Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 115-124

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

En esta entrega seguimos con la filosofía de que la actividad matemática, fundamentalmente, hay que encontrarla: por un lado, en todas aquellas actividades basadas en Situaciones Problemáticas (SP) con el convencimiento de obtener una mayor garantía del aprendizaje matemático por parte de nuestros estudiantes, y por otro en no olvidar el contexto teórico en el que nos movemos.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

En el número anterior afirmábamos que la Geometría, una de las ciencias más antiguas, se propone ir más allá de lo alcanzado por la intuición. Por ello, es necesario un método riguroso, sin errores. Los antiguos griegos manejaban un único tipo de geometría, la geometría euclidiana, hábilmente codificada en los *Elementos de Euclides* por una escuela alejandrina encabezada por Euclides. En dicha geometría los axiomas y postulados son proposiciones que relacionan conceptos, definidos en función del punto, la recta y el plano.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 1 del número anterior 92)

Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo isósceles con ángulo $\hat{A}$=20º. Se traza el segmento BE y CD con ángulos de 60º y 50º, respectivamente en la base BC, según aparece en la figura.

Calcular los ángulos en $\widehat{CDE}$ y $\widehat{DEB}$, según aparece la figura 1:

NOTA: Es un problema de geometría elemental muy abierto y fácilmente comprensible, pero la solución, aunque utilizando sólo las herramientas de un nivel de primaria y/o secundaria, no resulta fácil de encontrar.

La enseñanza de la Geometría en etapa escolar nos pone frecuentemente en situaciones paradójicas: permite enunciar problemas elementales fácilmente comprensibles para los alumnos pero la solución, utilizando exclusivamente los utensilios del nivel correspondiente, se nos antoja difícil de encontrar.

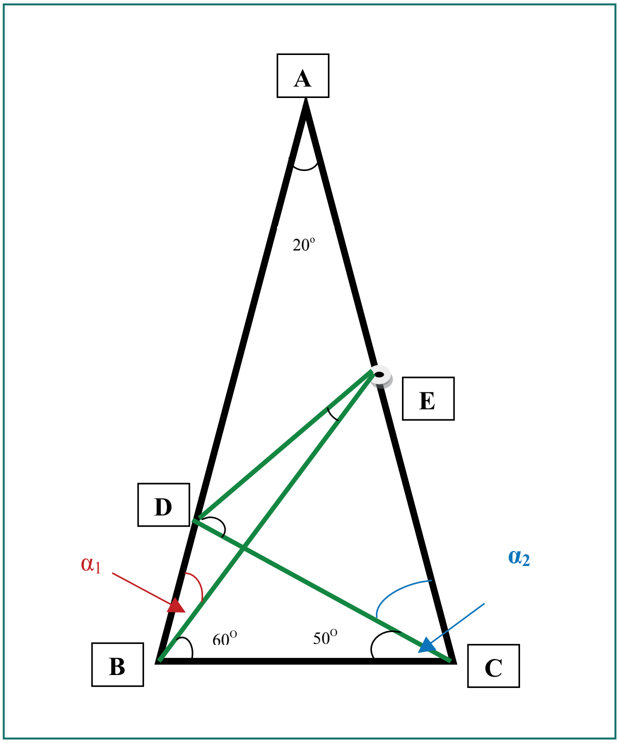

Fig. 1. Triángulo Isósceles.

SOLUCIÓN

* PASO 1

Nos piden calcular los ángulos: $\widehat{CDE}$ y $\widehat{DEB}$.
Con cálculos sencillos: 20º+60º+α_1+50º+α_2= 180º; α_1+α_2=50º

Al ser isósceles el triángulo $\widehat{BAC}$: 60º+α_1= 50º+α_2
Por lo tanto de: α_1+α_2=50º; 60º+α_1= 50º+α_2 se deduce que α_1= 20º, α_2=30º

Se deduce que el valor en $\widehat{B}$ del triángulo triangulo $\widehat{ABE}$ vale 20° y el triángulo es isósceles.

* PASO 2

Sea B′ el simétrico del simétrico del punto B con relación al lado AC y C ′el simétrico de C con relación a AB. El triángulo $\widehat{AB'C'}$ es equilátero con el ángulo en A de 60º. Por ello, el ángulo $\widehat{B'C'B}$ vale 20° (80° de BC'A menos 60° de $\widehat{B'C'A}$) y el ángulo $\widehat{B'C'D}$ vale 30°.

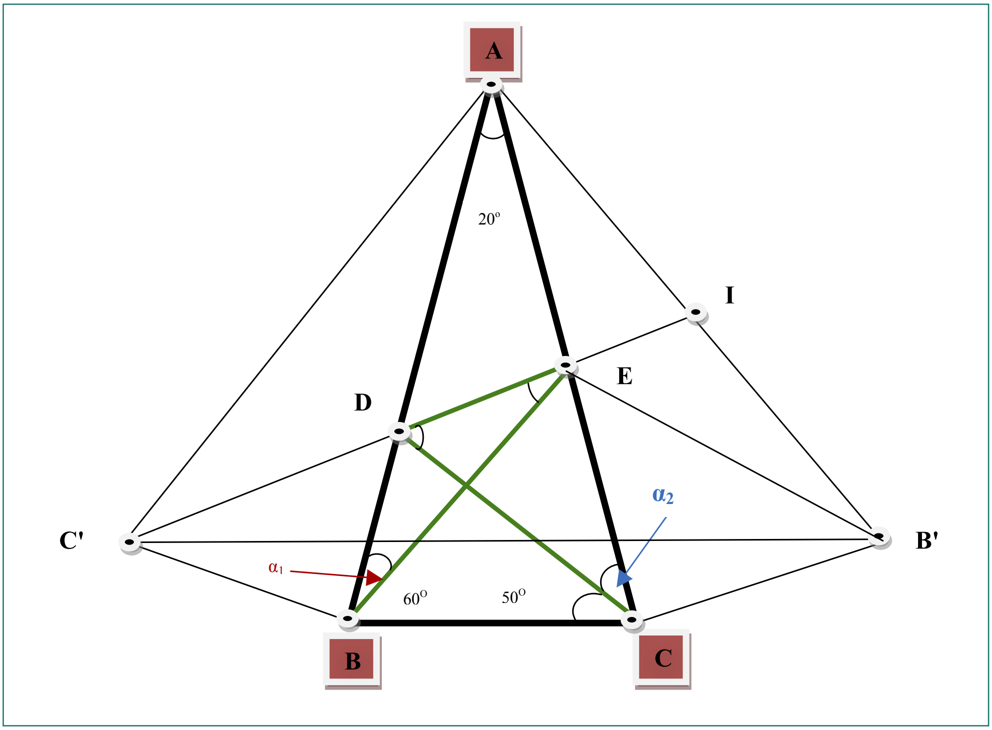

Fig. 2.

En la figura 2 podemos observar que C′D es la bisectriz del ángulo en C′ en el triángulo $\overset{\triangle}{AB'C'}$.

Y también podemos afirmar que la mediatriz de AB′ la corta en su punto medio I. Por otro lado, el triángulo $\overset{\triangle}{AB'E}$ es isósceles por ser simétrico del triángulo $\overset{\triangle}{ABE}$. En consecuencia la mediatriz de AB′ es la recta IE.

* PASO 3

Como conclusión: las rectas C′D y IE son idénticas y los puntos C′, D, E e I están alineados. Por lo tanto, es fácil calcular los ángulos que valen 80° et 30°.

* PROBLEMA GENERAL

Teniendo en cuenta el comentario citado ut-supra, podemos plantear el problema general cuyo enunciado podría ser:

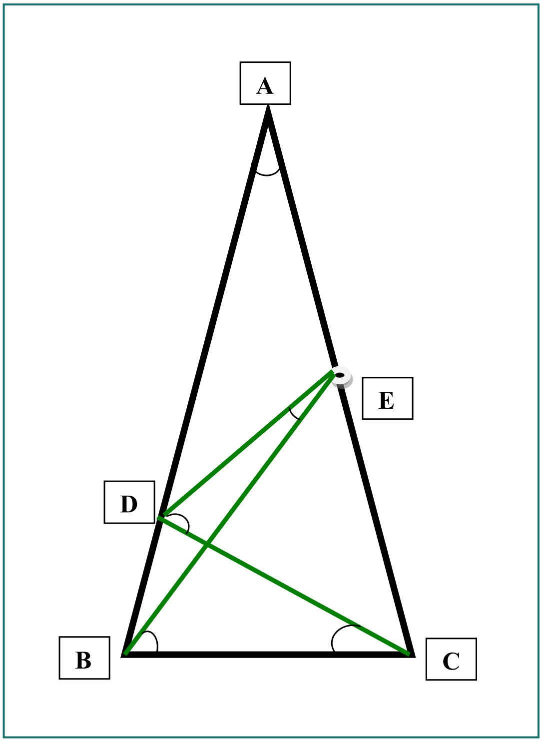

Fig. 3.

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo isósceles con ángulo $\hat{A}=\alpha^o$. Se traza el segmento BE y CD con ángulos $\widehat{EBC}=\beta^o$ y $\widehat{DEB}=\gamma^o$ (por simetría podemos suponer que $\gamma<\beta$) , respectivamente en la base BC, según aparece en la figura. Calcular los ángulos en $\widehat{CDE}=\delta$ y $\widehat{DEB}=\varepsilon$.

NOTA: Invitamos al lector a explorar en profundidad este ejemplo, dependiendo del nivel en que nos encontremos.

a) Si designamos de forma general la 5-tupla (***α, β, γ, δ, ε***) una configuración como la que se ha planteado, tenemos como datos conocidos ***α***, ***β*** y ***γ***; y como datos a determinar ***δ*** y ***ε***. A partir de aquí, por ejemplo, con trigonometría ya no es tan fácil de explorar, por parte de los alumnos (secundaria).

b) Partiendo de configuraciones particulares:

* El triángulo de oro con α=36º, β=54º y γ=36º nos da la 5-tupla (36º, 54º, 36º, 72º, 18º). Este tipo de configuración conduce a dos tipos de generalización:

– **b.1.** Elegir los ángulos de tal manera que los triángulos $\overset{\triangle}{BCD}$ y $\overset{\triangle}{BCE}$ sean todos isósceles.

– **b.2.** Tomar CD y BE perpendiculares, con CD bisectriz del ángulo en $\widehat{C}$.

c) Es interesante, proponer al alumno que trabaje y profundice en el término que Henri Bareil, denomina zigzag asociado a un triángulo isósceles, ***Des zigzags, des pavages et des constructions***, 2007:

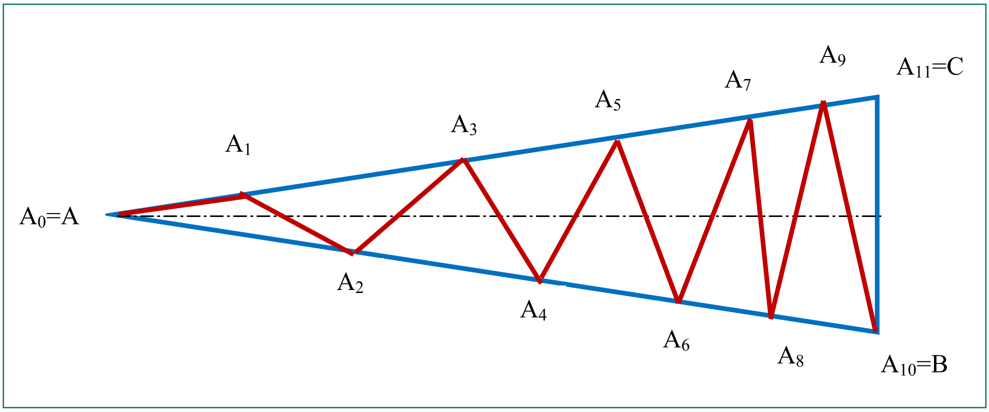

Fig.4.

Se llama ***iso-zigzag*** asociado a un triángulo isósceles, el zigzag definido por una sucesión de enlaces iguales entre ellos con la misma base, es decir una sucesión de "n" segmentos iguales definidos por puntos A_i $(0 \leq i \leq n)$ tomados alternativamente sobre los dos lados iguales de un triángulo isósceles de vértice $A=A_0$ y tal que $A_{n-1}A_n$ coincida con la base BC del triángulo isósceles, Fig. 4

Eligiendo una pareja de puntos (D,E) en la Fig.3 siendo D y E dos vértices del zigzag, uno sobre AB y el otro sobre AC, obtenemos configuraciones por las que podemos determinar los ángulos $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ con el fin de preservar la condición $\boldsymbol{\delta<\varepsilon}$.

Así por ejemplo, en la Fig. 5 se tiene la configuración:

$$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 20^o, 60^o, 10^o)$$

y en la Fig. 6 se tiene

$$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 70^o, 50^o, 110^o, 10^o)$$

d) Se puede proponer también el estudio con la demostración correspondiente en los siguientes casos:

$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 20^o, 60^o, 10^o)$ (Fig. 5)
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 40^o, 60^o, 30^o)$
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 60^o, 30^o, 80^o, 10^o)$
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 60^o, 50^o, 80^o, 30^o)$ (problema de referencia)
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 20^o, 60^o, 10^o)$
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 70^o, 50^o, 110^o, 10^o)$ (Fig. 6)

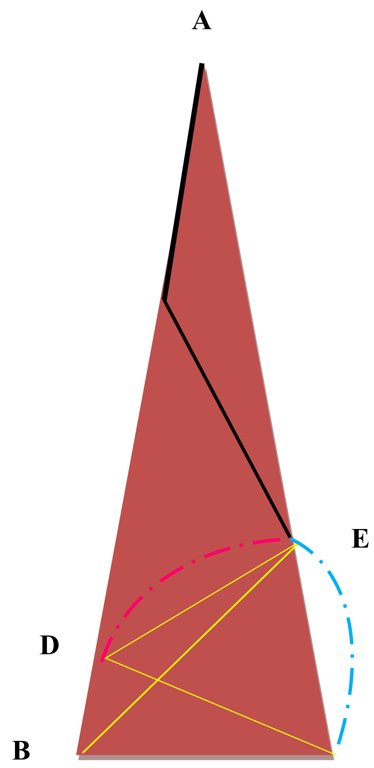

Fig. 5.

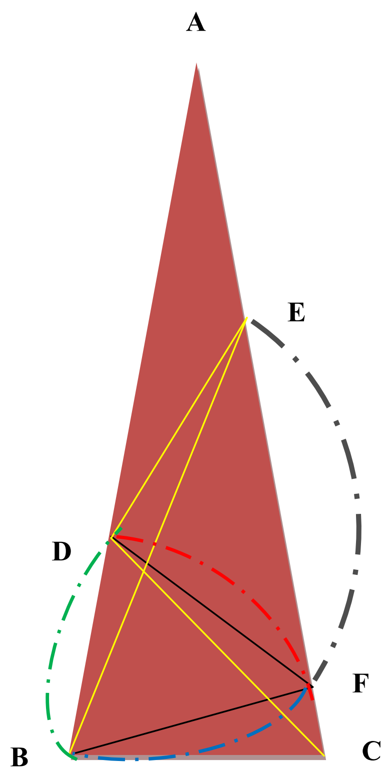

Fig. 6.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

2. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 2 del número anterior 92)

Tomar conciencia del aspecto algorítmico es el objetivo de este ejercicio.

De decisión del uso de algoritmos: Hotel en la Meca

Actualmente se construye el hotel Abraj Kudai, en Manafia, zona central de La Meca, en Arabia Saudita, el cual será el más grande del mundo y requerirá de un inversión de 3.6 mil millones, el cual se prevé será inaugurado para el año 2017. El gran podio de 45 pisos de altura y 10.000 habitaciones, estilo fortaleza, será coronado por 12 torres de 10 pisos. También contará con 70 restaurantes, cuatro helipuertos, una estación de autobuses, patios de comida, un centro comercial y un centro de convenciones y estacionamientos.

Las habitaciones se enumeran en forma de caracol 1,2,3,4, 5,6, 7,…….,10000. A partir del algoritmo anexo construido en forma caracol infinito se trata de:

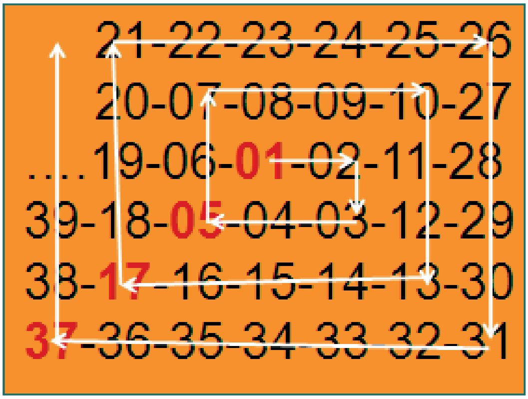

Fig. 7. Distribución de habitaciones en el Hotel de la Meca

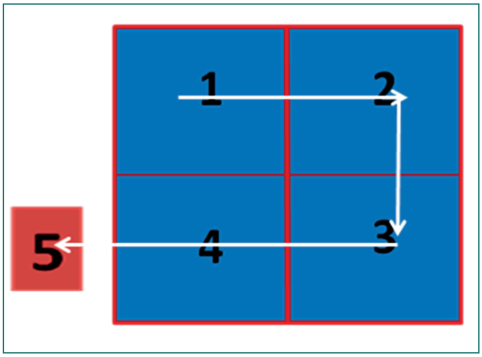

Fig. 8.

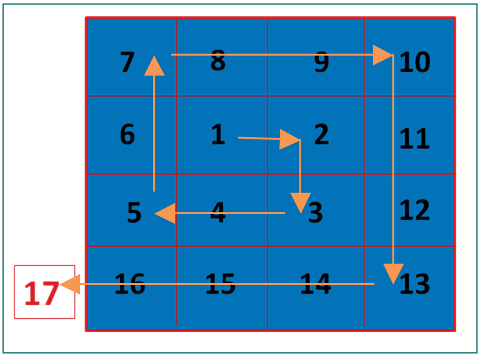

Fig. 9.

a) *Encontrar la fórmula recurrente que permita conocer todos los números de las habitaciones situadas sobre la diagonal dónde figuran los números escritos en fondo rojo.*

b) *¿Son todos primos los números que aparecen en la diagonal?*

*** PASO 1: En la vuelta 0**: el número es **1**

*** PASO 2: En la vuelta 1:** el número es **5**=4+1=2^2+1 según el esquema anterior que aparece en la Fig.7.

PASO 3: En la vuelta 2: el número es **17**=16+1=4^2+1

PASO 4: En la vuelta 3: el número es **37**=36+1=6^2+1

PASO 5: En la vuelta 4: el número es **65**=64+1=8^2+1

PASO n-ésimo: En la vuelta n-ésima: ¿Se podrá afirmar que el número buscado será **$(2n)^2+1$** según el esquema siguiente?

Supongamos que esta afirmación sea verdadera para la vuelta "n", entonces el número buscado para la siguiente "n+1" es: **$(2n)^2+4(2n+1)+1$** según la figura adjunta:

El número buscado que corresponde a la vuelta "n+1" se puede escribir más simplemente: **$4(n+1)^2+1$ ó $[2(n+1)]^2+1$**, y por lo tanto la afirmación es entonces correcta.

A modo de reflexión podemos afirmar que si existe una problemática que no conviene abordar en términos de contenidos, esta es la técnica algorítmica. Sabemos que

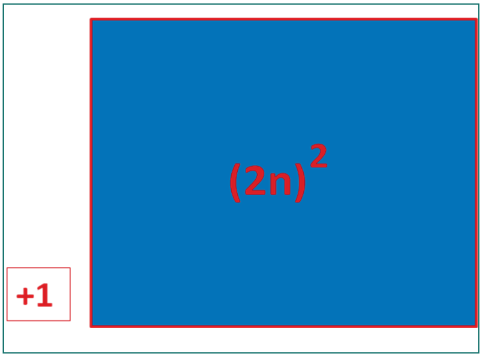

Fig. 10.

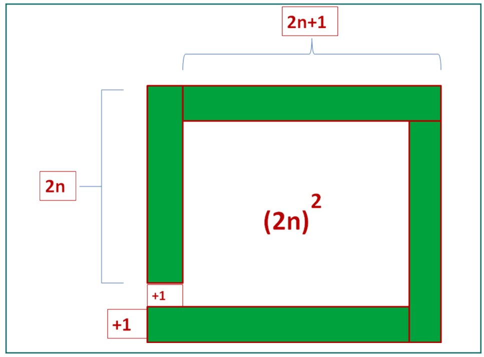

Fig. 11.

ALGORITMO es un conjunto de reglas operatorias que nos permite resolver un problema en un número finito de operaciones. La característica de un algoritmo es transformar grandes cantidades de datos de entrada, en otras grandes cantidades de salida, a partir de un conjunto bien definido de instrucciones de transformación:

¿Cuál es el problema que se le plantea al alumno de un determinado nivel de enseñanza?

a) Asegurar que, ante un problema a resolver, debe buscar primero el sentido de las cuestiones planteadas.

b) A continuación asegurarse una "buena utilización".

c) Ver que en la elaboración, de un algoritmo, la principal dificultad didáctica reside entonces en la investigación de un compromiso entre el aprendizaje, la destreza, la maestría y el control de las técnicas.

Con este ejem plo, el objetivo conseguido es:

- Llegar a obtener un algoritmo de construcción con una fórmula recurrente que sea decisiva para obtener los números de la diagonal señalada en rojo.
- Incitar a los alumnos a conseguir la construcción en caracol, lo que le permitirá constatar que no se obtiene un número primo (65) (¡esto se puede hacer a nivel de cursos finales de primaria y primeros cursos de secundaria!).

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

La enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática. Tal vez sea por los diferentes intereses y porqué no están claro los contenidos a enseñar, también con la manera de enseñarla: por un lado la Geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento, parte de las Matemáticas dónde se utiliza más la intuición, la concreción y la realidad; y por otro la poca difusión de propuestas didácticas de la enseñanza de la Geometría.

Considerando las diferencias existentes entre los diferentes niveles, esta sección pretende, en una ***primera instancia***, insistir en la necesidad de hacer propuestas de ejercicios variados de geometría clásica tomando el triángulo como elemento básico del ***sapere aude*** en Geometría. En este número presentamos los dos siguientes:

a) Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo de área S. Demostrar que la relación:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

(Problema propuesto en las Olimpiadas Internacionales de Budapest de 1961)

b) ¿Existe un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ tal que la altura desde el vértice A, la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$ y la mediana relativa al lado BC dividan al ángulo $\widehat{BAC}$ en cuatro ángulos con la misma medida?

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Sabemos que la teoría de números fue una de las disciplinas de estudio favoritas entre los matemáticos griegos de Alejandría a partir del siglo III a. C., quienes, ya tenían conciencia, por ejemplo, del concepto de ecuación diofántica en sus casos particulares. Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación.

Presentamos en este *sapere aude* estos dos ejercicios muy interesantes.

a) *Demostrar que, para toda terna de tres números reales,* **{a,b,c}** *cualesquiera se tiene que:*

$$|a+b| + |b+c| + |c+a| \leq |a+b| + |c+a| + |b+c|$$

b) *Los enteros positivos p y q verifican* $3p^2 - 8q^2 + 3p^2q^2 = 2008$. *¿Cuál es el valor de pq?*

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@ gmail.com