Construcción y cálculo de sumas de series numéricas con un enfoque geométrico

Pedro Ramos
Universidad de El Salvador, El Salvador
pedroramalberto@yahoo.com

Henry Adonay Rodríguez
Universidad de El Salvador, El Salvador

Resumen: El presente taller trata de experiencias obtenidas cuando se desarrolló el curso de cálculo en el Profesorado en Matemática, Escuela de Matematica, Facultad de Ciencias Naturales y Matematica, Ciclo I, 2017. Se observó que las dificultades en la enseñanza de este contenido se repiten en cada semestre cuando se imparte dicha asignatura, en especial en el contenido de series. Es por ello que se abordó considerando el enfoque constructivista; construcción de conceptos básicos, sumas y fórmulas generales de las series. En este taller llevado a cabo en el aula se evidencio un dinamismo de razonamiento y un aprendizaje significativo entre los estudiantes. La primera parte, el objetivo principal del taller, es presentar figuras geométricas, en la que se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades y destrezas para la obtención, construcción y formulación de expresiones algebraicas que les permita describir el fenómeno en estudio; serie numérica. Tambien decir, que el estudiante comprenda los conceptos básicos de una serie numérica, sus respectivos elementos e identifique el tipo de serie (serie aritmética y serie geométrica). Además, su respectiva suma. En la segunda parte se presentan series numéricas con lo que se pretende obtener la suma de dicha serie, utilizando operaciones algebraicas básicas y otros que recursos matemáticos, por ello se sugiere leer cuidadosamente los problemas ya que son de diversos grados de dificultad. Con estas estrategias metodológicas implementada se facilitó la socialización de conocimientos, consolidación de forma natural del concepto de series y promovieron el desarrollo de las competencias básicas en el aula.

Palabras Clave: Series numéricas, constructivismo, enfoque geometrico

Abstract: The present workshop deals with experiences obtained when the calculation course was developed in the Mathematics Teachers, School of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Cycle I, 2017. It was observed that the difficulties in teaching this content are repeated in each semester when the subject is taught, especially in the series content. It was observed that the difficulties in teaching this content are repeated in each semester when this subject is taught, especially in the content of series. In this workshop carried out in the classroom a dynamism of reasoning and significant learning among the students was evidenced. The first part, the main objective of the workshop, is to present geometric figures, in which students are expected to develop skills and abilities for training, constructing and formulating algebraic expressions that allow them to describe the phenomenon under study; numerical series. Also say, that the student understands the basic concepts of a number series, their respective elements and identify the type of series (arithmetic series and geometric series). In addition, its respective sum. In the second part, numerical series are presented with what is intended to obtain the sum of this series, using basic algebraic operations and other than mathematical resources, so it is suggested to carefully read the problems since they are of varying degrees of difficulty. With these methodological strategies implemented the knowledge socialization was facilitated, consolidation of the concept of series naturally and promoted the development of the basic competences in the classroom.

Keywords: Numerical series, constructivism, geometric approach

1. Introducción

En las instituciones escolares a pesar de que se han hecho sugerencias de cambiar las metodologías tradicionales a constructivistas, las clases se siguen impartiendo en forma tradicional, lo que impide que el estudiante desarrolle habilidades que le permitan el razonamiento y, como consecuencia la construcción de su propio conocimiento.

Para que el proceso de enseñanza aprendizaje sea significativa en el área de la matemática y que éste se dé en forma exitosa y sin provocar rechazo o aburrimiento en el alumno se sugiere propiciar y generar actividades que le motiven y despierten el interés. Estas actividades o juegos ofrecen la oportunidad de experimentar, satisfacer su curiosidad, ejercitar sus sentidos y desarrollar su capacidad intelectual

En ese contexto, el presente taller trata sobre la construcción y cálculo de series numéricas. Este se divide en dos partes. La primera parte se presentan figuras geométricas y en la que tiene la finalidad de que los estudiantes desarrollen habilidades y destrezas para la adquisición, construcción y formulación de expresiones algebraicas que nos permita encontrar una ecuación – serie numérica- para describir el fenómeno en estudio y luego realice su respectiva suma, también que comprenda los conceptos fundamentales de una serie numérica, con sus respectivos elementos. La segunda parte se presenta problemas de series numéricas con lo que se pretende obtener la suma de dicha serie, utilizando operaciones algebraicas básicas y otros que recursos matemáticos que permitan su cálculo.

Finalmente, expresar que reflexionamos en este trabajo con la idea de sugerir al profesor aplique metodologías y el uso de distintos recursos y actividades que se pueden desarrollar con ellas, para lograr una más significativa enseñanza-aprendizaje de las series.

2. Marco Teórico

Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión S_n definida como

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A esta sucesión la llamaremos serie del término general a_n y la denotaremos $\sum a_n$ a los términos de S_n se les suele llamar sumas parciales de la serie.

Si S_n tiene límite se denota por

$$\lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Los números de una serie se denominan los términos de la serie

3. Planteamiento del Problema

Sabemos de las dificultades que conllevan al aprendizaje de las series numéricas a estudiantes de bachillerato, dentro de ellos podemos mencionar:

a) La identificación de patrones y relaciones,
b) El desarrollo de la habilidad de comparación, para que los estudiantes diferencien semejanzas y diferencias entre los patrones, para "detectar los rasgos fundamentales que conforman una estructura numérica.

c) La descripción de la secuencia de la serie, la introducción simbólica, predicciones acerca del tipo de objeto, figura o elemento que ocupará un lugar dado en la secuencia.
d) La realización de la sumatoria de la serie numérica y utilización de la técnica algebraica para determinar el valor de ésta.
e) La madurez de la cultura matemática asimilada por los estudiantes.

Por las experiencias obtenidas en el desarrollo de esta asignatura del Calculo en varios semestres en el Profesorado en Matematica, podemos mencionar que las dificultades anteriores nos muestran un amplio abanico de conceptos que influyen en la comprensión de las series numéricas que, para los estudiantes, ofrecen un grado importante de complejidad por el grado de abstracción que requiere su concepción. Por ello, la construcción de estructuras mentales, es importante para la construcción de relaciones entre elementos matemáticos.

Por tanto, creemos que es relevante proponer un taller enfocados en la teoría constructivista, para minimizar las dificultades en la comprensión de las series numéricas que pretendemos sea de ayuda para generar un patrón de posibles relaciones que se deberían tener en cuenta a la hora de planificar estrategias efectivas de aprendizaje.

4. Objetivos

- Actividades lúdicas como estrategia de aprendizaje para la construcción del concepto de series numérica, su suma y sus respectivos elementos.

- Utilizar diferentes estrategias y recursos que permitan establecer la relación de la respectiva expresión algebraica –serie numérica- que describa el comportamiento de la serie y la suma respectiva.

- La utilización de operaciones algebraicas básicas y otras habilidades técnicas para determinar de cada una de las series su respectiva suma.

5. Metodología del Taller

Para la realización del taller, se requiere que los participantes formen grupos de trabajo, en las que se le proporcionaran hojas de trabajo con diferentes problemáticas con el fin de que construyan el concepto de las series numéricas, de sus expresiones generales y de sus elementos. Se pretende que los participantes lo realicen en cooperación con los compañeros para que estos se desenvuelvan con fluidez, confianza e identificación para conseguir los objetivos planteados. Y a su vez, con esta estrategia metodológicas facilitar la socialización de conocimientos, consoliden de forma natural el concepto de series numéricas y promuevan el desarrollo de las competencias básicas en el aula.

El taller en sí, trata sobre el contenido de la construcción de sumas de series numéricas y de sus expresiones generales, posteriormente realizar la suma parcial, es decir, el contenido se pretende abordar utilizando la metodología de la resolución de problemas aunque manifestamos que este proceso de determinar las sumas se hace utilizando las operaciones algebraicas básicas y otras habilidades técnicas.
Sugerimos que primero se estudie cuidadosamente cualquier problema, antes de intentar resolver cualquiera de los ejercicios. Los problemas son de diversos grados de dificultad.

6. Aspectos Generales

Se espera la participación del público meta de profesores secundaria, y como requerimientos del taller, fotocopias para brindar a los participantes, aula para formar los grupos y del apoyo tecnológico: cañón.

Las actividades a desarrollar se pretenden realizar en 2 jornadas (Ver anexos).

7. Referencias Bibliográficas

García, A., Gutiérrez, A., Rodríguez, G. y de la Villa, A. (1993). CALCULO I: Teoría y Problemas de Análisis Matemático en una Variable. CLAGSA: Madrid.

Hasser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1984). ANÁLISIS MATEMÁTICO. Trillas: México D.F.

Piza, E. (2003). Introducción al análisis real en una variable. Editorial de la Universidad de Costa Rica: San José.

Rudin, W. (1981). Principios de Análisis Matemático. Editorial Mcgraw-Hill: México D.F.

7. Anexos

X CIEMAC 2017

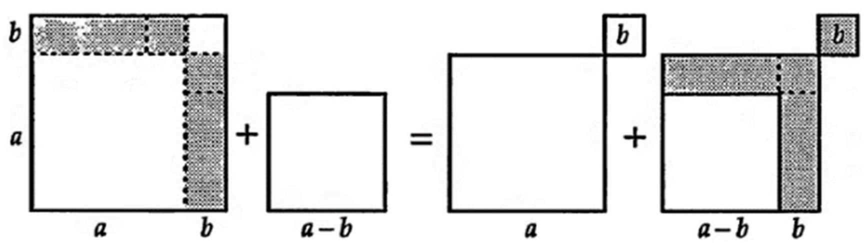
TALLER DE MATEMATICAS

TEC | Tecnológico de Costa Rica

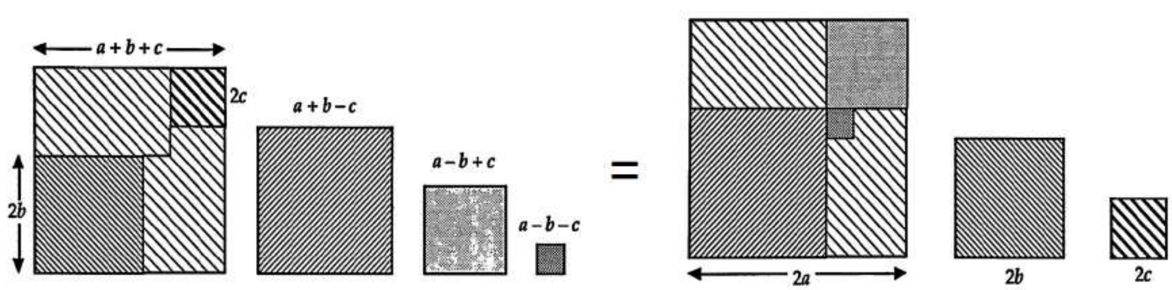
CIEMAC 2017

Jornada 1

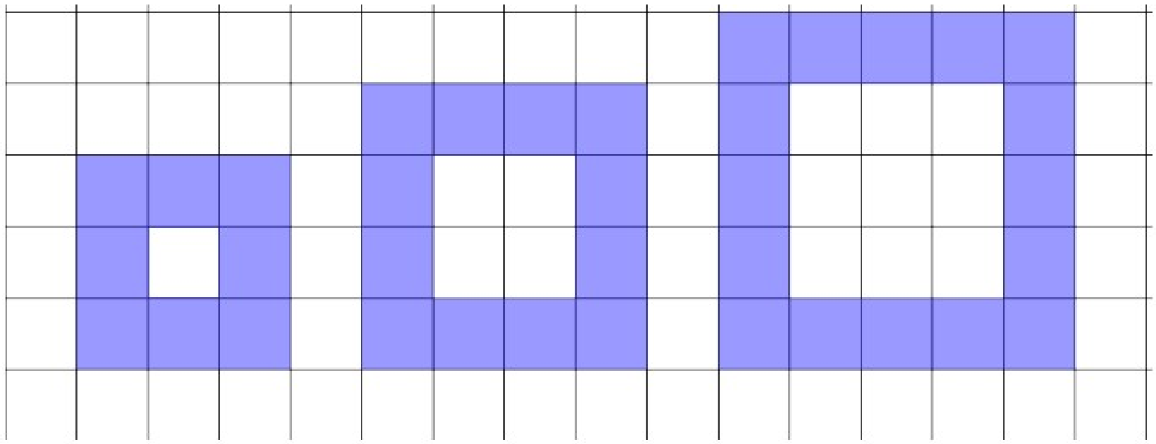
1- Determine la expresión de forma general que define cada una de las figuras geométricas siguientes

a) 

b)

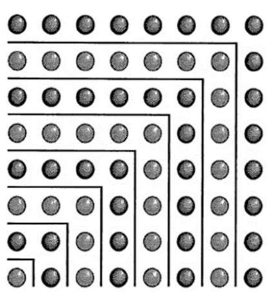


2- Observa la siguiente sucesión de figuras. Encuentra al menos 3 fórmulas para calcular el número de cuadrados de color celeste en función del número de orden de la figura

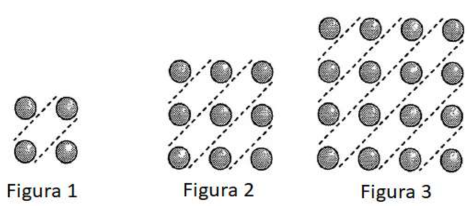


3- Encuéntrese una expresión algebraica de la suma de enteros que defina la serie de la figura siguiente y su respectiva suma (suma de enteros)

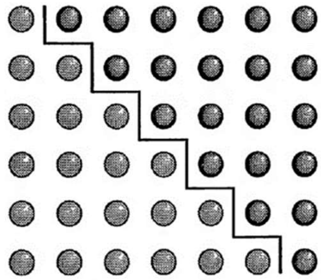
a)



b)

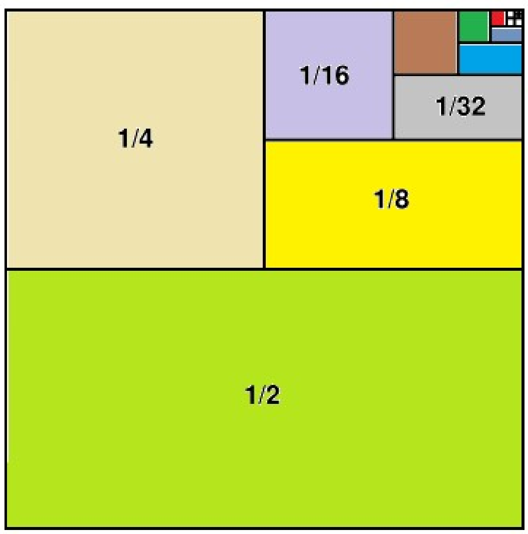


c)



4- Encuéntrese un expresión matemática que defina la serie de la figura siguiente y su respectiva suma (suma de enteros)

a)

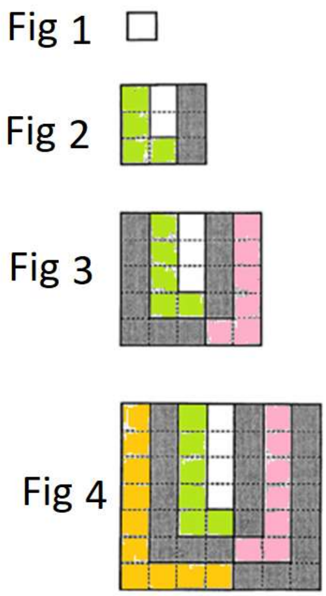


b)

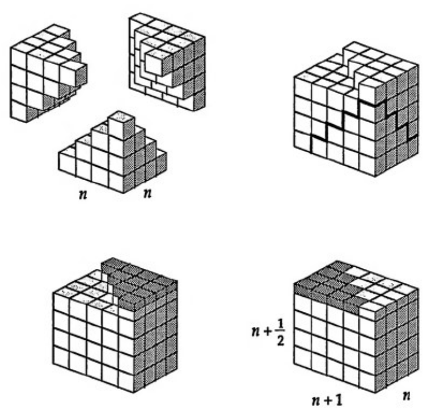
ISBN 978-9930-541-09-8

5- Encuéntrese una expresión algebraica del n –esimo término que define la serie de la figura siguiente y presente su respectiva suma (suma de enteros)

a)

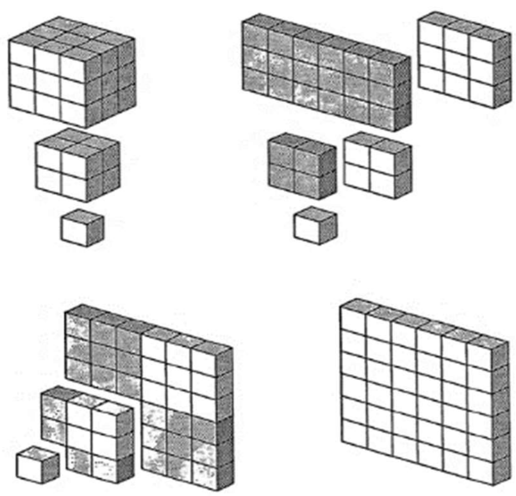


b)

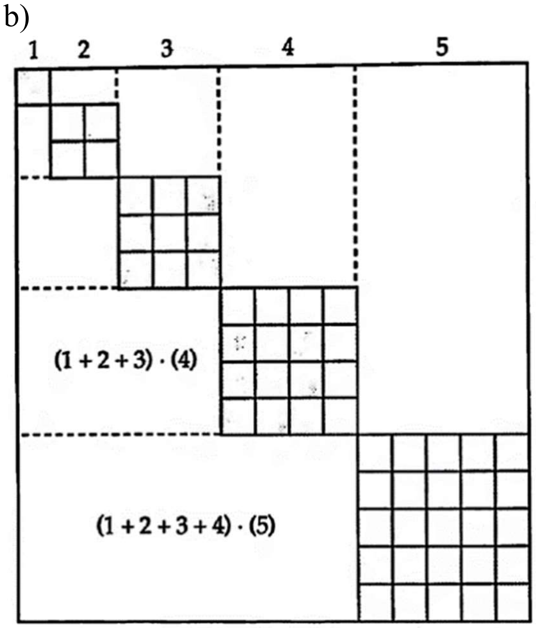


6 - Tarea

a)



b)



TALLER DE MATEMATICAS

CIEMAC 2017

Jornada 2

1- Determina la suma de

a) $S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$

b) $S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

c) $S(n) = (-31) + (-27) + (-23) + \cdots + 29 + 33$

d) $S(n) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1}n$

e) $S(n) = n + (n + 3) + (n + 6) + \cdots + 4n$

f) $S(n) = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n$

2- Determínese la suma de

a) $S(n) = 1.\binom{n}{1} + 2.\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n.\binom{n}{n} +$

b) $S(n) = \binom{n}{1} - 2\,.\binom{n}{2} + 3.\binom{n}{3} - 4.\binom{n}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}.n.\binom{n}{n}$

c) $S(n) = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

d) $S(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{3} - \frac{1}{5}\binom{n}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}$

3- Determinemos la suma

$$\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{2}+\cdots+\binom{m+n-1}{n-1}$$

Sea

$$B(k,n)=1.2.3\ldots\ k+2.3.4\ldots\ (k+1)+\cdots+n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)$$

Si sustituimos en la expresión……por ***m = k*** y multiplicamos por ***k!*** obtenemos

$$B(k,n)=k!\binom{k+n}{k+1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots+(n+k)}{k+1}$$

Observemos que según la proposición tenemos que

$$B(1,n)=S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ahora, realizando procesos algebraicos y otros, determínese

$$S_2(n),\qquad S_3(n),\qquad S_4(n)$$

$$S_3(n)=\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_4(n)=\ 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$S_5(n)=\ 1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

4- Encuéntrese la suma de

$$a)\ S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$b)\ S = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$c)\ S = \frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \cdots + \frac{n^2}{((2n-1)2n+1)}$$