
La utilización del software R para resolver ejercicios de matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Bach. Francisco José Villalobos Madrigal
Estudiante Universidad Nacional, Costa Rica
fjvmkiko@gmail.com

M.Sc. José Andrey Zamora Araya
Universidad Nacional, Costa Rica
andreyzamora@gmail.com

Resumen: El taller pretende ser una propuesta para implementar el entorno de desarrollo integrado Rstudio y el lenguaje de programación R, en los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, como ayuda para la verificación de problemas. El taller está conformado de dos partes, la primera desarrolla la utilización básica del entorno y la segunda la implementación de ejemplos en Rstudio. El taller se desarrolla con ayuda de un laboratorio de informática, donde primeramente se brinda una exposición magistral acerca del manejo de las herramientas a utilizar y luego se proponen ejercicios para trabajar con los entornos. Es importante que los participantes posean nociones básicas de los temas desarrollados.

Palabras clave: R, RStudio, Matrices, Sistemas de ecuaciones lineales, Álgebra lineal.

Abstract: The workshop is a proposal to implement the integrated development environment Rstudio for environment and a programming language R, in the topics of matrices and systems of linear equations, as an aid to the verification of problems. The workshop consists of two parts, the first develops the basic use of the environment and the second the implementation of examples in Rstudio. The workshop is developed in a computer lab by means of magistral class and management of the tools, in addition it is important that the participants must have basic notions of the developed topics.

Keywords: R, RStudio, Matrices, systems of linear equations, Linear algebra.

1. Introducción

El desarrollo de la tecnología sigue un ritmo acelerado y su inclusión en las prácticas educativas no solo es beneficioso sino necesario. Como lo mencionan los programas de matemática del ministerio de educación (2012) “Estas tecnologías no solo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción

estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje”. (p.37)

Por ende, con el afán de contribuir a la inserción de la tecnología en la práctica educativa, es que se presenta el taller a cerca de cómo tratar los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales por medio de la utilización de *R* y *Rstudio*. Para el desarrollo de esta propuesta se realizó una revisión bibliográfica bibliográfica y la selección de ejercicios y problemas apropiados para ser discutidos por medio de los entornos virtuales; y en particular que sean útiles para ser trabajados, como complemento, para un curso algebra lineal, en los temas propuestos.

Como fruto de este proceso se espera que el taller propuesto proporcione, por una parte una alternativa del uso de las tecnologías en la enseñanza de contenidos matemáticos, que típicamente se evalúan en un curso de álgebra lineal y por otra presentar ejercicios y problemas que permitan una discusión crítica en clase sobre los conceptos que abarcan.

Otra ventaja radica en que, si bien es cierto hay otras herramientas computacionales para efectuar los ejercicios, *R* y *RStudio* son de acceso abierto y gratuito; lo que los hace ideales para su implementación no sólo en temas de nivel universitario, sino en tópicos que usualmente se abarcan en otros niveles de enseñanza.

2. Aspectos teóricos

2.1. Antecedentes

Entre las investigaciones que relacionan el uso de las tecnologías de información y comunicación (TIC's) en la práctica educativa se encuentran: las teorías clásicas del aprendizaje (Valdez, 2012; Cabrero & Llorente, 2015); la utilización de tecnologías en estudiantes para suplir las necesidades de la sociedad del conocimiento (Rivero y Mendoza, 2005); la teoría cognitivista para lograr un aprendizaje colaborativo por medio de las TIC's (Calzadilla, 2002); la adecuada utilización de las TIC's en la enseñanza (Valverde, Garrido

& Fernández, 2010). Todos estos trabajos se desarrollaron por medio de metodologías cualitativas que enfocan el problema de estudio, en la utilidad de las herramientas tecnológicas como complemento a las metodologías tradicionales desarrolladas en las aulas.

Asímismo, también existen ejemplos de la utilización del entorno *R* en educación superior y secundaria; entre los cuales se encuentran propuestas para su uso como herramienta para desarrollar los contenidos de un curso, como es el caso de la asignatura de métodos numéricos (Mora, 2016); otros están más enfocados en cómo aprender a utilizar el entorno para luego aplicarlo a contextos específicos sean estos a nivel de educación secundaria o terciaria (Cuevas, Sanabria & Núñez, 2015 y Zamora & Arroyo, 2016).

El desarrollo de estos trabajos que presentan un uso del entorno *R* como apoyo a la docencia, evidencian una vez más como el uso herramientas puede ayudar a comprender de mejor manera los conceptos y temáticas abordadas en diversos contextos de enseñanza.

2.2. La importancia de las TIC's en Educación superior

La incorporación de las TIC's en la educación, no es algo nuevo, diversas herramientas tecnológicas han sido utilizadas en colegios y universidades para solventar las necesidades que existen en la sociedad (Ibáñez, 2004); además las TIC's se encuentran presentes en muchos ámbitos laborales de nuestro tiempos (Romaní, 2009); por ello es de gran importancia la implementación de herramientas que permitan a los estudiantes facilitar diversas tareas en su quehacer profesional; por ello la educación basada en incorporar las TIC's deben promover habilidades en los estudiantes que permitan adaptarse a los cambios (Rivero y Mendoza, 2005).

Por otro lado las TIC's son una forma de innovar en los procesos de enseñanza, este proceso de innovar se logra cuando se producen cambios de forma positiva (Salinas, 2004), además Rivero y Mendoza (2005) mencionan “Las experiencias de enseñanza desarrolladas con las TIC han demostrado ser altamente motivantes para los alumnos y eficaces en el logro de

ciertos aprendizajes comparada con los procesos tradicionales de enseñanza, basados en la tecnología impresa”. (p.317)

2.3. *R* y *RStudio*

R y *Rstudio* son los entornos libres que se implementan en el taller, donde se trabajan de manera complementaria, como una forma de facilitar los procesos que se requieren para su uso. De esta manera, podemos decir que *RStudio* es un entorno que facilita el trabajo de programación y edición de códigos en *R*, además es una herramienta que se utiliza en muchas investigaciones por su capacidad de análisis estadístico y es compatible para diferentes sistemas operativos como Windows, Linux y MacOS. Entre las opciones y complementos que posee *Rstudio*, que facilitan el manejo de *R* están: la codificación con sintaxis de *R*, importación de archivos y funciones, presentación de informes y creación de gráficos, entre otras (*RStudio*, 2016).

Por otro lado, el uso de la herramienta *RStudio* para impartir lecciones relacionadas con el tema de matrices y determinantes, puede ser visto tanto por profesores como estudiantes como un apoyo para la verificación de problemas y ejercicios o bien para obtener la solución a la interrogante planteada. En algunos temas, *R* es una gran ayuda para proporcionar una solución detallada de los ejercicios y esto lo hace especialmente útil para la verificación de ejercicios.

3. *Metodología de trabajo*

El taller se compone de dos partes: la primera etapa introductoria con una duración aproximada de 30 minutos, que consiste en explicar cómo funciona y se utilizan los principales menús y ventanas de trabajo de *Rstudio*; cómo por ejemplo guardar códigos utilizados, instalación de paquetes, exportar archivos y la creación de gráficos.

La segunda parte está constituida por el desarrollo de ejemplos en temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, donde se estudian de manera más detallada cuáles son y

como se utilizan las funciones que permiten resolver los ejercicios propuestos, la duración de esta etapa es de 50 minutos.

El taller se expone de manera magistral, no obstante, se espera que los participantes experimenten y se familiaricen con el entorno, además de externar sus inquietudes que serán atendidas durante el desarrollo del taller. También se espera una retroalimentación por parte de los asistentes con el fin de mejorar en la implementación de este tipo de talleres.

3.1. Población meta

El taller está dirigido principalmente a docentes y estudiantes de matemática o áreas afines como ingeniería, economía, estadística entre otros, que poseean conocimientos básicos de los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

3.2. Recursos a utilizar

- Laboratorio de informática, con computadoras que posean una velocidad de conexión adecuada.
- Computadoras con los programas Excel, R versión 3.4.1 o superior y RStudio 1.0.143 en sistema operativo Windows.
- Video beam.
- Laboratorio adaptado con acceso a internet.

4. Guías de trabajo y actividades

4.1. Primera parte: Introducción al uso básico de RStudio

RStudio se conforma de cuatro ventanas de trabajo, como se muestra en la figura 1.

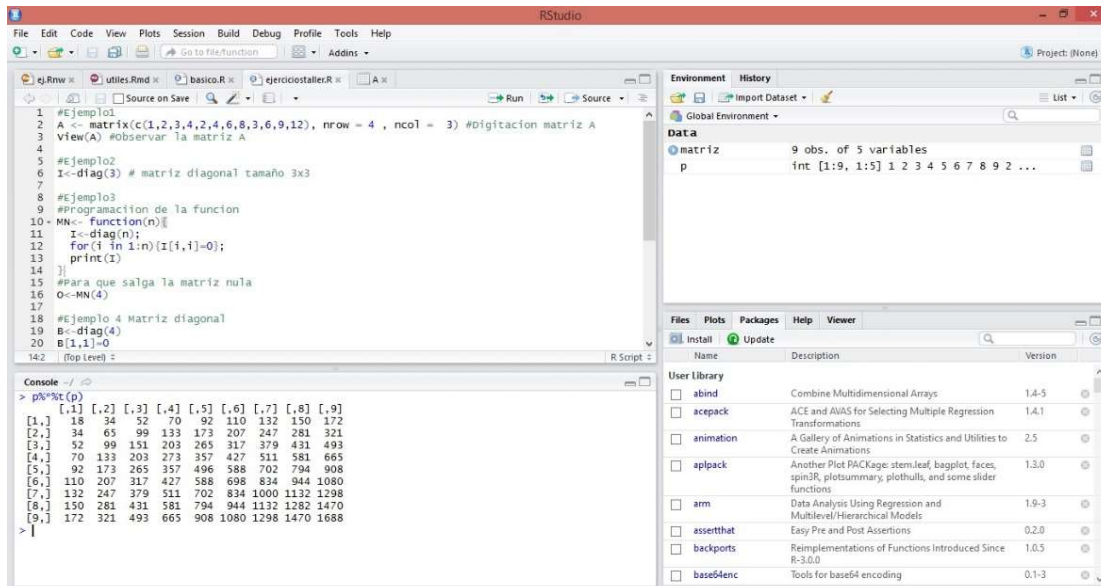


Figura 1. Ventana principal del complemento RStudio.

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

En la consola (console) que se encuentra ubicado en la parte inferior izquierda, se digitan los códigos que desean utilizar, sin embargo en esta ventana no guarda los códigos y resultados al cerrar el programa.

En la ventana superior izquierda se ubica una especie de espacio de trabajo, donde se pueden escribir instrucciones y códigos que pueden ser guardados en diferentes opciones de archivo, como por ejemplo un R script o también se pueden generar documentos con formatos que se utilizan frecuentemente como .doc o .pdf.

En la ventana superior derecha es un tipo de ventana de trabajo donde se puede importar datos, ver un histórico de los comandos ejecutados y observar los objetos que han sido creados por el programa. Por ejemplo se puede crear un objeto con el nombre “mi_base” que resulte de la importación de un archivo de excel y otro objeto nombrado como “P” que podría ser una matriz de valores creada de la consola y ambos, una vez ejecutadas las instrucciones apropiadas, apareceran en esta ventana.

La ventana inferior derecha sirve como administrador de paquetes, gráficos y archivos. Además de tener una opción para solicitar ayuda sobre funciones que utiliza R. Es importante mencionar que esta distribución de ventanas es la que aparece por default, y que puede ser reconfigurada si así se desea.

4.2. Ejemplo de implementación

Ejemplo 1. Uno de las instrucciones más utilizadas para construir gráficas en R es el la función `plot()`. Para saber más acerca de esta función y cómo utilizarla, se puede buscar en la ventana de ayuda (help), como se muestra la imagen.

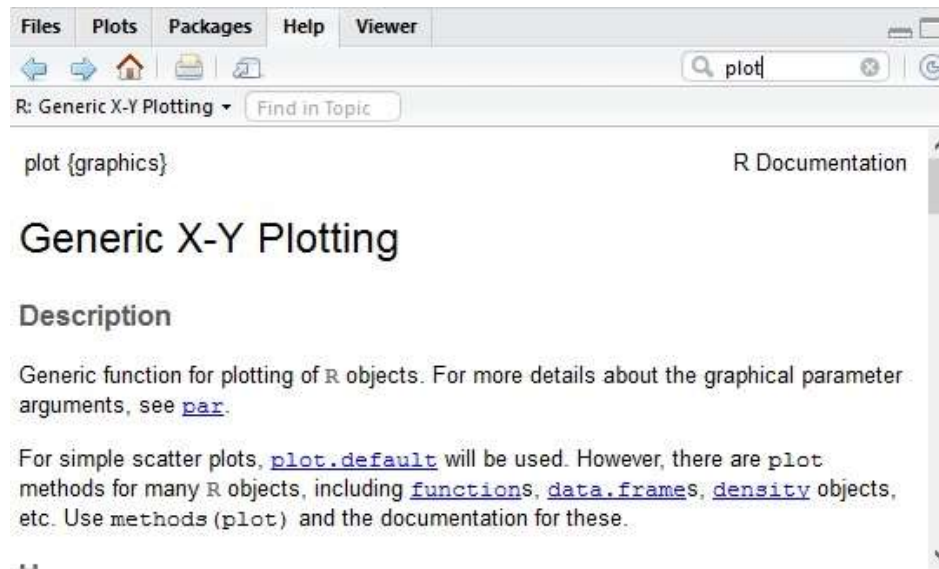


Figura 2. Ejemplo para utilizar la Ventana de ayuda.
Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

Una de las manera de utilizar esta función es creando dos vectores que representaran los valores que se desean graficar. Una forma de ingresar los vectores es la siguiente

$$x <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$y < -c(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100)$$

Estos se digitan en la consola, aunque si se desea guardar las instrucciones es mejor escribirlas en el espacio de trabajo ubicada en la parte superior izquierda. Una vez digitados y ejecutados se puede observar en la parte superior derecha los datos que corresponden a los valores de x y y .

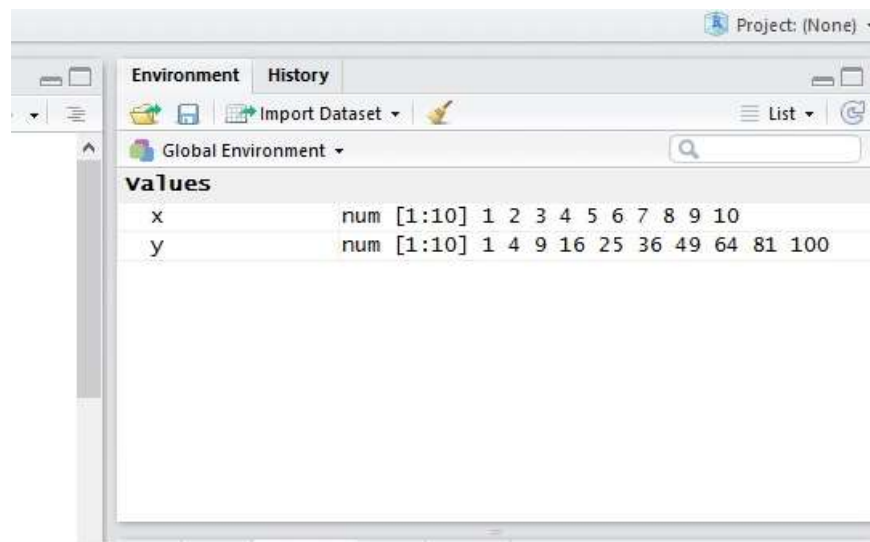


Figura 3. Ejemplos de vectores ingresados en RStudio.

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

Al ejecutar el comando $plot(x; y)$ en el espacio de trabajo, se puede observar la gráfica al lado inferior derecho, esta gráfica puede ser guardada en muchos formatos diferentes, aunque por default se guarda en formato PDF.

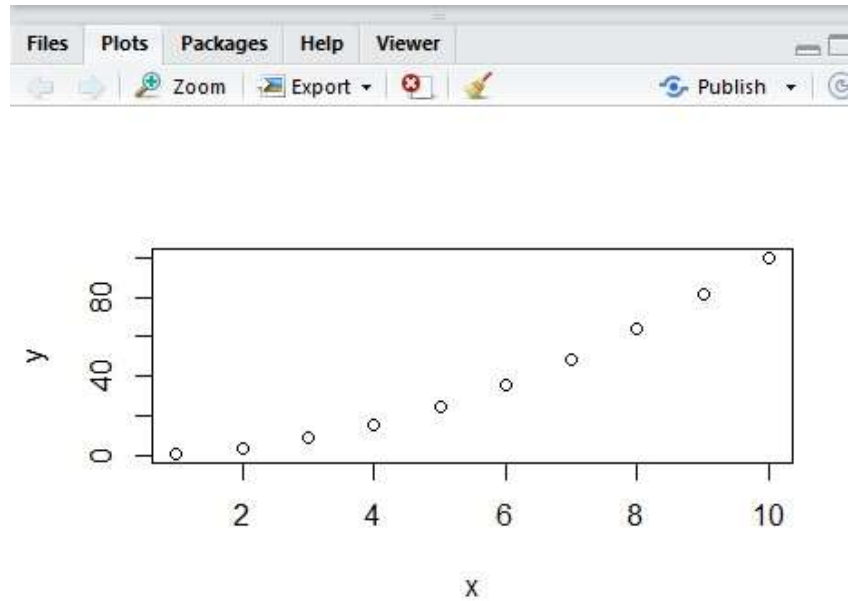


Figura 4. Gráfica resultante del ejemplo.

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

Para guardar las instrucciones utilizadas en el ejemplo, una opción es crear un archivo R script y se copian los comandos utilizados y no los resultados obtenidos o simplemente oprimir el ícono de guardar que se encuentra en la parte superior izquierda de la pantalla. En caso de querer agregar notas o comentarios en el archivo script se debe agregar el símbolo “#” como se muestra en la figura 5.



```
1 x<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
2 y<-c(1,4,9,16,25,36,49,64,81,100)
3 plot(x,y) # se puede escribir de este modo
4
5 # así se pone texto
6 |
```

Figura 5. Ejemplo de utilizar la herramienta scrip en RStudio.

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

Ejemplo 2: Ahora instalemos el paquete *matlib* en *RStudio*, este paquete está diseñado para la enseñanza de temas relacionados con el álgebra lineal y estadística multivariante. Primero se da la opción de instalar paquete en la parte inferior derecha y posteriormente se agrega el nombre del paquete.

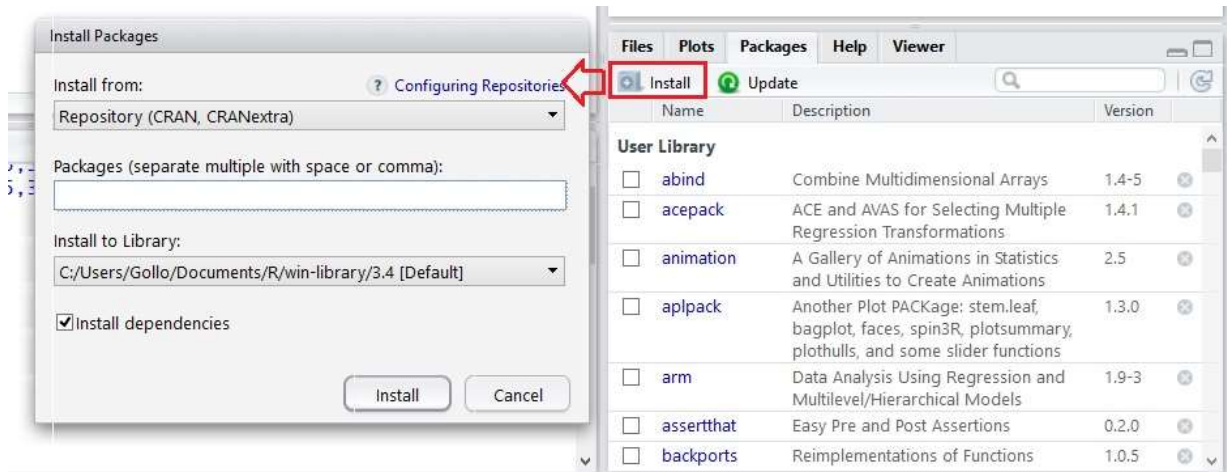


Figura 6. Instalación de paquetes en RStudio.

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

Es importante tener marcada la opción de instalar dependencias. Para saber más sobre la descripción de los paquetes de R se recomienda ingresar a la siguiente página web: https://cran.r-project.org/web/packages/available_packages_by_name.html

En la segunda parte del taller se verá el uso de este paquete para resolver ejercicios.

4.3. Segunda parte: Utilizar RStudio como herramienta para resolver problemas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Matrices en RStudio

El comando que permite introducir matrices en RStudio es `matrix()`. Para construir una matriz B escribimos:

```
B <- -matrix(c()); ncol =; nrow =)
```

Donde $c()$ corresponde al vector de las entradas de la matriz A separadas por comas y siguiendo el orden de las columnas, además $ncol$ corresponde al número de columnas y $nrow$ el número de filas.

Ejemplo 3: Considerando la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

La digitación de las entradas de la matriz A en RStudio es

```
A <- matrix(c(1,2,3,4,2,4,6,8,3,6,9,12), nrow = 4, ncol = 3)
```

Si se escribe $nrow=4$ no es necesario escribir $ncol=3$, pues al ser 12 las entradas R automáticamente asignará un 3 al número de columnas.

Para visualizar la matriz, se digita el comando $View(A)$.

Ejemplo 4: Introducir la matriz identidad de tamaño 4x4 en RStudio.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz identidad del ejemplo se podría utilizar las instrucciones antes vistas para crear matrices, sin embargo, en RStudio existe un comando que crea este tipo de matrices. El comando es $diag(n)$, donde n es el tamaño de la matriz. Para este ejemplo se digita $I <- diag(4)$.

Ejemplo 5: Construir una matriz B en Rstudio con las siguientes entradas.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Primero se acude al comando de la matriz identidad y luego se modifica las entradas de la diagonal.

```
B < -diag(4)
B[1,1] = 0
B[2,2] = 2
B[3,3] = 3
B[4,4] = 4
View(B)
```

Ejemplo 6: Encontrar la matriz inversa de L, donde L se define como:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Primero instalamos el paquete matlib (ver ejemplo 2) y luego lo cargamos con ayuda de la siguiente instrucción:

```
library(matlib)
```

Posteriormente procedemos a construir la matriz L con ayuda del comando matrix.

```
L < -matrix(c(1,-1,2,3,-1,7,-4,5,-3),ncol = 3,nrow = 3)
```

Finalmente usamos la instrucción Inverse del paquete matlib para determinar la inversa de la matriz L.

Inverse(L, verbose = TRUE, fractions = TRUE)

Este comando desglosa un procedimiento para encontrar la matriz inversa.

4.4. *Matrices de cualquier tamaño en RStudio*

Ejemplo 7: Suponga que se quiere ingresar una matriz con muchas entradas como la matriz P que se presenta a continuación.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & 0 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 5 & 11 \\ 6 & 12 & 18 & 5 & 13 \\ 7 & 14 & 21 & 5 & 17 \\ 8 & 16 & 24 & 5 & 19 \\ 9 & 18 & 27 & 5 & 23 \end{pmatrix}$$

Si utilizamos el comando *matrix()*, el proceso se vuelve un poco tedioso por tener muchas entradas la matriz P, además se puede cometer errores al ingresar la matriz al programa sobre todo si no se está muy familiarizado con R.

Una alternativa para ingresar la matriz P a Rstudio, podría ser la siguiente:

1. Se crea un archivo de excel, ingresando los valores de la matriz P.

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	0	2	
2	2	4	6	0	3	
3	3	6	9	0	5	
4	4	8	12	0	7	
5	5	10	15	5	11	
6	6	12	18	5	13	
7	7	14	21	5	17	
8	8	16	24	5	19	
9	9	18	27	5	23	

Figura 7. Creación de archivo Excel con los datos de la matriz P.

Fuente: Elaboración propia a partir del software Excel.

2. Se guarda el archivo en formato csv separado por comas.

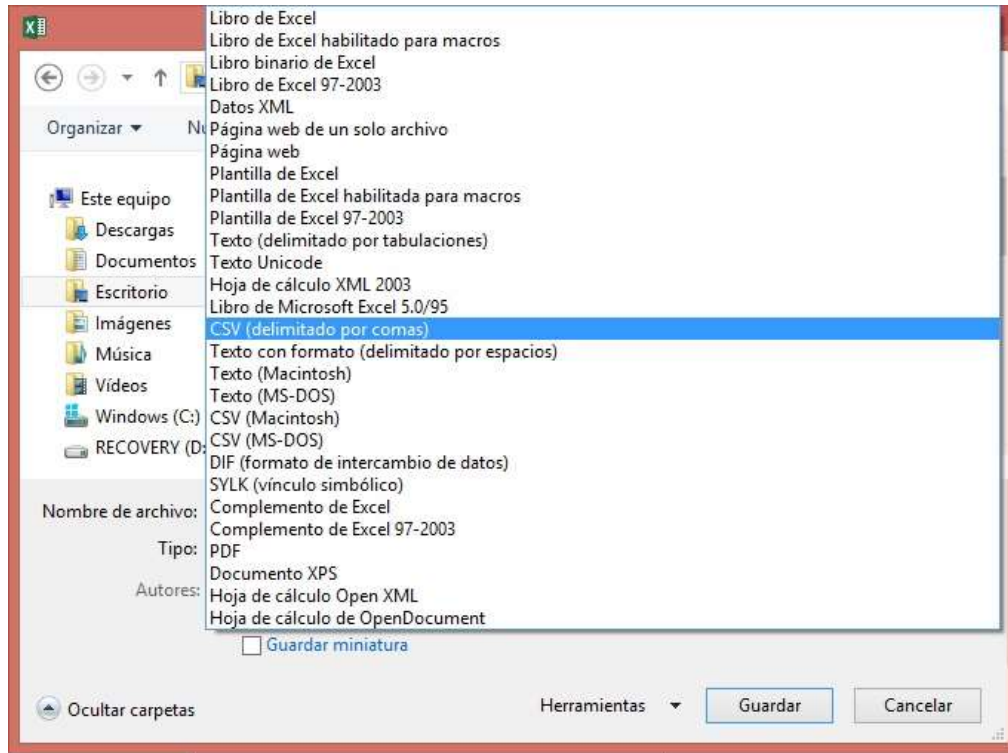


Figura 8: Formato para guardar el archivo de trabajo.

Fuente: Elaborado a partir del software Excel

3. Se importa el archivo creado a RStudio, es importante desmarcar la opción de etiqueta para la primera fila, además la matriz a importar se debe visualizar como se muestra la figura.

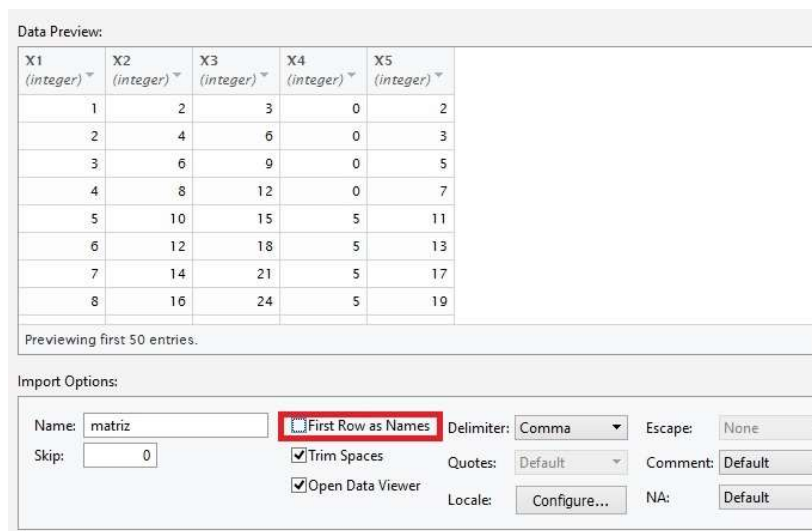


Figura 9: Importar archivo a RStudio.

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio.

4. Por último se ingresa el comando $P < -as.matrix(nombreadearchivo)$

Este procedimiento, sobre todo para matrices muy grandes es más simple que utilizar el comando `matrix()`.

4.5. *Análisis y solución de sistemas de ecuaciones lineales con el paquete matlib en RStudio*

Analice el siguiente sistema de ecuación lineal

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ -2x - 7y = -5 \end{cases}$$

Recordar que las ecuaciones de la forma $ax + by = c$, corresponden a la ecuación de una recta, si las rectas se intersecan en un punto entonces el sistema posee solución única. Para analizar el sistema de ecuación lineal de forma gráfica en RStudio se requiere el paquete `matlib`.

Uno de los comandos que posee el paquete `matlib` es `plotEqn`. Se carga el paquete y se digitan las siguientes instrucciones:

```
library(matlib)
```

```
A < -matrix(c(1,-2,5,-7),ncol = 2,nrow = 2)
```

```
b < -c(7,-5)
```

```
plotEqn(A,b)
```

Dando como resultado la siguiente gráfica (figura 10).

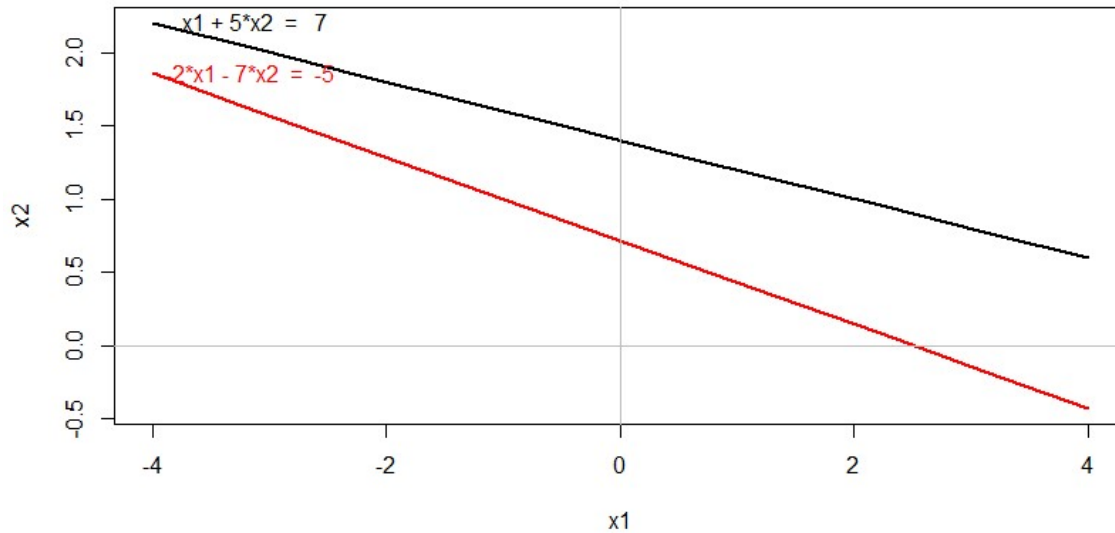


Figura 10: Gráfica del ejemplo

Fuente: Elaboración propia basado en el entorno de trabajo RStudio..

Si se desea es posible modificar los valores del eje x, por ejemplo para graficar valores del eje x entre -10 y 10 digitamos las siguientes instrucciones:

```
library(matlib)
```

```
A <- -matrix(c(1, -2.5, -7), ncol = 2, nrow = 2)
```

```
b <- -c(7, -5)
```

```
plotEqn(A, b, xlim = c(-10, 10))
```

Ahora, si lo que se quiere es encontrar la solución del sistema, basta con ingresar el comando `Solve(A, b)`

4.6. *Eliminación Gaussiana*

Ejemplo 8: Realizar la reducción Gaussiana para el siguiente sistema de ecuación lineal

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \\ 3x + 6y - 5z = 1 \end{cases}$$

Solución

Se construye el sistema en forma matricial mediante las siguientes instrucciones:

```
B <- -matrix(c(1,2,3, 1,4,6, 2, -3, -5), ncols = 3, nrows = 3)
```

```
x <- -c(9,0,1)
```

Luego se carga el paquete `matlib` y se utiliza la función `gaussianElimination` para resolver el ejercicio.

```
library(matlib)
```

```
gaussianElimination(B, x, fractions = TRUE, verbose = TRUE)
```

4.7. *Resumen de operaciones básicas de matrices*

Cuando se trabaja con matrices es usual tener que realizar ciertas operaciones con ellas, entre las más comunes están la suma y la multiplicación; además en ocasiones se requiere determinar la transpuesta de una matriz. Si creamos dos matrices A y B en RStudio, para realizar las operaciones descritas anteriormente se digitan las siguientes instrucciones:

Suma de matrices $A + B$

Producto de matrices $A \% * \% B$

Transpuesta de matrices $t(A)$

4.8. Actividades propuestas para los participantes

1.) Investigue para qué sirve el comando $det()$ de RStudio.

2.) Considere las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilice el procedimiento de importar base de datos en RStudio, para calcular

$$A \cdot B - AB^t$$

3.) Considere $\hat{\beta} = (X^t \cdot X)^{-1} - X^t \cdot Y$. Determine la matriz $\hat{\beta}$; tomado de (Wackerly, Scheaffer, Muñoz, y cols., 2010, pag. 161) :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Recomendaciones

A pesar de las ventajas de utilizar R y RStudio en la enseñanza de los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, a la hora de empezar a utilizar el paquete es necesario contar con sesiones de práctica para familiarizarse con el entorno. Por ello y dependiendo de la audiencia, es necesario tomar en cuenta el tiempo en esta etapa inicial.

Aunque la resolución de ejercicios prácticos, donde además se puede proporcionar la solución detallada, como es el caso de la inversa de una matriz, se recomienda tratar con anterioridad los aspectos teóricos y conceptuales de los temas para asegurar un uso adecuado del entorno.

El uso del paquete *matlib* de R, proporciona ciertas ventajas para la solución de ejercicios prácticos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, como lo son visualizar gráficamente las soluciones para algunos ejercicios, pero se necesita que los estudiantes dispongan del recurso tecnológico (laboratorio o computadora personal) para poder desarrollar las actividades. Como esto no siempre es posible en todos los contextos, el uso del entorno debe realizarse teniendo en cuenta estas eventualidades, además se pueden asignar trabajos extra clase para que los estudiantes desarrollen prácticas o verifiquen resultados.

6. Referencias bibliográficas

Arce, A., Castillo, W., y González, J. (2014). Algebra lineal. Costa Rica:Editorial UCR.

Cabero, J. & Cejudo, Llorente, M. (2015). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): escenarios formativos y teorías del aprendizaje. *Revista Lasallista de Investigación*, 12(2), 186-193. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/695/69542291019.pdf>

Calderón, S., Núñez, P., Di Laccio, J., Iannelli, L., y Gil, S. (2015). Aulas-laboratorios de bajo costo, usando tic. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 12(1), 212-226. <http://hdl.handle.net/10498/16934>

Calzadilla, M. E. (2002). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de educación*, 1(10), 1-10. Recuperado de <http://ciiesregion8.com.ar/portal/wp-content/uploads/2016/04/Calzadilla-aprendizaje-colaborativo1.pdf>

Cuevas Acosta, J., Sanabria Brenes, G., & Núñez Vanegas, F. (2015). Programación con R y enseñanza de la matemática en educación secundaria. *VII Congreso Internacional Sobre La Enseñanza De La Matemática Asistida Por Computadora*.

Ibáñez, J. S. (2004). Innovación docente y uso de las tic en la enseñanza universitaria. *Revista Universidad y Sociedad del conocimiento*, 1(1).
url<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=78011256006>.

Lipschutz, S. (1973). *Algebra lineal. teoría y 600 problemas resueltos*.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor.

Palomo, R., Ruiz, J., y Sánchez, J. (2006). *Las tic como agentes de innovación educativa*. Sevilla: Junta de Andalucía, Consejería de Educación, Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado.

Riveros, V. S., & Mendoza, M. I. (2005). Bases teóricas para el uso de las TIC en Educación. *Encuentro educacional*, 12(3). Recuperado de <http://200.74.222.178/index.php/encuentro/article/view/879>

Romaní, J. C. C. (2009). El concepto de tecnologías de la información. benchmarking sobre las definiciones de las tic en la sociedad del conocimiento. *Zer-Revista de Estudios de Comunicación*, 14(27), 295-318. Tomado de www.ehu.es/ojs/index.php/Zer/article/view/2636/2184

RStudio. (2016). *Rstudio ide features*. Boston.

<https://www.rstudio.com/products/rstudio/features/>

- Tellería, M. B. (2004). Educación y nuevas tecnologías: educación a distancia y educación virtual. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, 9, 209-222.
- Valverde Berrocoso, J., Garrido Arroyo, M. D. C., & Fernández Sánchez, R. (2010). Enseñar y aprender con tecnologías: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 11(1). Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/2010/201014897009/>
- Valdez, J. (2012). Teorías educativas y su relación con las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC). XVII Congreso Internacional Contaduría administración e información.
- Wackerly, D. D. M., Scheaffer, W., Muñoz, R. L. R., y cols. (2010). Estadística matemática con aplicaciones. Mexico:Cengage Learning.
- Zamora, J. & Arroyo, J. (2016). Edición de textos dinámicos con LATEX y R. V Encuentro sobre didáctica de la estadística, la probabilidad y el análisis de datos.