Algunos tópicos de geometría analítica

MEng. Angie Solís Palma
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
ansolis@itcr.ac.cr

MSc. Jorge Luis Chinchilla Valverde
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
jochinchilla@itcr.ac.cr

Resumen: Este taller muestra una serie de elementos teórico-práctico, acorde al Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MPE), concerniente al tema de Geometría Analítica, diseñado y mejorado gracias a la recopilación de experiencias y sugerencias recogidas en varias Direcciones Regionales de Matemática del país, por distintos docentes de secundaria que han participado en talleres de profesionalización docente en el tema: Algunos Tópicos de Geometría Analítica. La estrategia a seguir será brindar un material con el contenido teórico necesario para el abordaje de los temas: circunferencia y su ecuación analítica, relación algebraica entre circunferencias y rectas, transformaciones en el plano (isométricas e isomórficas). Posteriormente, se brindará una serie de actividades utilizando material concreto, y finalmente, una sección de actividades utilizando la herramienta de GeoGebra.

Un aspecto importante a considerar del taller es proporcionar ciertas estrategias metodológicas para la enseñanza del tema en secundaria, así como facilitar al docente participante, recursos tecnológicos que le brinde medios tanto para su labor docente, como también, enriquecer su conocimiento y dominio del tema a desarrollar.

Palabras clave: Circunferencia, rectas, transformaciones en el plano, isometría, isomorfa, GeoGebra.

Keywords: circumference, straight, transformations in the plane, isometry, isomorphic, GeoGebra.

1. Introducción

A raíz de los nuevos programas de estudio del Ministerio de Educación Pública, ejecutados desde el 2012, la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, mediante su proyecto PAEM, ha realizado esfuerzos en conjunto con distintas autoridades del MEP, específicamente asesores regionales de matemática, en la elaboración de diversos talleres de profesionalización docente, dirigidos desde una visión tanto conceptual como metodológica de la forma en que se enseñan algunos tópicos de las Matemáticas y con los programas propiamente dichos. Dentro del quehacer en estos talleres, hemos buscado enfatizar la participación activa de los docentes en la resolución de actividades que permitan rescatar los propósitos de los nuevos programas, en concreto, situaciones asociadas a su entorno físico, social, cultural... o problemas que puedan ser fácilmente imaginados por las y los estudiantes. Durante el 2016 y parte del 2017, se ha llevado a cabo en varias zonas del país el taller titulado :Algunos Tópicos de Geometría Analítica, el cual desarrolla actividades tendientes a fortalecer temáticas de geometría analítica, en particular la representación en sistemas coordenados de puntos y de algunas figuras geométricas como el círculo, el estudio de la simetría axial mediante algunos ejemplos interesantes que simulen situaciones propias de la realidad, algunas transformaciones en el plano (traslaciones y rotaciones). Para ello, hemos buscado realizar la presentación de situaciones que permitan favorecer ciertos vínculos entre la Geometría y el Álgebra. Por ello, queremos compartir dicha experiencia en este X CIEMAC, pero con una novedad: realizar un breve tratamiento de algunas transformaciones geométricas de manera dinámica con el apoyo de software especializado (GeoGebra), el cual permite explotar oportunidades más productivas para la representación de múltiples objetos geométricos, manipular algunas herramientas de geometría analítica y ejecutar ciertas habilidades en el proceso de noción de transformación geométrica en el plano, como es la homotecia de puntos y figuras poligonales.

2. Aspectos teóricos

2.1. Circunferencia

Definición 1
Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro*.

2.1.1. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Deseamos encontrar la ecuación que satisfacen los puntos $P(x,y)$ cuya distancia al origen $O(0,0)$ sea igual a r, siendo r cualquier número no negativo.

Dichos puntos deben satisfacer:

$$d(P,O) = r$$

Sustituyendo las coordenadas de P y O en la fórmula de distancia entre dos puntos, obtenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r^2$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, llegamos finalmente a:

$$x^2+y^2 = r^2$$

Ver figura 1.

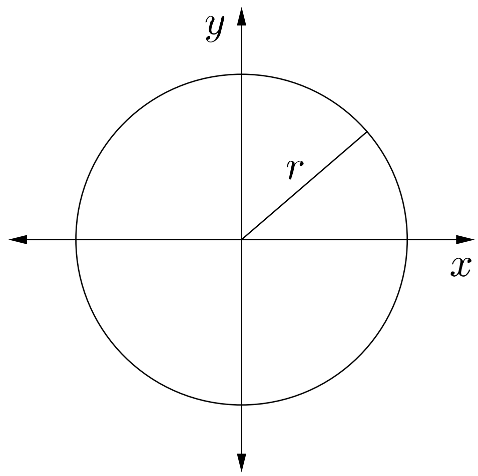

Figura 1: Circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

2.1.2. Ecuación de la circunferencia con centro en el punto (a,b)

La ecuación de una circunferencia cuyo centro es un punto $C(a,b)$ distinto del origen, esta formada por cualquier punto P, Q o M que esté a la misma distancia de C. Esta distancia recibe el nombre de *radio*, r.

Abreviadamente, el lugar geométrico viene dado por el conjunto:

$$\left\{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ t.q } \ d(P,C) = r\right\}$$

Para deducir la ecuación de la circunferencia, expresemos analíticamente:

$$d(P,C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

De lo anterior, podemos deducir que la ecuación de la circunferencia con centro en $C(a,b)$ y radio r tiene como ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1}$$

Ver Figura 2.

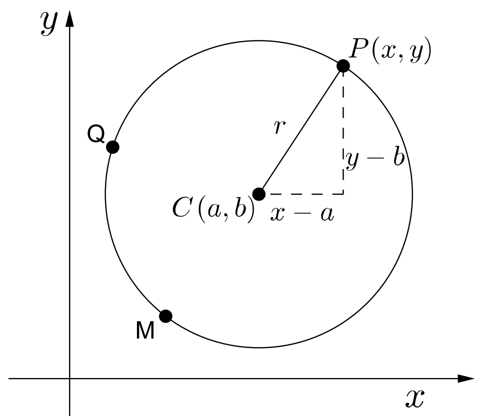

Figura 2: Cricunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2.1.3. Posición de un punto respecto a una circunferencia centrada en (a,b)

Para una circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, se puede decir que un punto (p,q) se encuentra:

- En la circunferencia si $(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$ puesto que eso significa que la distancia de (p,q) a (a,b) es igual a r. Ver Figura 3 para el punto B.

- En el interior de la circunferencia si $(p-a)^2+(q-b)^2<r^2$ puesto que eso significa que la distancia de (p,q) a (a,b) es menor que r. Ver Figura 3 para el punto C.

- En el exterior de la circunferencia si $(p-a)^2+(q-b)^2>r^2$ puesto que eso significa que la distancia de (p, q) a (a, b) es mayor que r. Ver Figura 3 para el punto A.

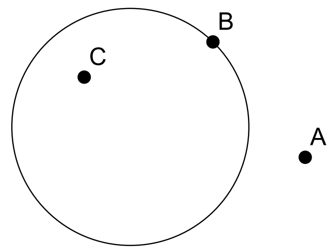

Figura 3: Posición de un punto respecto a una circunferencia

La ecuación general de una circunferencia surge de desarrollar la forma canónica (1) de la misma. Así:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Con:

$$D=-2a; \quad E=-2b; \quad F=h^2+k^2-r^2$$

La ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ se llama *forma general* de la ecuación de la circunferencia. Si en ella ordenamos los términos tenemos:

$$(x^2+Dx)+(y^2+Ey)=-F$$

y sumando $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$ a ambos miembros, obtenemos:

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

de donde:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

De esta manera el centro de una circunferencia, dada su fórmula general es:

$$C=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$$

y su radio por:

$$r=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$$

2.1.4. Relaciones algebraicas entre circunferencias y rectas

- Una recta es **tangente** a una circunferencia si tienen exactamente un punto en común (se intersecan en un único punto). Ver Figura 4.

- Una recta y una circunferencia son **secantes** si tienen exactamente dos puntos en común (se intersecan en dos puntos distintos). Ver Figura 4.

- Una recta es **exterior** a la circunferencia si no tienen puntos en común (no se intersecan). Ver Figura 4.

Sea la ecuación de la circunferencia:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

y sea la ecuación de la recta:

$$y=mx+c$$

Al sustituir $y = mx + c$ en la ecuación de la circunferencia, se obtiene:

$$(x-a)^2 + (mx+c-b)^2 = r^2$$

la cual resulta ser una ecuación de segundo grado en x, y al realizar las fórmulas notables y sumar los términos semejantes se obtiene una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

donde A, B y C son coeficientes conocidos. Esta ecuación podrá tener dos soluciones, una o ninguna, según el valor del discriminante, $\triangle = B^2 - 4AC$.

Así se tiene que:

- Si $\Delta > 0$, hay dos soluciones distintas entonces la recta es secante a la circunferencia.
- Si $\Delta = 0$, hay solución única entonces la recta es tangente a la circunferencia.
- Si $\Delta < 0$, no hay solución entonces la recta es exterior a la circunferencia.

En los dos primeros casos, las soluciones de la ecuación corresponden a las abscisas de los puntos de intersección.

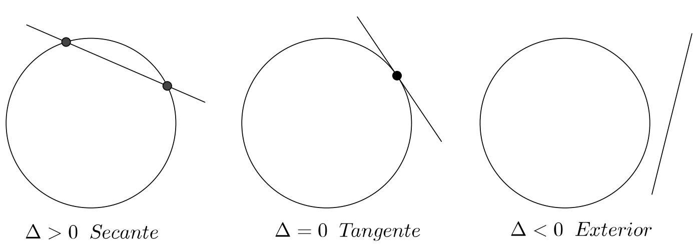

Figura 4: Recta secante, tangente o exterior a una circunferencia

2.2. Transformaciones en el plano

Se llama transformación en el plano, a toda aplicación que hace corresponder a cada punto del plano, otro punto del mismo.

Las transformaciones son operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura a partir de la primitivamente dada. La nueva figura se llama homóloga o transformada de la original.

Acerca de la notación: sea A un punto del plano α, al que se le aplica una transformación T, entonces A', que también pertenece al plano α, es su homólogo o transformado si existe una aplicación tal que convierta a A en A'. Se indica así $T(A) = A'$ y se lee "*el homólogo de A por aplicación* de la transformación T es A'."

Así, por ejemplo la transformación de un segmento $\overline{AB}$ es el segmento homólogo $\overline{A'B'}$ tal que, a cada uno de los puntos del primero, le corresponde, por la transformación T, un punto del segundo:

$$T(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$$

2.2.1. Transformaciones isométricas

Las transformaciones isométricas son cambios de posición (orientación) de una figura determinada que NO alteran la forma ni el tamaño de ésta.

La palabra *isometría* tiene origen griego: **iso**, que significa igual, y **metría**, que significa medir. Por lo tanto, esta palabra puede ser traducida como igual medida.

Entre las transformaciones isométricas están *las reflexiones (o simetrías), las traslaciones y las rotaciones (o giros)*, que serán vistas a continuación.

Reflexión

Una reflexión en el plano con respecto a una recta l, es una transformación tal que cada punto P, no contenido en l, asigna un punto P' (llamado homólogo de P) tal que l es perpendicular a $\overline{PP'}$ y lo corta en su punto medio. Una reflexión es una isometría, es decir, conserva las distancias y las medidas de los ángulos.

La reflexión puede ser de dos tipos:

- **Simetría axial**: Cada punto de la figura original y la imagen de cada uno de ellos bajo la reflexión, se encuentran a igual distancia de una recta llamada eje de simetría.

Considere la recta $y = k$, con k constante y sea un punto $P(p,q)$ y su homólogo P' mediante una reflexión con respecto a esa recta, se tiene que $P'(p, 2k-q)$. Ver Figura 5.

Por el contrario, si la recta es paralela el eje de las ordenadas tiene ecuación $x = k$; en este caso, el homólogo de $P(p,q)$ es $P'(2k-p,q)$. Ver Figura 6.

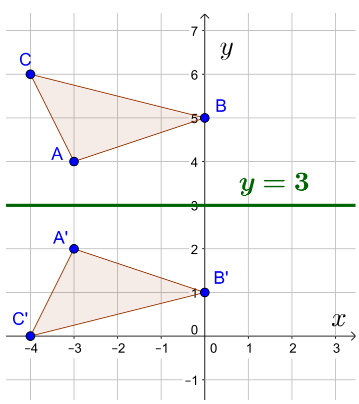

Figura 5: Simetría con el eje $y = 3$

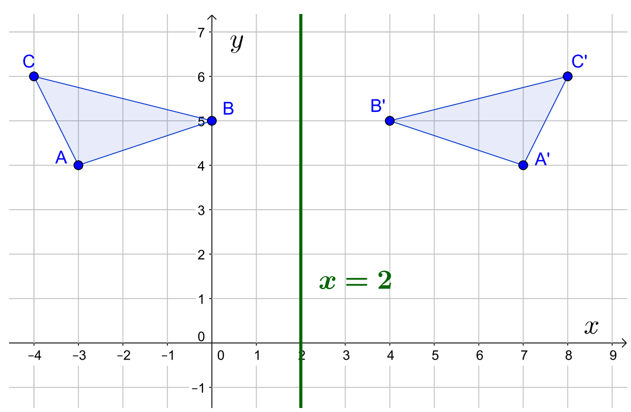

Figura 6: Simetría con el eje $x = 2$

- **Simetría central**: Cada punto de la figura original y la imagen de cada uno de ellos bajo la reflexión, se encuentran a igual distancia de un punto llamado punto de simetría. Ver Figura 7

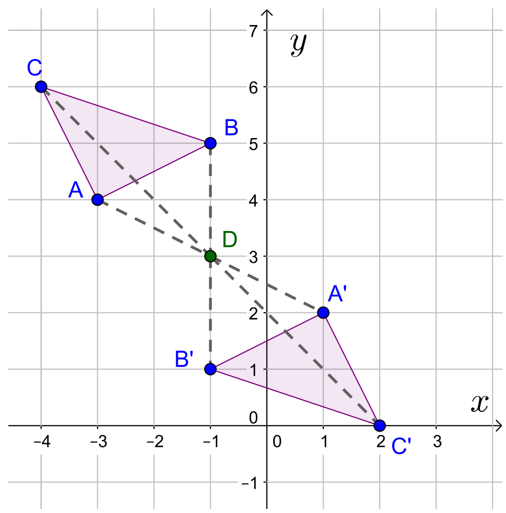

Figura 7: Simetría con el punto $(-1,3)$

Podríamos decir que la simetría central se da con respecto a un punto llamado centro de rotación o punto medio, y consiste en una rotación de 180º.

Para trazar una figura simétrica a otra con respecto a un punto, se realizan los siguientes pasos:

1. Dada la Figura 8 se marca arbitrariamente el punto O.

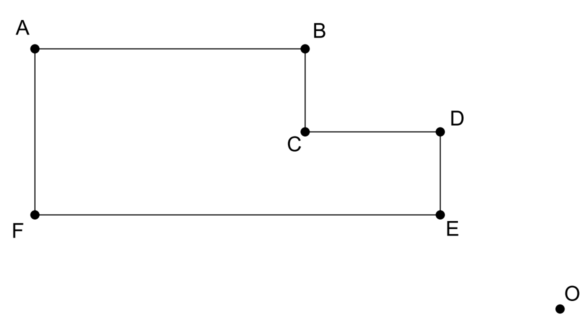

Figura 8: Simetría con el punto O o rotación sobre O

2. Se trazan segmentos de recta a partir de cada vértice de la figura y se hacen pasar por O. Justo como se muestra en la Figura 9.

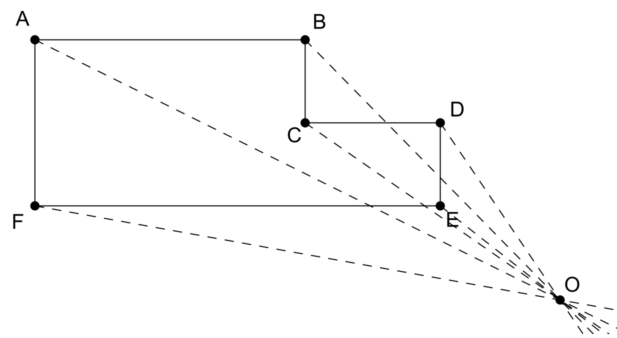

Figura 9: Trazo de segmentos

3. Se miden con el compás las distancias del punto O a los puntos de la figura y se trasladan sobre los segmentos de recta, obteniendo así la imagen de cada punto. Después se unen y se obtiene la rotación de la figura inicial. Ver Figura 10.

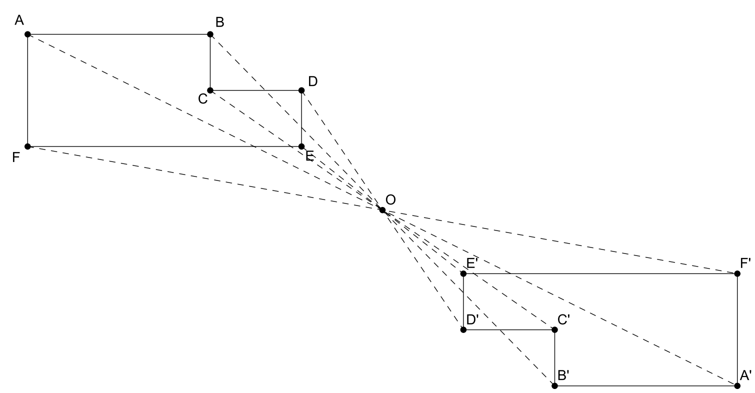

Figura 10: Rotación de la Figura 8

Las medidas de los segmentos OA, OB, OC, OD, OE y OF son respectivamente iguales a las medidas de los segmentos OA',OB', OC', OD', OE' y OF'.

También se puede observar que la medida de los ángulos de la primera figura es la misma que la de los ángulos de su simétrica.

Traslaciones

La traslación de una figura plana es una transformación isométrica que mueve todos los puntos de la figura en una misma dirección, sentido y longitud. Para representar gráficamente el movimiento realizado en una traslación, se puede utilizar una flecha (ver Figura 11), a esta flecha se le conoce como vector de traslación.

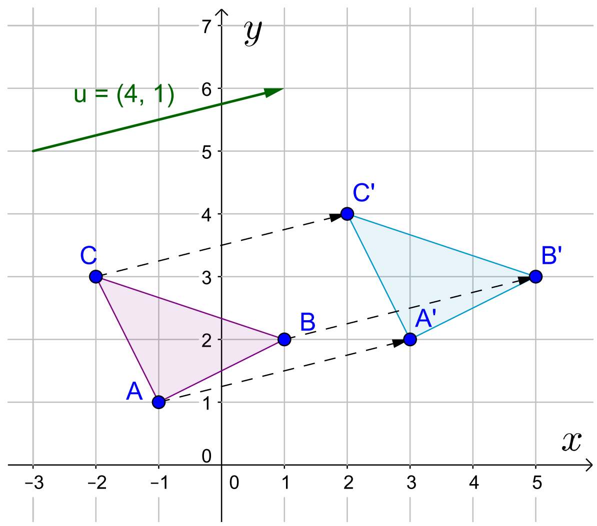

Figura 11: Traslación de vector $u = (4,1)$

Por tanto, una traslación de vector (a,b) traslada el punto (x,y) al punto $(x+a,y+b)$; es decir, si un punto es $A(x,y)$ entonces su homólogo mediante la traslación es $A'(x+a,y+b)$.

Rotaciones

La rotación es una transformación del plano determinada por mantener un punto fijo, llamado *centro*: C, y rotar el plano alrededor de este punto una cierta cantidad en una dirección específica. Ver Figura 12.

Esta cantidad se denomina *ángulo de rotación* α y, usualmente, se toma su medida en grados, teniendo en cuenta que si es positivo, se rota en sentido contrario a las manecillas del reloj, y si es negativo, en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

Es un movimiento de cambio de orientación de un cuerpo, de forma que, dado un punto cualquiera del mismo, éste permanece a una distancia constante del centro.

Sea $P(x,y)$ y $P'(x',y')$ su homólogo bajo una rotación de amplitud α con centro en el origen de coordenadas O. Se tiene:

$$x' = x\cos(\alpha) - y\text{sen}(\alpha) \text{ y } y' = x\text{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha)$$

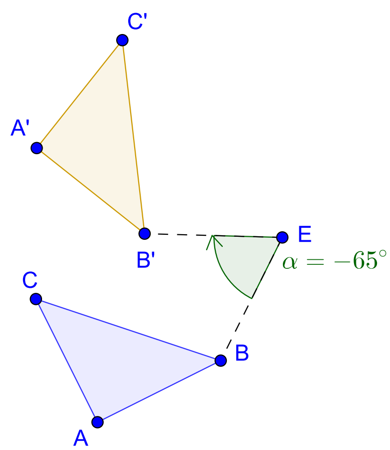

Figura 12: Rotación sobre el punto E con un ángulo $\alpha = -65^\circ$

2.2.2. Transformaciones isomórficas:

Las transformaciones isomórficas son cambios en una figura determinada que NO alteran la forma pero si el tamaño de ésta.

La palabra *isomorfía* tiene origen griego: **iso**, que significa igual, y **morfos**, que significa forma. Por lo tanto, esta palabra puede ser traducida como igual forma.

Existe proporcionalidad entre las dimensiones de la figura original y de la homóloga. Una transformación isomórfica es la homotecia.

Homotecia

Dado un punto O del plano y un número real $k \neq 0$, se llama homotecia de centro O y razón k, a la transformación que hace corresponder a cada punto A del plano, distinto de O, con otro punto A' alineado con O y con A, tal que:

$$\overline{OA'} = |k| \cdot \overline{OA}$$
$$|k| = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$k < 0$$

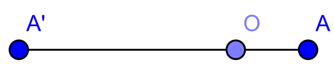

Figura 13: Homotecia de A con centro en O

$$\overline{OB'} = |k| \cdot \overline{OB}$$
$$|k| = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$$

$$k > 0$$

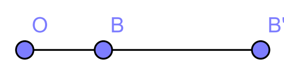

Figura 14: Homotecia de B con centro en O

Si la constante k es mayor que 0, la Homotecia se denomina directa, y en ella los puntos homotéticos están ambos al mismo lado del centro de la Homotecia. Ver Figura 15.

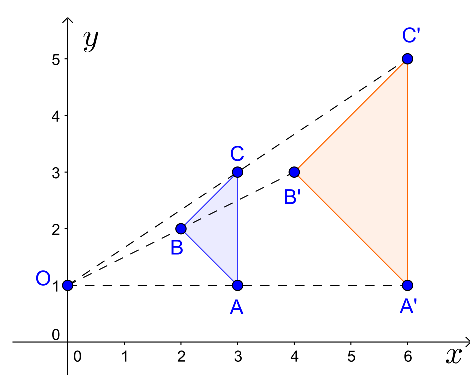

Figura 15: Homotecia con centro en $O(0,1)$ y $k = 2 > 0$

En este caso se puede afirmar que:

$$|k| = 2 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$$

y también:

$$|k| = 2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$$

Si la constante k es menor que 0, la Homotecia se denomina inversa, y en ella los puntos homotéticos están en lados diferentes con respecto al centro de la Homotecia. Ver Figura 16.

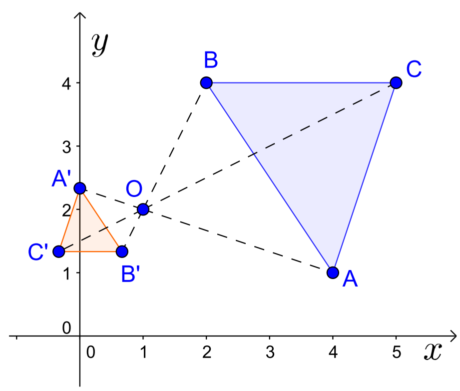

Figura 16: Homotecia con centro en $O(1,2)$ y $k = -\frac{1}{3} < 0$

En este caso se puede afirmar que:

$$|k| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$$

y también:

$$|k| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$$

Si el valor absoluto de la constante k es mayor que 1, la Homotecia produce un aumento de tamaño (la figura final es mayor que la original). Ver Figura 15.

Si el valor absoluto de la constante k es menor que 1, la Homotecia produce una disminución de tamaño (la figura final es menor que la original). Ver Figura 16.

3. Metodología de trabajo

La propuesta metodológica en el presente taller exhibe los siguientes elementos:

- Público meta: docentes de secundaria.
- Las personas responsables: son los facilitadores de las actividades.
- Requerimientos del taller:
  - Día 1: mesas amplias para trabajar en grupos, proyector, material concreto (sistemas de coordenadas, algunos dibujos impresos, folleto de teórico).
  - Día 2: laboratorio con el programa GeoGebra instalado, proyector.
  - Día 3: laboratorio con el programa GeoGebra instalado, proyector.
- Conocimientos básicos de los participantes:
  - Geometría analítica: circunferencia y su ecuación analítica, transformaciones en el plano (isométricas e isomórficas).
  - Elementos básicos de Geogebra.
- Cronograma de actividades:
  - 29 de noviembre: Actividades utilizando material concreto.
  - 30 de noviembre y 1 de diciembre: Actividades utilizando GeoGebra.
- Presentación de los contenidos teóricos: Los expositores brindaran un material que abarca los contenidos teóricos necesarios para la realización de las distintas actividades del taller.
- Actividades a ejecutar: durante el taller los expositores brindaran actividades que involucran el uso de material concreto, así como el manejo de software especializado (GeoGebra).

4. Actividades

A continuación se presenta la lista de actividades que se desean trabajar durante el taller.

4.1. Actividades utilizando material concreto

Para las siguientes actividades se hará uso del material concreto que les será facilitado por los talleristas. Si los participantes desean disponer de estos materiales para utilizarlos en su clase, puede solicitarlos vía correo.

Actividad 1

Jorge, Rebeca y María se encuentran en un gran parque, en el cual se ubica una antena para conexión wifi. Dicha red cuenta con un radio de cobertura de $50m$.

Si se sabe que, con relación a la locación de la antena:

- Jorge se ubica a $40m$ Oeste y $50m$ Norte.
- Rebeca se ubica a $30m$ Este y $40m$ Norte.
- María se ubica a $30m$ Oeste y $20m$ Sur.

a. Indique cual de los tres cuenta con cobertura de internet dada por dicha antena. Justifique su respuesta.

b. Si se traslada la torre $10m$ Oeste y $40m$ Norte pero con una cobertura de $40m$ de radio. ¿Quiénes tendrán ahora señal inalámbrica? Justifique

Actividad tomada de PAEM: Geometría Analítica. Elaborado por MSc. Rebeca Solís Ortega.

Actividad 2

Don Jacinto dentro de sus tierras tiene una naciente de agua cerca de El Carmen, en Guanacaste. Ésta se localiza a 5 km hacia el este y 3 km hacia el norte del cruce de dos caminos perpendiculares.

Don Jacinto desea construir una cerca circular cuyo centro sea la naciente y que la distancia máxima sea hasta su casa, la cual se ubica 1km hacia el este y 2 km hacia el sur de dicho cruce. Obténga la ecuación que representa a la cerca circular.

Actividad 3

Jorge, Rebeca y María se encuentran en un gran parque, en el cual se ubica una antena para conexión wifi. Dicha red cuenta con un radio de cobertura de $50m$.

Si se sabe que, con relación a la locación de la antena:

- Jorge se ubica a $30m$ Oeste y $50m$ Norte, y se traslada en línea recta a una locación ubicada a $20m$ al Oeste y $20m$ al Sur, desde su posición actual.
- Rebeca se ubica a $20m$ Este y $50m$ Norte, y se traslada en línea recta a una locación ubicada a $30m$ al Este y $100m$ al Sur, desde su posición actual.
- María se ubica a $40m$ Oeste y $30m$ Sur, y se traslada en línea recta a una locación ubicada a $20m$ al Este y $20m$ al Sur, desde su posición actual.

1. Indique cual de los tres cuenta con cobertura total parcial o nula durante su trayecto. Justifique su respuesta.
2. Si se traslada la torre $50m$ Oeste pero con una cobertura de $60m$ de radio. ¿Quiénes tendrán ahora señal inalámbrica durante su trayecto? Justifique

Actividad tomada de PAEM: Geometría Analítica. Elaborado por MSc. Rebeca Solís Ortega.

Actividad 4

Utilice un sistema cartesiano para realizar la siguiente actividad:

1. Carlos está localizado en la posición 20 m Este y 30 m Norte $(20,30)$, mientras que Juan está en la posición 40 Oeste y 50 m Norte $(-40,50)$. Si ambos están en los extremos de una circunferencia, es posible encontrar su ecuación?

2. Suponga que Carlos vive en la posición 60 m Este y 40 m Norte $(60,40)$ y Juan en la posición 60 m Oeste $(-60,0)$. Si el autobús del pueblo pasa muy cerca de las casas de ambos y la ruta es casi una recta, el autobús atravesará la circunferencia mencionada anteriormente?, Si lo hace, en cuantas ocasiones sería?

Actividad 5

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(7,-5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x-9y-10=0$ y $2x-5y+2=0$.

Actividad 6

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el eje x y que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(4,6)$.

Actividad 7

El dueño de un gran terreno, ha decidido dividirlo en cuatro lotes de igual tamaño. Tomando una fuente que se ubica en el centro del mismo como punto de referencia.

Si en el terreno 1 se encuentra la casa modelo, indique las áreas y grafique las casas modelos de los otros tres lotes si se sabe que:

- El comprador del terreno 3 quiere una casa igual a la del modelo, sólo que trasladada $18m$ hacia el Sur de esta, para poder colocarla en su lote.
- El comprador del terreno 2 quiere una casa igual a la del modelo, pero reflejada con base a la línea divisoria del lote con el fin de ubicarla en su terreno.
- El comprador del terreno 4 quiere una casa igual a la del modelo, pero rotada con base a la fuente con un ángulo de 180 y trasladada $3m$ hacia el Oeste.
- Además si el comprador del terreno 4 quiere realizar una casa de muñecas para su hija, que se asemeje a la casa modelo, pero con una razón de homotecia de $k = 0{,}4m$, con base en el punto $(18,3)$ Grafique dicha casa.

Actividad tomada de PAEM: Geometría Analítica. Elaborado por MSc. Rebeca Solís Ortega.

4.2. Actividades utilizando el software GeoGebra

Actividad 8

Reflexión: Simetría axial

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Guárdelo con el nombre: “reflexion”.
3. Dibuje los puntos con coordenadas $A(1,1), B(2,1), C(3,3), D(4,3), E(4,4), F(3.5,4), G(4,5), H(4,7)$.
4. Dibuje el polígono $ABCDEFGH$.
5. Dibuje dos puntos con coordenadas $I(4,0)$ y $J(4,8)$
6. Dibuje una recta con ecuación que pasa por los puntos I, J.

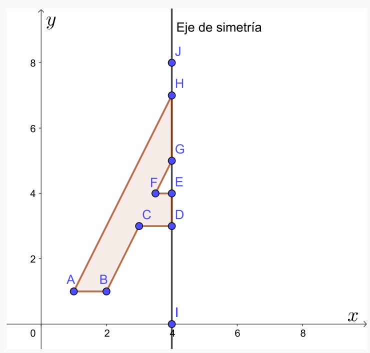

Figura 17: polígono $ABCDEFGH$ y recta $x = 4$

7. ¿Cuál letra del abecedario se formará si se realiza una simetría del polígono con respecto a la recta?
8. Seleccione la herramienta de simetría axial:

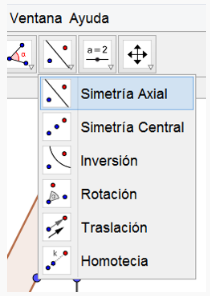

Figura 18: Herramienta de simetría axial

Luego seleccione el polígono y la recta (en ese orden).

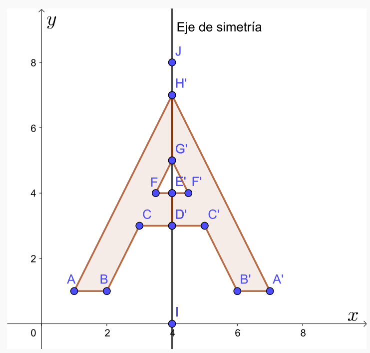

Figura 19: Reflexión del polígono $ABCDEFGH$ por medio de la recta $x = 4$

9. Utilizando la información de la construcción que usted realizó en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:
   - ¿Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ tienen la misma longitud?
   - ¿Cuáles otros pares de segmentos mantienen su longitud después de realizar la reflexión?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle DCB$?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle B'C'D'$?
   - ¿Que sucede con las medidas de los ángulos anteriores?
   - ¿Cuáles son las distancias desde los puntos A, B, C, D, E, F, G Y H hasta el eje de simetría?

- ¿Son las distancias, calculadas en el punto anterior, iguales a las distancias desde los puntos $A', B', C', D', E', F', G'$ Y H' hasta el eje de simetría?
- ¿Cuál es el ángulo formado entre el segmento $\overline{BB'}$ y el eje de simetría?
- ¿Cuál es el ángulo formado entre el segmento $\overline{CC'}$ y el eje de simetría?

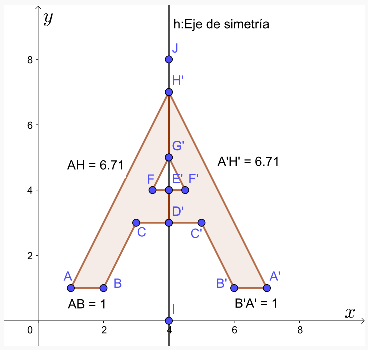

Figura 20: Medida del segmento $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

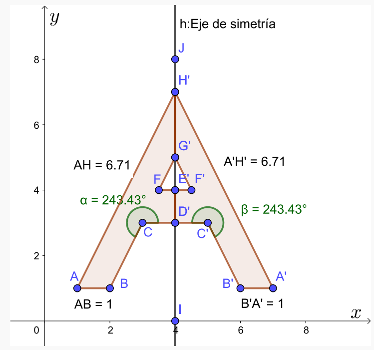

Figura 21: Medida del ángulo $\measuredangle DCB$ y $\measuredangle B'C'D'$

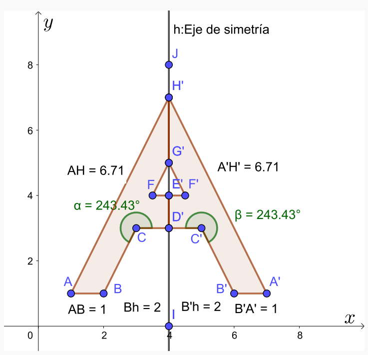

Figura 22: Distancia del punto B y B' hasta el eje de simetría

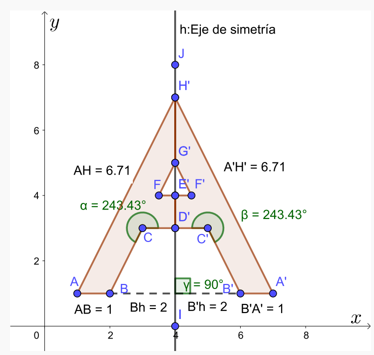

Figura 23: Ángulo entre el segmento $\overline{BB'}$ y el eje de simetría

10. ¿Cuáles otras letras del abecedario tienen simetría axial?
11. ¿Existen números que tienen simetría axial?
12. Modifique la recta moviendo los puntos I y J. Observe como se modifica el polígono reflejado por medio de dicha recta y responsa las siguientes preguntas:

- ¿Qué sucede con las longitudes de los segmentos del polígono original al hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?
- ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos entre los segmentos del polígono original al hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?
- ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos entre cada uno de los siguientes segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$, $\overline{GG'}$, $\overline{HH'}$ y el eje de simetría?

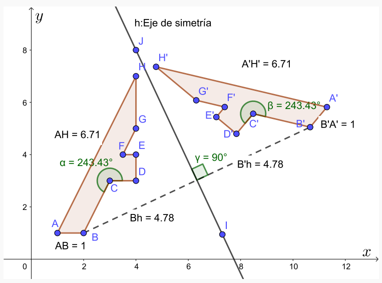

Figura 24: Cambio en el eje de simetría

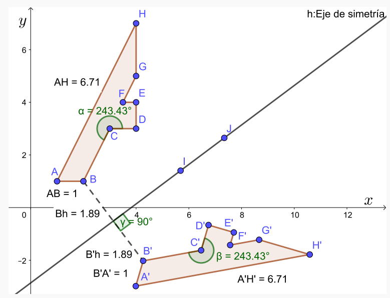

Figura 25: Cambio en el eje de simetría

13. Modifique el polígono moviendo algunos de sus puntos. Observe como se modifica el polígono reflejado por medio del eje de simetría y responsa las siguientes preguntas:
    - ¿Qué sucede con las longitudes de los segmentos del polígono original al hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?
    - ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos entre los segmentos del polígono original al hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?
    - ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos entre cada uno de los siguientes segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$, $\overline{GG'}$, $\overline{HH'}$ y el eje de simetría?

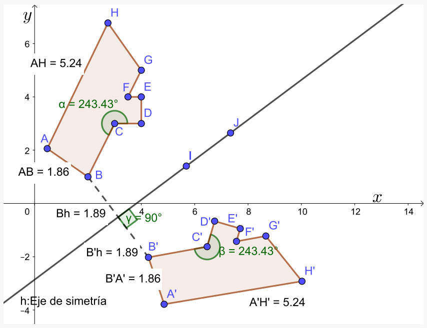

Figura 26: Cambio en algunos puntos del polígono *ABCDEFGH*

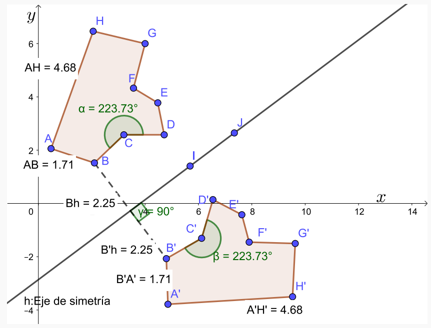

Figura 27: Cambio en algunos puntos del polígono *ABCDEFGH*

Actividad 9

Reflexión: Simetría central

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Guárdelo con el nombre: “reflexionCentral”.
3. Dibuje los puntos con coordenadas $A(1,1), B(3,2), C(3,3), D(2,3)$.
4. Dibuje el polígono $ABCD$.
5. Dibuje un punto con coordenadas $E(4,4)$, este será el punto de simetría.

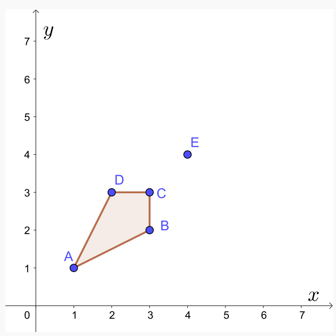

Figura 28: polígono $ABCD$ y punto $E(4,4)$

6. Seleccione la herramienta de simetría central:

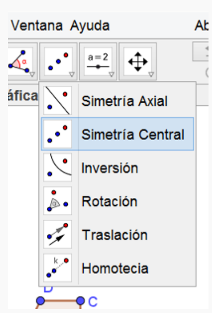

Figura 29: Herramienta de simetría central

Luego seleccione el polígono y el punto E (en ese orden).

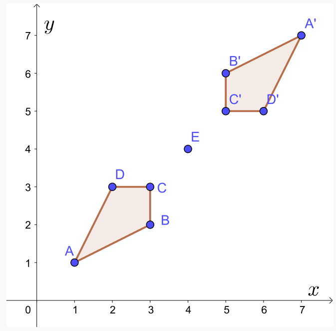

Figura 30: Reflexión del polígono $ABCD$ por medio del punto $E(4,4)$

7. Utilizando la información de la construcción que usted realizó en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:
   - ¿Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ tienen la misma longitud?
   - ¿Cuáles otros pares de segmentos mantienen su longitud después de realizar la reflexión?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle BAD$?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle B'A'D'$?
   - ¿Que sucede con las medidas de los ángulos anteriores?
   - ¿Cuáles son las distancias desde los puntos A, B, C Y D hasta el punto de simetría?
   - ¿Son las distancias, calculadas en el punto anterior, iguales a las distancias desde los puntos A', B', C' Y D' hasta el punto de simetría?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle DED'$?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle CEC'$?

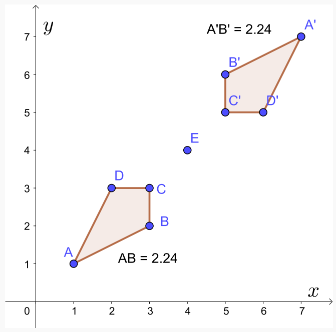

Figura 31: Medida del segmento $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

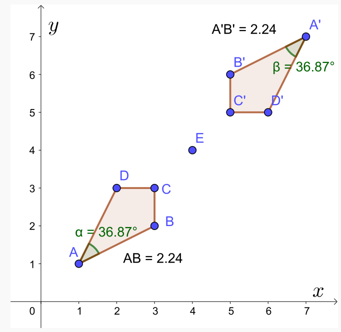

Figura 32: Medida del ángulo $\measuredangle BAD$ y $\measuredangle B'A'D'$

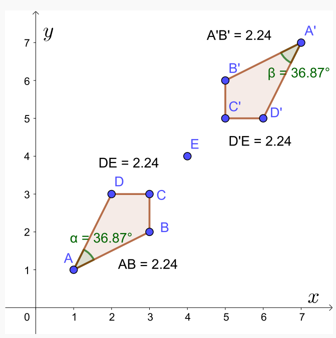

Figura 33: Distancia de los puntos D y D' al punto de simetría

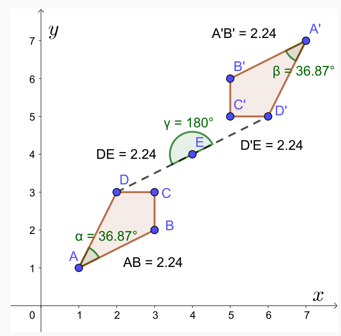

Figura 34: Medida del ángulo $\measuredangle DED'$

8. Trace los siguientes segmentos: $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$. ¿Cuál es el punto en común de estos segmentos?
9. Mueva el punto E. Observe como se modifica el polígono reflejado por medio de dicho punto.
10. Modifique el polígono moviendo algunos de sus puntos. Observe como se modifica el polígono reflejado por medio del punto de simetría.
11. Responsa las siguientes preguntas:
    - ¿Qué sucede con las longitudes de los segmentos del polígono original al

hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?

- ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos entre los segmentos del polígono original al hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?
- ¿Qué sucede con los segmentos trazados en el punto 8?

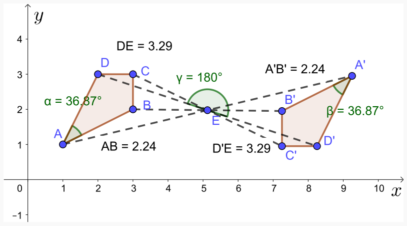

Figura 35: Cambio en el punto de simetría

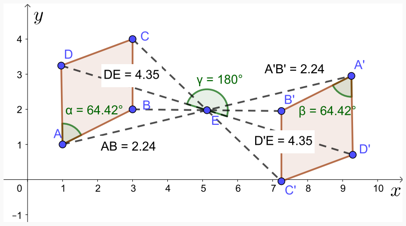

Figura 36: Cambio en algunos puntos del polígono *ABCD*

Actividad 10

Traslación

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Guárdelo con el nombre: "traslacion".
3. Dibuje una circunferencia con centro y radio de su preferencia.
4. Cree un vector, utilice longitud y dirección de su preferencia.
5. Seleccione la herramienta de traslación:

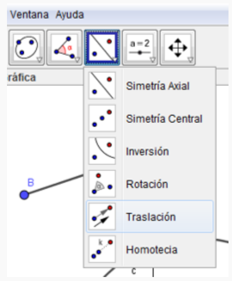

Figura 37: Herramienta de traslación

Luego seleccione la circunferencia y el vector (en ese orden).

6. También debe seleccionar el centro del círculo y el vector (en ese orden).

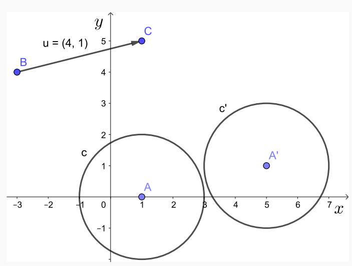

Figura 38: Traslación de la circunferencia **c** a la circunferencia **c**$'$ por medio del vector $u = (4, 1)$

7. Utilizando la información de la construcción que usted realizó en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:
   - ¿Cuál es el radio de la circunferencia **c**?
   - ¿El radio de la circunferencia **c**$'$ es el mismo radio de la circunferencia **c**?

- ¿Cuál es el centro de la circunferencia **c**?
- ¿Cuál es el centro de la circunferencia **c**′?
- ¿El centro de la circunferencia **c**′ es el mismo centro de la circunferencia **c**?

8. Modifique el vector moviendo sus puntos inicial y final, Observe como se modifica la circunferencia trasladada.
9. ¿Qué sucede con el radio de la circunferencia **c**′ al modificar el vector de traslación?

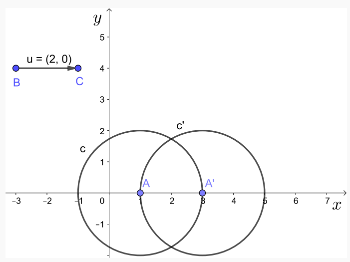

Figura 39: Traslación por medio del vector $u = (2,0)$

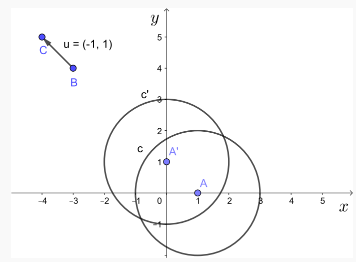

Figura 40: Traslación por medio del vector $u = (-1,1)$

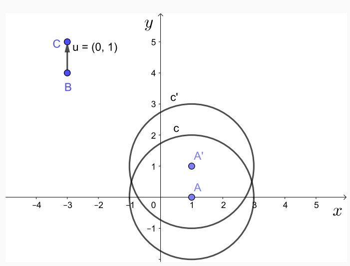

Figura 41: Traslación por medio del vector $u = (0,1)$

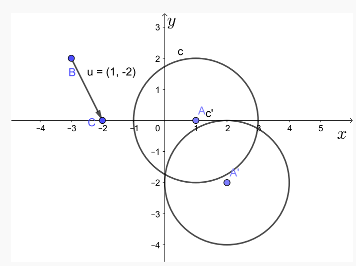

Figura 42: Traslación por medio del vector $u = (1,-2)$

Actividad 11

Rotación

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Guárdelo con el nombre: “rotacion”.
3. Dibuje los puntos con coordenadas $A(0,0), B(-4,0), C(-1,-1)$.
4. Dibuje el polígono ABC.

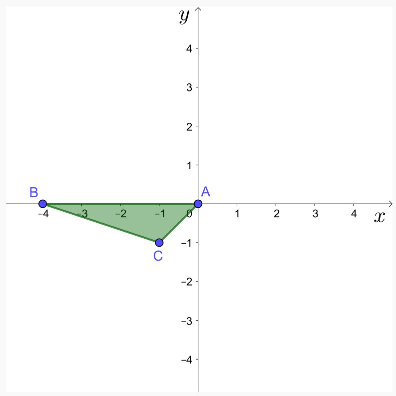

Figura 43: polígono ABC

5. Utilizando solo la herramienta de rotación:

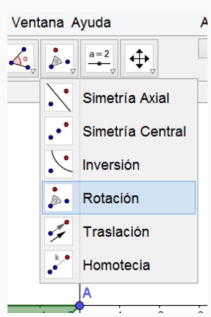

Figura 44: Herramienta de rotación

Realice la siguiente figura a partir del polígono ABC:

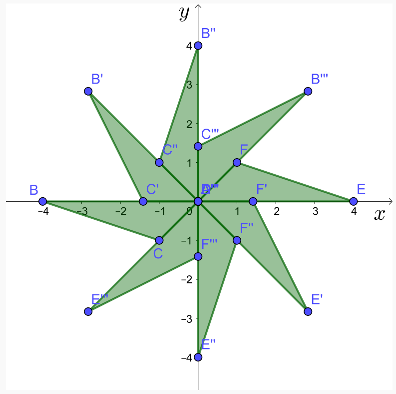

Figura 45: Rotación del polígono ABC sobre el punto $A(0,0)$

6. Utilizando la información de la construcción que usted realizó en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:
   - ¿Los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ tienen la misma longitud?
   - ¿Cuáles otros pares de segmentos mantienen su longitud después de realizar la rotación?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle CBA$?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle C'B'A'$?
   - ¿Que sucede con las medidas de los ángulos del polígono transformado con respecto al polígono sin transformar?
   - ¿Cuáles son las distancias desde los puntos A, B y C hasta el punto central?
   - ¿Son las distancias, calculadas en el punto anterior, iguales a las distancias desde los puntos A', B' y C' hasta el punto central?

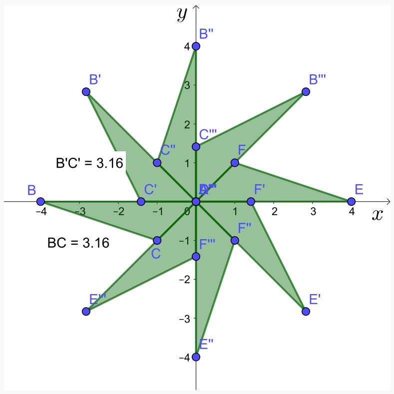

Figura 46: Medida del segmento $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

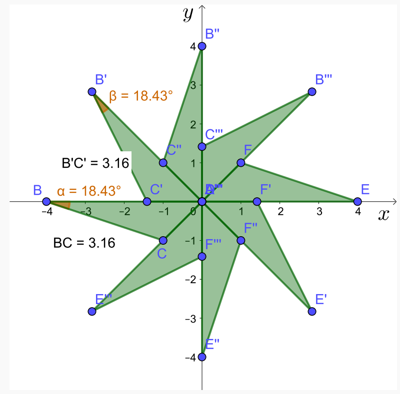

Figura 47: Medida del ángulo $\measuredangle BAD$ y $\measuredangle B'A'D'$

7. Mueva los puntos A, B y C. Observe como se modifica el polígono rotado sobre el punto A.
8. Responsa las siguientes preguntas:
   - ¿Qué sucede con las longitudes de los segmentos del polígono original al hacer la rotación: se mantienen, aumentan o disminuyen?
   - ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos entre los segmentos del polígono original al hacer la reflexión: se mantienen, aumentan o disminuyen?
   - ¿Qué sucede con las distancias de cada punto del polígono original hasta el centro de rotación, comparadas con las distancias de los vértices de los polígonos resultantes de la rotación hasta el centro de rotación?

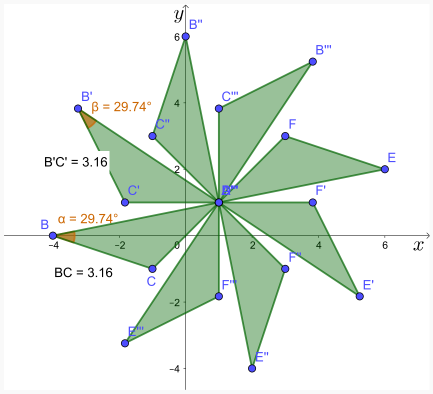

Figura 48: Cambio en el punto de rotación

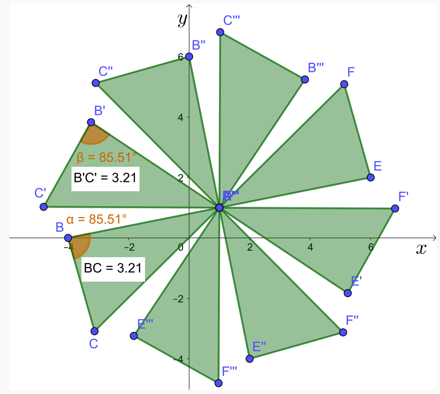

Figura 49: Cambio en algunos puntos del polígono *ABC*

Actividad 12

Homotecia

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Guárdelo con el nombre: “homotecia”.
3. Dibuje los puntos con coordenadas $A(1,1), B(3,1), C(2,2)$.
4. Dibuje el polígono ABC.
5. Dibuje el punto $D(0,0)$, este será el centro de homotecia.

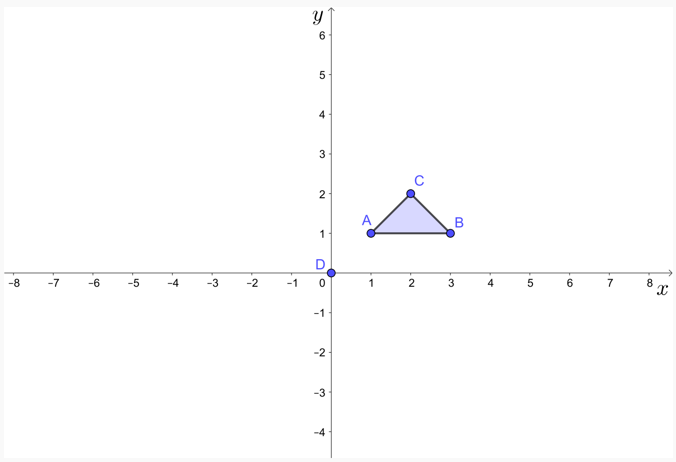

Figura 50: polígono ABC y centro de homotecia $D(0,0)$

6. Seleccione la herramienta de homotecia:

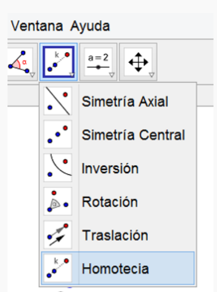

Figura 51: Herramienta de homotecia

Luego seleccione el polígono y el centro de homotecia (en ese orden). Se abrirá una ventana que solicita el factor de escala, para factor de escala vamos a escribir k.

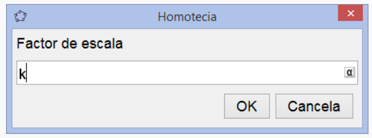

Figura 52: Factor de escala para la homotecia

Luego seleccione "OK". Este valor no lo tenemos entonces el programa creará un deslizador con el cual podremos variar la escala cuando queramos.

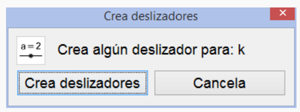

Figura 53: Deslizador para el factor de escala de la homotecia

Seleccione "Crear deslizadores".

7. Moviendo el punto en el deslizador, modifique el factor de escala para valores de $k > 1$, $k = 1$, $0 < k < 1$, $-1 < k < 0$, $k = -1$ y $k < -1$.

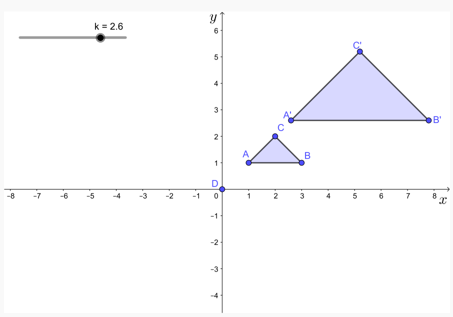

Figura 54: Homotecia del polígono ABC con un factor mayor que 1

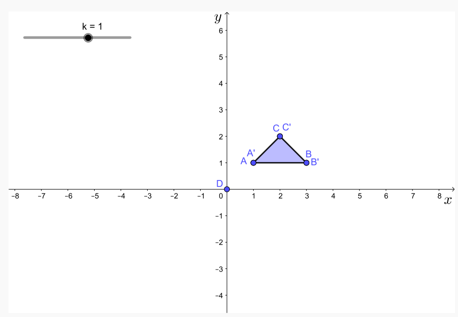

Figura 55: Homotecia del polígono ABC con un factor igual a 1

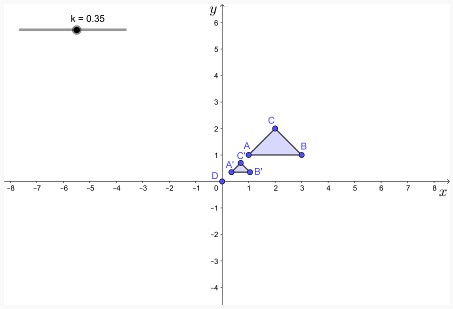

Figura 56: Homotecia del polígono *ABC* con un factor entre 0 y 1

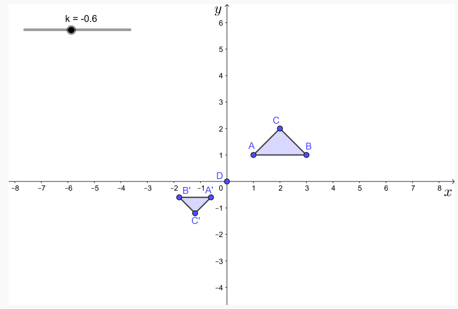

Figura 57: Homotecia del polígono *ABC* con un factor entre -1 y 0

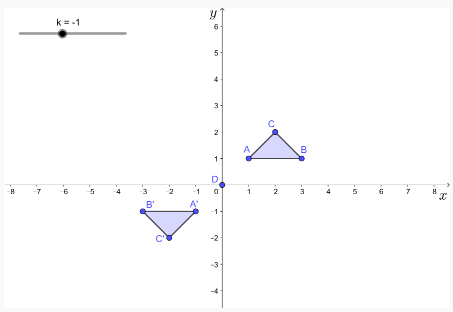

Figura 58: Homotecia del polígono *ABC* con un factor igual a -1

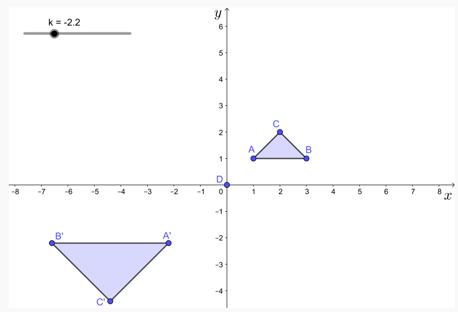

Figura 59: Homotecia del polígono *ABC* con un factor menor que -1

8. Utilizando la información de la construcción que usted realizó en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:
   - ¿Los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ tienen la misma longitud?
   - ¿Para qué valores del factor de escala, los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ tienen la misma longitud?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle BAC$?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle B'A'C'$?
   - ¿Que sucede con las medidas de los ángulos del polígono transformado con respecto al polígono sin transformar?

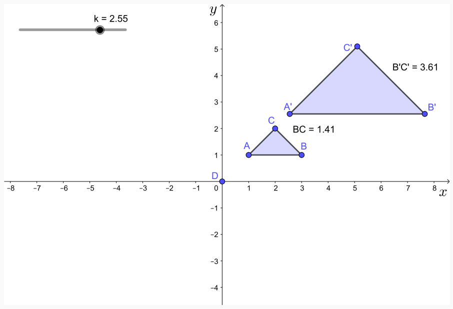

Figura 60: Medida del segmento $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$

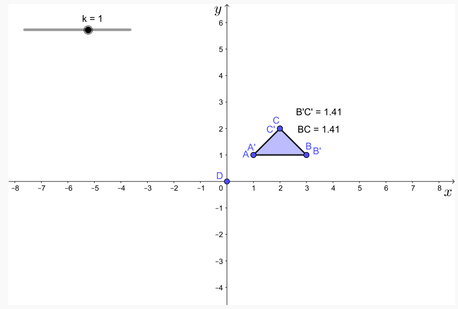

Figura 61: Medida del segmento $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$

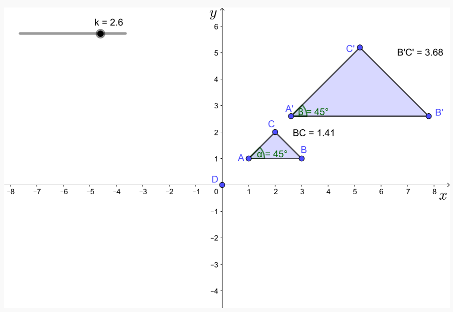

Figura 62: Medida del ángulo $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle B'A'C'$

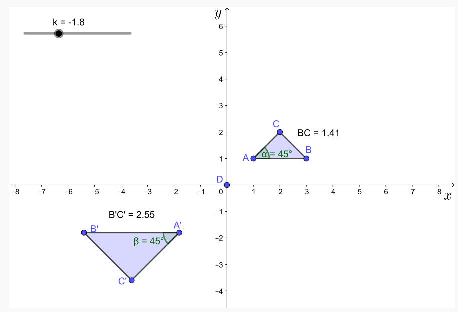

Figura 63: Medida del ángulo $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle B'A'C'$

9. Si en la exploración anterior no ha calculado las siguientes medidas, calcúlelas:

$\overline{AB}$	$\overline{A'B'}$	$\overline{AD}$	$\overline{A'D}$
$\overline{BC}$	$\overline{B'C'}$	$\overline{BD}$	$\overline{B'D}$
$\overline{CA}$	$\overline{C'A'}$	$\overline{CD}$	$\overline{C'D}$

10. Oculte los textos que muestran las medidas de los lados, para ello debe desmarcar los círculos en azul de cada texto en la “Vista Algebraica”.

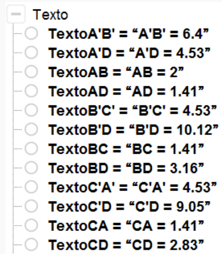

Figura 64: Ocultar textos

11. Utilizando la "Entrada" en GeoGebra, calcule las siguientes razones: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}, \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}, \frac{\overline{A'D}}{\overline{AD}}, \frac{\overline{B'D}}{\overline{BD}}, \frac{\overline{C'D}}{\overline{CD}}$

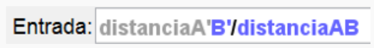

Figura 65: Edición de la razón $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

12. ¿Cuál es la relación entre las razones calculadas en el punto anterior y el valor del factor de escala: k?

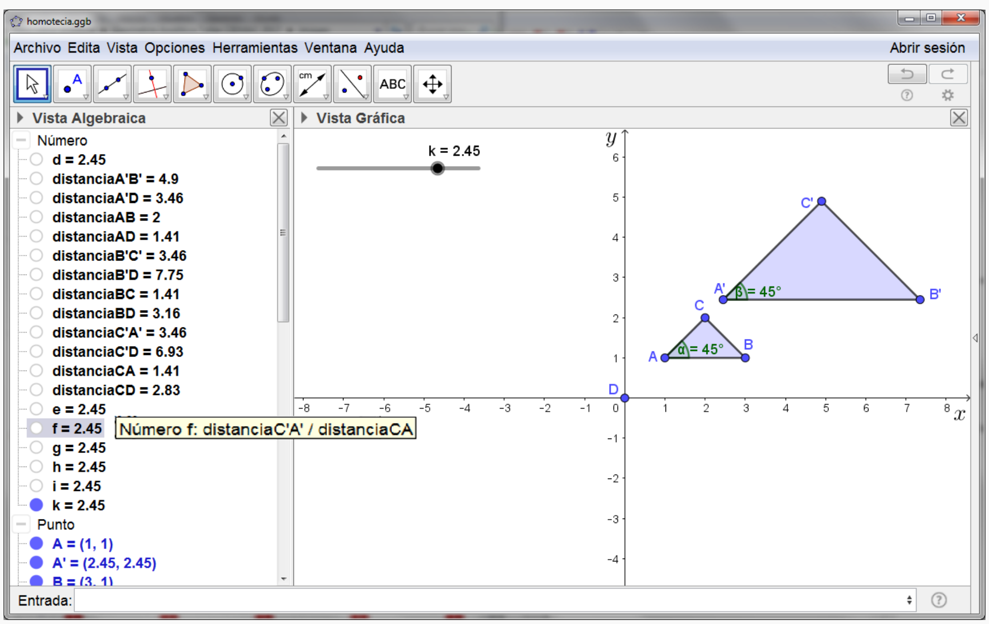

Figura 66: Relación entre el factor de escala: k y la razón $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$

13. Mueva el punto en el deslizador, modifique el factor de escala k y observe las razones calculadas en el punto 11.
14. ¿Qué relación hay entre el factor de escala y las razones del punto 11?

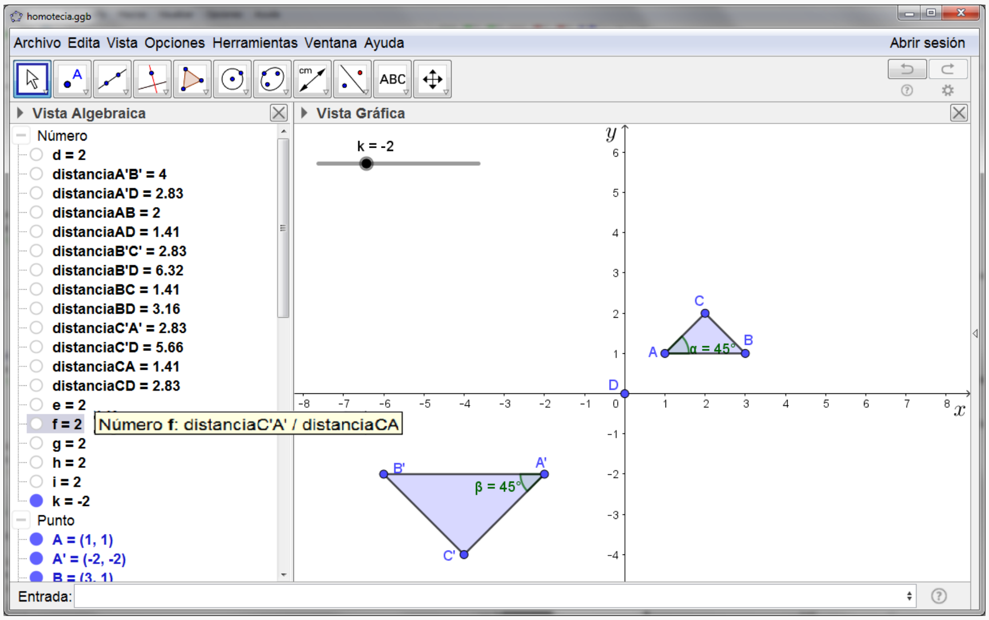

Figura 67: Relación entre el factor de escala: k y la razón $\dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$

5. Referencias bibliográficas

MEP. (2012) *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque en Resolución de problemas. Geometría.* Costa Rica.

Ariagno, C. Iturbe, A. (s.f.) *Transformaciones Geométricas en el plano.* Estados Unidos 750, Río Negro, Argentina: Universidad Nacional de Rio Negro.