________. En ENTRADA teclea C = (h, k) y da ENTER. ¿Qué observas? _____________________. Observa en la Vista Algebraica la ecuación de la elipse, si no tiene la forma normal generalizada haz CLIC con el botón derecho del ratón y selecciónala. Podrás verificar, analizando la ecuación o con ayuda de la cuadrícula, que la ecuación de la elipse representa una elipse con centro en (h, k); (1, 1) en esta situación, semieje mayor a=4 y semieje menor b=2.

6. En ENTRADA teclea V = (h + a, k) y da ENTER, ¿qué observas? _____________. ¿Es V un vértice de la elipse? _________. Argumenta tu respuesta ______________ ____

   Utilizando SIMETRÍA CENTRAL construya el simétrico de V con respecto al punto C, denótalo con V'.

7. En ENTRADA teclea B = (h, k + b) y da ENTER, ¿qué observas?______________. ¿Es B un vértice de la elipse? ____________. Argumenta tu respuesta___________ ____

   Utilizando SIMETRÍA CENTRAL construya el simétrico de B con respecto al punto C, denótalo con B'.

8. Construya el segmento CV, semieje mayor; denótalo con a' y coloréalo. Construya el segmento CB, semieje menor; denótalo con b' y coloréalo con un color diferente. Podrás verificar, observando la Vista Algebraica, que los valores de a' y b' coinciden con los valores de los deslizadores a y b, respectivamente.
9. Utilizando ELIJE Y MUEVE y apoyándote en la cuadrícula coloca el centro C de la elipse en el punto de coordenadas (-3, -2). Observando la Vista Algebraica contesta las siguientes preguntas. ¿Cuáles son las coordenadas del punto C, centro de la elipse?, ____________. ¿Cuáles son los valores de h y k en la Vista Algebraica? _________ ¿Cuáles son los valores de h y k en los deslizadores en la Vista Gráfica? _________ ¿Han variado los valores de a (semieje mayor) y de b (semieje menor)? __________ En la ecuación, ¿qué ha variado? ____________________________. En forma análoga como has trabajado aquí, experimenta colocando el centro de la elipse en cualquier punto del plano y contesta las preguntas anteriores.

10. Experimenta cambiando los valores de h y k, coordenadas del centro de la elipse, en los deslizadores. Observa que ocurre en la representación gráfica y en la representación algebraica de la elipse.
11. Experimenta cambiando los valores de "a" y de "b", longitudes de los semiejes de la elipse, en los deslizadores. Observa que ocurre en la representación gráfica y en la representación algebraica de la elipse cuando a > b y cuando b > a.

    (NO BORRE LA PANTALLA)

ACTIVIDAD No. 9

1. Asigna a los deslizadores los valores iniciales, es decir, a = 4, b = 2, h = 1 y k = 1. Construya uno de los focos de la elipse. Para ello, calcula la semidistancia focal c= $\sqrt{a^2 - b^2}$ y teclea en ENTRADA, F = (h + c, k). Argumenta ¿por qué h + c, y k son las coordenadas del foco?____ ____.
2. Utilizando SIMETRÍA CENTRAL construya el otro foco F' de la elipse. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas de F'? _______________ Construya el segmento CF, denótalo con c'. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto P sobre la elipse. Construya los segmentos PF' y PF y denótalos con m y n, respectivamente.
3. Calcula la suma de m y n y denótala s. Para ello, teclea en ENTRADA s = m + n. Activa animación para el punto P. ¿Es constante la suma s = m + n para todos los puntos de la elipse? _____ ¿Qué relación existe entre la suma de las distancias de P a los focos (suma s = m + n) y la longitud, 2a, del eje mayor de la elipse, para todos los puntos P de la elipse?___________ ____________________. Desactiva la animación del punto P.
4. Experimenta y explora cambiando los valores de a, b (a > b), h y k. Para las diferentes elipses así formadas ¿se satisface la relación anterior? ________________.

(NO BORRE LA PANTALLA)

ACTIVIDAD No. 10

1. Ajusta los valores de los parámetros, si no lo están, a sus valores iniciales a = 4, b = 2, h = 1 y k = 1, así como la ubicación de los focos. Calcula la excentricidad e = c''/a de la elipse y la razón r = a/e. Construya las rectas directrices de la elipse. Para ello, teclea en ENTRADA sus ecuaciones: x - (h + r) = 0, x – (h – r) = 0. Denótalas con d y d', respectivamente.
2. Construya una recta paralela al eje x y que pase por P, punto de la elipse, denótala con g. Construya la intersección de g con d, denótala con Q. Construya la intersección de g con d', denótala con Q'. Construya el segmento PQ, denótalo con u. Construya el segmento PQ', denótalo con v.
3. Calcula la razón t = n/u, razón de la distancia de P al foco F, a la distancia de P a la directriz d. Calcula la razón q = m/v, razón de la distancia de P al foco F' a la distancia de P a la directriz d'. Observa la Vista Algebraica, ¿qué relación hay entre las razones t, q y la excentricidad e? ________________ . Mueve P a distintos puntos de la elipse. Que observas, ¿cambian los valores de las razones t, q y de la excentricidad? ________. Explora variando los valores de a, b (a > b), h y k. ¿Para cada una de las nuevas elipses así formada la razón de la distancia de cualquier punto P a uno de sus focos, a la distancia de P a la directriz correspondiente es constante? _____________. A qué es igual esa constante? _________.

ACTIVIDAD No. 11

1. En la Actividad No. 9 se consideraron elipses con ejes mayores paralelos al eje x, es decir, a>b. Procediendo en forma similar puedes verificar que la relación m + n = longitud del eje mayor, también se cumple para elipses con ejes mayores paralelos al eje y (b > a). En este caso, ¿cuál es la expresión que determina la semidistancia focal c? _____________________, ¿cuáles son las coordenadas del foco F en términos de h, k y c? _________________________.

2. En la Actividad No. 10 se consideraron elipses con ejes mayores paralelos al eje x, es decir, a>b. Procediendo en forma similar puedes verificar que la razón de la distancia de cualquier punto P de la elipse a un foco, a la distancia de P a la directriz correspondiente, es constante e igual a la excentricidad para elipses con ejes mayores paralelos al eje y (b > a). En este caso, ¿cuál es la expresión que determina la excentricidad e? __________, ¿cuál es la expresión que determina la razón de la longitud del semieje mayor a la excentricidad? ____________, ¿cuáles son las ecuaciones de las directrices de las elipses? $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \; siendo \; a > b$?. ____________________________, ________________________________.

ACTIVIDADES (ORIENTACIÓN LIBRE)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina la ecuación de la elipse de centro en el origen, foco en (0,3) y semieje mayor igual a 5. Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.
2. Halla la ecuación de la elipse de centro (1,2), uno de los focos (6,2 y que pase por el punto (4,6). Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.
3. El lado recto de una elipse es la longitud de la cuerda perpendicular que pasa por los focos y está dado por $L = 2b^2/a$, donde L es el lado recto, a y b las longitudes de los semiejes mayor y menor, respectivamente. Encuentra la ecuación de la elipse de centro en el origen, lado recto igual a 5 y uno de los vértices en el eje mayor es el punto (10,0). Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.
4. Determina la ecuación de la elipse de centro (-1,-1), uno de los vértices en el eje mayor es el punto (-1,5) y excentricidad 2/3. Luego encuentra su otro vértice, sus focos y la longitud del lado recto. Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.
5. Determina el centro, los focos, los vértices en el eje mayor, la excentricidad, la longitud de los semiejes mayor y menor, y las ecuaciones de las rectas determinadas por los ejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación está dada por $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$. Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.

6. En una elipse, los radios focales (radios vectores) son los segmentos que unen los focos con un punto cualquiera de ella. Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por los radios focales correspondientes al punto (2,3) de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$. Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.
7. Encuentra la ecuación de la elipse con foco (4,-3), directriz $x = -1$ y excentricidad 2/3. Utilizando Geogebra verifica tu respuesta.

Nota: La propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto "elipse" asociada a este taller, se inicia a partir de una representación gráfica del concepto. A partir de ella se descubren propiedades que permiten expresar el concepto mediante una representación en lenguaje natural o en lenguaje algebraico (ecuaciones). En la literatura sobre Matemática Educativa se han presentado diversas propuestas de estrategias didácticas o actividades para la enseñanza y aprendizaje de las cónicas. Una de ellas está basada en el enfoque de resolución de problemas en la que el estudio del concepto "cónica" se inicia a partir de una situación problema que plantea la determinación del conjunto de puntos (lugar geométrico) que satisfacen una condición la cual caracteriza al concepto. En otras palabras, en este enfoque, se da una propiedad del concepto y se pide encontrar su representación gráfica; luego se estudian otras propiedades y se transita a nuevas representaciones semióticas. Resuelva los siguientes cuatro problemas utilizando Geogebra, en la ventana inicial oculta los ejes cartesianos. (No utilice la herramienta o comando ELIPSE).

8. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante. Justifica tu respuesta.
9. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales la razón de su distancia a un punto fijo del plano, a su distancia a una recta fija del plano es un número mayor que cero y menor que uno. Justifica tu respuesta.
10. Sea A un punto interior a una circunferencia c. Determina el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto A que son tangentes a la circunferencia c. Justifica tu respuesta.

11. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que dividen las distancias de los puntos de una circunferencia a un diámetro fijo en una razón constante. Justifica tu respuesta.
12. Considera un segmento AB de 12 unidades de longitud y un punto P(x, y) situado sobre él a 8 unidades de A. Halla el lugar geométrico de P cuando el segmento se desplace de forma que los puntos A y B se apoyen constantemente sobre los ejes coordenados **y** y **x** respectivamente. ¿Qué lugar geométrico representa tu resultado? Justifica tu respuesta.
13. Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias las cuales son tangentes a las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$. ¿Qué lugar geométrico representa tu resultado? Justifica tu respuesta.

5. Conclusiones y/o recomendaciones

Existen muchas maneras de integrar la tecnología a los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática tal como se puede apreciar en diferentes propuestas que se han dado a conocer en congresos, revistas de matemática educativa, sitios web donde se presentan softwares matemáticos y las bondades de los mismos, sitios web como Google, entre otros. Además, cada vez aparecen nuevos programas matemáticos de computación los cuales posibilitan nuevas maneras de usar la tecnología en la educación matemática.

Al docente le compete diseñar las actividades de enseñanza aprendizaje que va a emplear dentro del contexto metodológico didáctico que aplique. Recomendamos que al momento de incorporar la tecnología en el diseño de las actividades se tenga presente las siguientes consideraciones:

1. Las actividades deben fundamentarse en una o más teorías sobre los procesos de la enseñanza aprendizaje.
2. Las actividades deben propiciar el empleo de estrategias cognitivas generales como: la construcción de dibujos, gráficas y modelos; búsqueda de regularidades, patrones o analogías; generalización, estimación, variación de condiciones, entre otras.

3. Las actividades deben incorporar principios didácticos generales como : a) la participación activa del estudiante para que él construya o reconstruya el conocimiento a través de la observación, exploración, experimentación, formulación de conjeturas y verificación de propiedades matemáticas; b) favorecer, además de la exposición por parte del docente (verbal o escrita), el diálogo y la discusión de los alumnos entre si y de éstos con el docente; c) la resolución de problemas, d) la realización de investigaciones, e) la inclusión de prácticas sobre procedimientos rutinarios y manipulación con modelos, entre otros.

   Las actividades que conforman el taller "Actividades para la enseñanza del concepto elipse utilizando tecnología" han sido diseñadas teniendo presente las anteriores observaciones.

6. Referencias bibliográficas

Asprelli, M.C., (2010). *La Didáctica en la formación docente*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2014). Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. En P. Lestón (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 779-786. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Los Ríos, E. de (1992). La problemática del aprendizaje de la matemática con un enfoque psicológico. En A. Ardila (Presidente), *Memorias del Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa.* (pp. 58-63). Panamá: Universidad de Panamá.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *SUMA, revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas 46*, 71-77.

Sánchez, J. (1996). *Lugares Geométricos. Cónicas*. Madrid, España: Editorial Síntesis.