LA MATEMÁTICA ENTRE SU FORMALISMO IMPLÍCITO Y EL DISCURSO EMPÍRICO EN SU ENSEÑANZA

Jorge Mario Gianfelice – Ricardo Omar Mozzi
jorgegianfelice@gmail.com – richi47.ar@gmail.com
P.I.D: Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Delta, Campana) Buenos Aires. Argentina
P.I.D: Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Delta, Campana) Buenos Aires. Argentina

Tema: I.7: Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario
Palabras clave: “Formalismo”, “Empirismo”, “Lenguaje”, “filosofía pedagógica”

Resumen:
La matemática es una ciencia formal, más allá de sus aplicaciones. Ahora bien, ¿cómo y por medio de qué mecanismos se puede enseñar un sistema formal? Utilizar materiales concretos o estrategias que reducen la matemática a lo perceptible empírico, puede desvirtuar la naturaleza misma de sus objetos. Muchas veces, la utilización de análogos – de eficaz potencial didáctico– suele cambiar el objeto en sí mismo por una construcción sustitutiva, por ende, metafórica. ¿Qué camino seguir? ¿Qué procedimientos deben priorizar los docentes para llevar a cabo sus prácticas de enseñanza? Si se enseña matemática con la lógica interna de la disciplina, se crean problemas didácticos prácticamente insolubles. Si se enseña por análogos empíricos y aplicaciones se traiciona la disciplina. Si ello sucede, ¿sigue siendo matemática lo que se enseña? De no ser así, ¿qué se enseña?
Proponemos, así, un ensayo teórico que intenta mostrar, analizando la moda bibliográfica y el uso de elementos empíricos, los distintos caminos didácticos actuales que se divulgan en pro de la “buena enseñanza” de la matemática. Caminos, que a nuestro juicio, de ser seguidos acríticamente no solo tornan confuso el objeto formal, sino que hasta pueden llegar a destruirlo.

Introducción

Para analizar el discurso de la didáctica de la matemática, se pueden identificar algunos aspectos metodológicos ligados a diferentes teorías de actualidad. Los recursos para llevar a cabo este proceso de enseñanza - que pretenden ser de suma efectividad -, muchas veces llegan a los docentes por medio de manuales o libros de texto. De esta forma la denominada *“bibliografía moderna”* con gran cantidad de *“imágenes potentes”*, intenta hacer de la disciplina en cuestión una ciencia, que en el mejor de los casos, se convierte en un resumen – *guía telefónica* – de hechos empíricos sin conexión alguna. Esto no significa que el proceso didáctico sea inadecuado, pero si pretendemos enseñar matemática, debemos tener en cuenta, en primer lugar, que como ciencia formal ésta está regida por el método axiomático. De aquí se desprende que pensar en la matemática como una reunión de casos particulares que se verifican empíricamente (estableciendo patrones que siguen los procesos de las ciencias fácticas tales como medir e inferir inductivamente a partir de datos reales) es querer cambiar el sistema que conlleva en sí el saber matemático, a una especie de conocimientos deformados, que estructuran una enseñanza legitimada por tendencias que dicen ser constructivistas o significativas.

Enseñar matemática entre modas y mitos.

Para exponer apropiadamente el problema, analizaremos esta discusión en un caso particular, como es el viejo y conocido teorema de Pitágoras. Abordaremos el análisis a partir de algunas secuencias didácticas que se presentan en el libro de M.L. Latorre, L. Spivak, P. Kaczor, M. C. L.de Elizondo, *Matemática 8* Ed. Santillana, propuesto como texto para alumnos de octavo año de la enseñanza básica en la provincia de Buenos Aires, que de aquí en adelante denominaremos *"el librito"*. (Ver anexo 1)

Esta forma de presentar el tema manifiesta un total desacuerdo con lo que realmente hace la ciencia matemática, es decir, se propone un proceso caracterizado por la inducción, medición y realidad de los objetos, para luego arribar a la formulación del teorema. Si observamos, podemos categorizar tres tipos de lagunas que la doctrina didáctica expresa en *"el librito".*

La primera está relacionada con el proceso de la inducción: se presenta un teorema como la culminación de un determinado proceso de situaciones individuales – superponer las áreas en un caso particular – se realiza un salto al vacío y aparece en el último párrafo el enunciado propiamente dicho. Luego, se puede destacar que surge sin aclaración alguna un injerto espontáneo formulístico, que deja perplejo al lector, ya que no se explica qué tipo de realidad representan los símbolos expresos (puede observarse en el margen derecho del enunciado la fórmula $A^2 = B^2 + C^2$.

De aquí se desprenden algunas cuestiones tales como las siguientes: ¿qué representa esta fórmula?; ¿ acaso se trata de otra de las tantas caricaturas que *el librito* muestra, o es una revelación proposicional de trascendental importancia como punto culmine del enunciado?; ¿por qué no hay referente de los signos en alguna de las tantas

representaciones gráficas?; ¿se deberá esto último a la auto evidencia de los mismos, a los saberes previos de los alumnos que los tornan obvios, o a la secuencia didáctica seguida por el texto, que hace innecesaria toda aclaración?
Como vemos, hay muchas preguntas que parecen no tener respuesta, hecho que nos produce cierto asombro ante un proceso como es el *inductivo*, que aparece tras las bambalinas de una ciencia *deductiva*.

La segunda laguna que se puede ver en *"el librito"*, está íntimamente vinculada con la forma en que muestran los objetos matemáticos, como sí la geometría fuese una recopilación de interpretaciones particulares con referentes en la realidad. De esta manera, se deja entrever que los objetos son entes totalmente extraídos del mundo real. Así, la delimitación de un teorema como sistema formal, pone de manifiesto una proyección didáctica que, en este caso, no puede hacerse cargo de lo que la disciplina realmente persigue para arribar a un enunciado. Hay que aceptar que los objetos matemáticos no tienen existencia real, en cambio los *"saberes derivados"* de ellos, tales como mediciones, técnicas de conteo, operaciones, etc., sí tienen ese realismo existencial. De esta forma, la matemática en tanto ciencia se estructura sobre objetos vacíos, sin interpretar, y los especialistas en educación tratan como "*problemas didácticos"* a los que hemos llamados "*saberes derivados,"* para, finalmente, asegurar que en esto consiste la enseñanza de la matemática: en invertir la lógica interna de esta ciencia en pro de su mejor intelección.

El lector se preguntará entonces, ¿acaso podemos enseñar desde un sistema interpretado un objeto que es totalmente vacío y carente de interpretación?; y si es así, ¿no estaremos pecando de irresponsables al querer convertir un objeto en otro a fin de asegurar su mejor comunicación? Cabría preguntarse "mejor comunicación" de qué.

No hay duda de que, si la matemática es un "sistema formal", corresponde describirla sistemáticamente. Por ello nos llama la atención que aquí se empleen procedimientos que se oponen a ese principio.

Por último, la tercera laguna está íntimamente relacionada con las expresiones lingüísticas de las que "*el librito"* hace uso. Uno de los aspectos más llamativos es el hecho de que no existe continuidad semántica ni unidad de sentido entre este tema, el anterior y el siguiente. La secuencia didáctica se encuentra desestructurada y no responde a un dispositivo claro, coherente y progresivo. No hay un orden lógico ni pedagógico justificables, por ende, los contenidos se agrupan según un criterio poco claro, o, lo peor, sin criterio alguno. Se apela a la estética de la adición y de la yuxtaposición antes que a la linealidad del orden.

Otro de los aspectos interesantes es que la exposición de los contenidos en forma lingüística es considerablemente reducida en relación con las imágenes. El interés está centrado en el color, en el formato y en la especialización de la página: es una obra meritoria desde el punto de vista del diseño gráfico, pero no desde el didáctico y disciplinar. Tengamos en cuenta que no hace falta citar a Marshall Mac Luhan para saber que el *medio* en que se da a conocer un mensaje (contenido, explicación, etc.) puede alterar, modificar y perturbar la información de manera más que significativa. Sin lugar a dudas, las imágenes son *potentes*, pero no por ello se logran buenos fines, ya que ser potente no es una categoría ponderable en sí misma. La potencia de una imagen puede ser fértil o infructuosa. Por otro lado, desde Piaget, y aun antes, se sabe que las imágenes son meros recursos, simulacros que sirven a fines didácticos, pero no objetos matemáticos de por sí. Hacer hincapié en la "imaginería matemática", en la constante apelación a estímulos visuales, no es otra cosa que reducir todo el contenido y su complejidad a la etapa de las operaciones concretas. Estas facetas que se dejan ver en *"el librito"*, parecen ir fervorosamente en consonancia con las corrientes de enseñanza actuales. Pero van totalmente a contramano de lo que la ciencia hace, es decir, no se comparten ni el problema de la inducción ni el de la interpretación de los objetos con los procedimientos de inferencia y deducción. No se trata de desacreditar los procedimientos y recursos didácticos; por el contrario, creemos que la única manera con que contamos para llevar a cabo una buena enseñanza seguida de un buen aprendizaje consiste en dejar de lado las posturas condescendientes y acríticas. Y esto sólo es posible en la medida en que tomemos distancia de visiones dogmáticas instaladas por modas académicas.

Algunas reflexiones

§ Para introducirnos a reflexionar sobre esta problemática epistemológica y realizar un aporte a la didáctica de la matemática, se presenta a continuación un fragmento de (Toranzos, F – 1949)

... No es el objetivo definir una determinada postura filosófica, sino concretar algunas conclusiones en las que concuerdan las diversas tendencias, cuando se prescinde de concepciones aventuradas y de criticismos intransigentes, cuya importancia es hoy muy discutible. Estas conclusiones son:

1º - La matemática es una libre creación de la mente humana y es en ella donde tienen existencia los objetos matemáticos; con lo empírico solo están ligados por un remoto origen psicológico e histórico. La matemática, y en ello está de acuerdo con su condición de creación humana, no es perfecta ni cerrada. Hay al respecto dos procesos históricos, tendientes el uno a perfeccionar su estructura y el otro a ampliarla constantemente. Estos dos procesos constituyen el triunfo más nítido de la acción del pensamiento humano en el campo de la abstracción, del raciocinio puro, y también en el de la intuición, que constantemente señala rumbos a los procesos deductivos.

2º - La estructuración actual de la matemática es formalista. Consecuencia de ello es que la axiomática desempeñe un papel capital en su fundamentación. Por eso las teorías matemáticas se presentan como sistemas hipotéticos deductivos, es decir, sus conclusiones no tienen una validez independiente, sino con respecto al sistema de axiomas de cada teoría.

Para justificar la estructura formalista es necesario aceptar la legitimidad de las teorías matemáticas elementales (aritmética y teoría elemental de conjuntos, de las cuales no hay prueba metamatemática inobjetable de compatibilidad) como una verdad de hecho, justificada por el manifiesto contenido intuitivo de estas teorías, que permite que la mente humana las acepte sin resistencia. Establecido esto, la axiomática de estas teorías pierde su carácter de instrumento de prueba de legitimidad, y se convierte, según la feliz frase de Cavaillés, en "suerte de condensación de la materia activa de una teoría alrededor de algunos procedimientos captables intuitivamente y para los cuales la cuestión de una aprobación, si no de una justificación, es más fácil de resolver".

3º - Los recursos de la lógica no son suficiente para fundamentar la matemática; por eso al fundamentar el sistema formal es necesario agregar a los axiomas de la lógica otros fuera de ella, y entre éstos por lo menos uno que se refiera al infinito.

4º - No tiene un sentido preciso la distinción entre demostraciones analíticas y sintéticas (en el sentido de Kant); la demostración matemática es "formal", es decir, deductiva…

De acuerdo con estas ideas (que no son precisamente las que se presentan como fundamentos para la enseñanza de la matemática) queda bien claro el proceso formal que la disciplina establece. Por lo tanto, y en función de las corrientes didácticas, podemos asegurar que dicho orden lógico disciplinar ha sido cambiado por una especie de "*matemática empírica*" que reconstruye sólo los aportes *aplicados* del formalismo. En lugar de una demostración rigurosa, se da pie a un saber empírico con situaciones particulares con "*imágenes potentes*" conjuntamente con un procedimiento fáctico al superponer, en una situación particular, las áreas de cuadriláteros para asegurar la verdad del enunciado del teorema en cuestión. Por supuesto que esta última postura pretende asegurar para los alumnos un saber matemático más cercano a la realidad y al uso, que a su formalidad. De esa manera, se sustentan planteos tales como: ¿para qué demostrar un teorema? ¿ para qué le sirve al alumno sino lo puede aplicar? ¿ qué utilidad tiene un axioma en la vida diaria?, etc. Lo que estas posturas no tienen en cuenta es que al querer pasar la formalidad matemática a una suerte de ciencia fáctica, aparecen otros problemas propios de esas ciencias. Entonces, la pregunta que se torna imperiosa es la siguiente: estos problemas nuevos que tienen las ciencias fácticas ¿son más o menos dificultosos para la enseñanza que una demostración formal ¿No será que, tratando de simplificar complicamos, y que, en pro de la *accesibilidad* del saber matemático, terminamos metidos en una caja de Pandora? ¿Hasta qué punto es lícita y fructífera esta operación? En el ámbito educativo, entre intención y realización media un gran espacio: a reducirlo (y no a engrosarlo) debe apuntar la intervención al enseñar.

El verdadero dominio disciplinar

El *dominio disciplinar* requiere del conocimiento de la articulación histórica y epistemológica de la matemática así como las condiciones de su comunicabilidad. Por otra parte, la matemática entendida como lenguaje (que opera bajo ciertas reglas y con determinados signos), se manifiesta en los distintos ámbitos o comunidades con un código que no necesariamente es compartido. En el ámbito escolar, más que un discurso matemático, se estructura un discurso áulico: la matemática se piensa y se "dice" de una determinada manera. El dominio disciplinar permite al docente retomar su función de guía en aquella prescriptiva frase "*…el proceso de negociación de los significados entre el docente y los alumnos…*" y otorgarle su verdadero sentido (el que deriva de la teoría de situaciones). Finalmente, la estructura de la matemática es formalista y deductiva, y los axiomas representan un papel esencial en la fundamentación de la misma. Y podemos agregar que, como estrategia de enseñanza la presentación axiomática ofrece ciertas ventajas: permite definir nuevos objetos de estudio con ayuda de los anteriormente introducidos, es ordenada y respeta la estructura disciplinar.

Notas finales

Si pretendemos hacer de la docencia una profesión socialmente reconocida, debemos entonces tomar nuestras decisiones basadas en criterios debidamente fundados, y en este caso, la única manera de fundamentarlas exige conocer con profundidad el campo de la matemática, su epistemología, su lenguaje, su desarrollo histórico y la adopción de una posición filosófica. Al mismo tiempo, conocer las teorías de enseñanza para descartar la trampa en la que nos envuelven y sustentar nuestras acciones con un compromiso ético respecto de la tarea educativa. La constante revisión de publicaciones sobre didáctica de la matemática ayuda a – pero no sustituye – la reflexión sobre el estatuto epistemológico de la disciplina, en consecuencia, debemos tomar los recaudos necesarios. Sin embargo, hay que distinguir entre publicaciones especializadas y otro tipo publicaciones que responden a la lógica del mercado educativo. Estas últimas suelen presentar información fragmentada, de procedencia poco explícita, basada en criterios de masividad que tienden a la homogeneización del saber, como si éste no debiera adecuarse a las diversas circunstancias de su enseñanza. Pocos son los textos que citan bibliografía, y cuando lo hacen, remiten a textos "antiguos" que se proponen reemplazar con nuevos aportes. Sin embargo, suelen imponerse y ganar terreno en la cultura escolar.

El panorama no parece promisorio y tal vez no lo sea, pero llamar la atención sobre estos problemas ayuda – como ya fuera dicho – a desmantelar ciertas prácticas naturalizadas. Disciplina específica y didáctica: he ahí la dupla básica sobre la que debe articularse el debate. Encerrarse en una o en otra como si fueran posibilidades excluyentes promueve la confrontación y genera monólogos. Nuestra intención es generar diálogos y debates. Esperamos haberlo logrado.

Referencias bibliográficas

Bachellard, G. (1987). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México: Siglo XXI.

Bernstein, B. (1994). *La estructura del discurso pedagógico.* Madrid: Morata.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática.* Publicaciones del Seminario de García de Galdeano. Universidad de Zaragoza.

Hernández, F. Y Sancho, J. M. (1996). *Para enseñar no basta con saber la asignatura*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Lungarzo, C. (1970). *El razonamiento deductivo*. Bs. As. UBA. Cuadernos de lógica.

Morris, Ch. W. (1958). *Fundamentos de la teoría de los signos*. Bs. As: Paidós.

Toranzos, F. I. (1949). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. México: Espasa-Calpe.

Latorre M. L., Spivak, L., P. Kaczor, M., de Elizondo C. L., *Matemática 8.* Bs. As. Ed. Santillana.

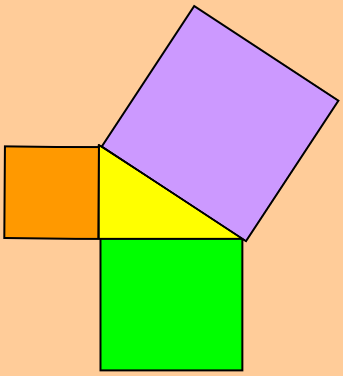
Anexo 1

En “*el librito” Pág. 122*, el teorema de Pitágoras se presenta de la siguiente forma:

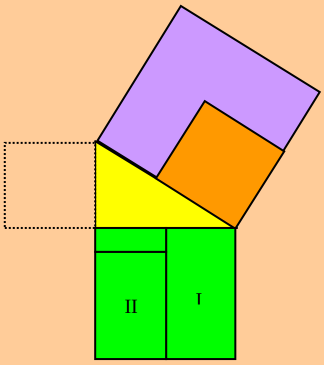
Teorema de Pitágoras

Al filósofo y matemático Pitágoras (570 – 480 a. C.) se le atribuye haber descubierto una importantísima relación entre los lados del **triángulo rectángulo.**

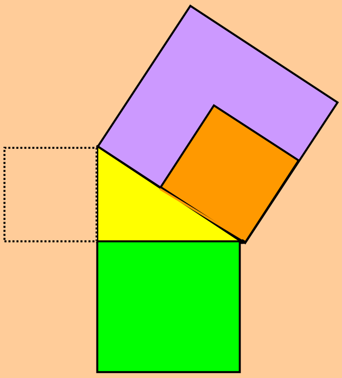
1 Dibujamos un triángulo rectángulo y, sobre cada uno de sus lados, construimos un cuadrado.



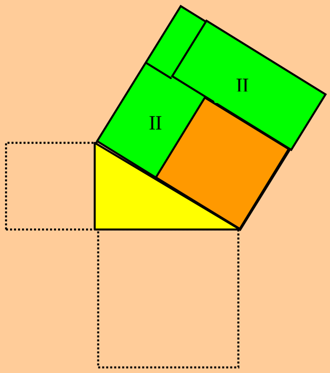
3 Recortamos el cuadrado verde en tres partes, que llamamos I, II, III



2 Recortamos el cuadrado naranja y lo colocamos sobre el violeta

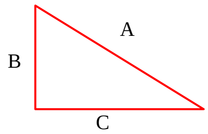


4 Ubicamos las tres partes en los “huecos” que quedaron sin superponer



- Podemos observar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$A^2 = B^2 + C^2$

9