



## Proyecto de investigación: Graficación por transformaciones

Propuesta didáctica para el Trazado de Gráficas de Funciones con énfasis en el método de transformaciones, con el apoyo de tecnologías de información y comunicación.

Lic. Alonso Aguilar Camacho

Colegio de San Luis Gonzaga, Costa Rica  
[alonso.edika@gmail.com](mailto:alonso.edika@gmail.com)

**Resumen:** Éste es un proyecto de investigación que pretende crear una propuesta pedagógica, justificada, comprobada, y con el apoyo de Tecnologías de Información y Comunicación. Se lleva a cabo en la Universidad de Costa Rica, con la finalidad de mejorar significativamente el proceso de enseñanza y el aprendizaje de la Graficación de Funciones en cursos básicos de la matemática universitaria de las diferentes instituciones estatales de educación superior.

**Palabras clave:** Funciones, graficación, transformaciones, TIC, pensamiento complejo.

### 1. Planteamiento

La enseñanza de la matemática en Costa Rica ha generado bajos resultados en bachillerato que se ven reflejados, por ejemplo, en un bajo nivel mostrado en pruebas PISA (Programme for International Student Assessment) y en el DiMa (Examen Diagnóstica) de la Universidad de Costa Rica, la cual sólo el 15% de los estudiantes aprueba (ver Figura 1.1).

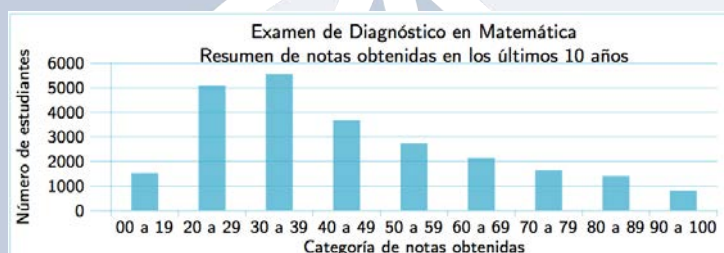


Figura 1.1: Distribución de notas del examen de diagnóstico en Matemáticas, Universidad de Costa Rica 2004-2013 (Ruiz, 2013)

Paralelo a ello se ha venido dando una transición a las nuevas tecnologías al punto que, según el INEC (INEC, 2015), al 2014, el 52,3% de los hogares contaban con alguna computadora y el 55% tenía acceso a Internet y es más común observar Sistemas Tutores Inteligentes, particularmente útiles en educación a distancia, portales de aprendizaje como Educ@tico, RELPE y CEDUCAR. Por tales razones la política costarricense impulsa la creación de capacidades y competencias digitales (Ministerio de Ciencia y Tecnología, 2011).

Según Peña y Peña (Peña & Peña, 2007), el uso de las TIC (tecnologías de la información y comunicación) en educación se asocia al progreso de sociedades de mayor desarrollo pues, según Rosado (Rosado, 2011), permite el desarrollo de metodologías alternativas para el aprendizaje ante problemáticas como ubicación geográfica, calidad de docencia y tiempo disponible, aunque debe valorarse desventajas como un acceso desigual a la tecnología, fallas técnicas imprevistas que puedan interrumpir la clase, el desfavorecimiento del contacto interpersonal entre estudiantes y estudiantes y docente, constante desactualización debido al avance de las TIC y otras.

Es así que tanto en Costa Rica como en otras latitudes son más frecuentes los esfuerzos dirigidos al trabajo con TIC. Ya en el 2011, en el marco del VII CIEMAC, se expusieron proyectos como el de Víquez y Arroyo (Viquez & Arroyo, 2011), quienes tratan una serie de guías metodológicas en las cuales trabajan como proyecto de tesis, apoyadas en el software GeoGebra y la modelación matemática para la introducción del tema de Funciones Reales de Variable Real. Su elección de utilizar GeoGebra para tal fin y no otro software, se debe a la valoración positiva del programa, por parte tanto de un grupo de expertos en tecnología como de docentes en matemática (ver Figura 1.2). Estos también coinciden en que las TIC *“propician ambientes de aprendizaje dinámicos, que permiten la visualización, la manipulación con ello, la exploración y por consiguiente el descubrimiento, lo que aleja del panorama tradicional”* (Viquez & Arroyo, 2011).

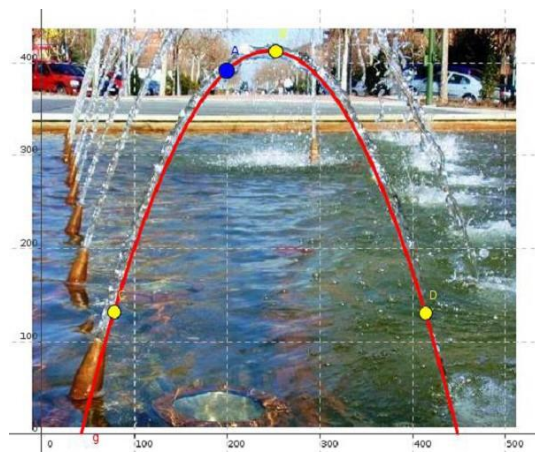


Figura 1.2: Modelación de la función cuadrática en GeoGebra.

De manera análoga, Sarmiento et al. (Sarmiento, Torres, & Macías, 2011) en Colombia, desarrollaron un software educativo llamado RYDUX (ver Figura 1.3) como apoyo en el proceso enseñanza-aprendizaje del método de reducción en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Éste permite la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas por el método de reducción. Además, incluye módulos que contemplan temas previos como: cálculo del máximo común divisor, mínimo común múltiplo, suma y resta de fracciones y descomposición de números como productos de sus factores primos.

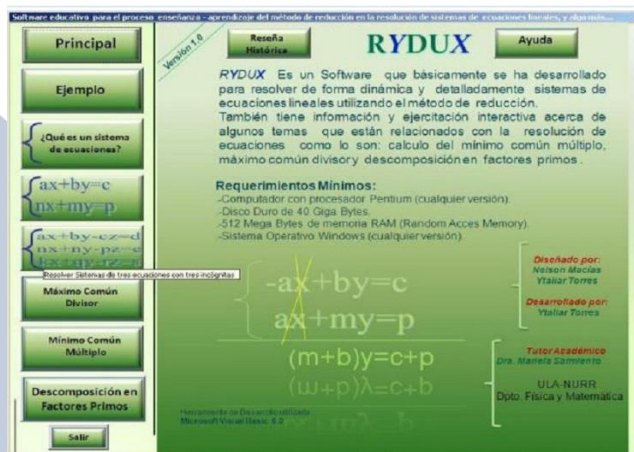


Figura 1.3: Resolución de sistemas de ecuaciones en RYDUX.

RYDUX puede revelar la solución de los ejercicios de manera instantánea o mostrar el procedimiento de resolución, sin embargo, trata de inducir al usuario a que intente resolverlos antes de conocer la solución final (ver Figura 1.4).

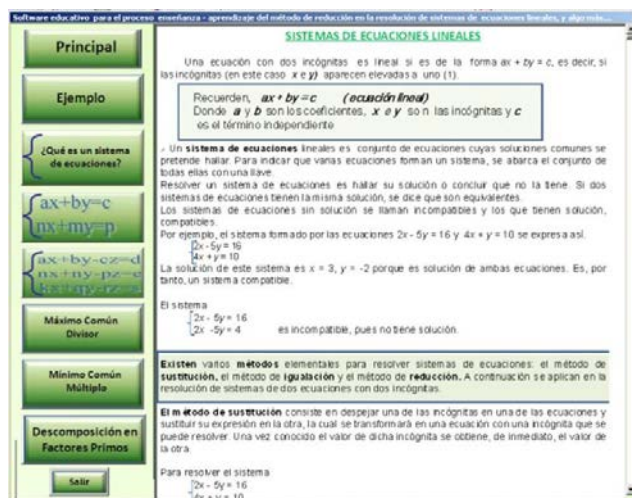


Figura 1.4: Sistemas de ecuaciones lineales en RYDUX.

## 2. Objetivos del proyecto

### General

Desarrollar y valorar una unidad didáctica utilizando tecnologías de información y comunicación (TIC), con software libre, que sirva de apoyo para la enseñanza del tema de Graficación de Funciones con énfasis en el método de transformación de funciones, en diferentes cursos básicos de Matemáticas de las universidades estatales.

### Específicos

- Determinar insumos computacionales pertinentes para su implementación en la enseñanza de Graficación de Funciones con énfasis en el método de transformaciones.
- Identificar, de forma teórica, los procesos didácticos que pudieran propiciar un mejor aprendizaje de los conocimientos inherentes a la Graficación de Funciones con énfasis en el método de transformaciones.
- Diseñar e implementar una unidad didáctica con elementos teóricos y prácticos de Graficación de Funciones, con la intermediación de tecnologías de información y comunicación.
- Describir la actitud de los estudiantes de un grupo experimental ante el tema de Graficación de Funciones con el apoyo de TIC, respecto a uno de control.
- Cuantificar la eficiencia alcanzada de la unidad didáctica, respecto al nivel de adquisición de conceptos y procesos por parte de los estudiantes.

Para poder alcanzar estos objetivos la investigación se estaría aplicando en el curso de Precálculo MA-0001 de la Universidad de Costa Rica, eso sí respondiendo al objetivo del curso:

*“Trazar mediante transformaciones (verticales, horizontales, reflexiones, simetrías, compresiones y elongaciones) gráficas de criterios que involucran una función: lineal, cuadrática, cúbica, valor absoluto, racional, raíz cuadrada, exponencial, logarítmica ...”*

Como se aprecia, dicho objetivo excluye la graficación de funciones trigonométricas, por lo que la investigación también lo hace.

### 3. Graficación por transformaciones en diferentes latitudes

La Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica cuenta con plataformas que refieren a temas de los cursos Matemática Aplicada y algunos de ellos cuentan entre sus contenidos con el tema de Graficación de Funciones.

Particularmente, en el enlace del curso Matemática Elemental MA-0125 en Moodle cuenta con archivos teóricos sobre graficación de funciones que exponen transformaciones como traslación horizontal y vertical, elongación y compresión, rotación y el valor absoluto de algunas funciones básicas: lineal, cuadrática, cúbica, radical y racional (ver Figura 3.1).

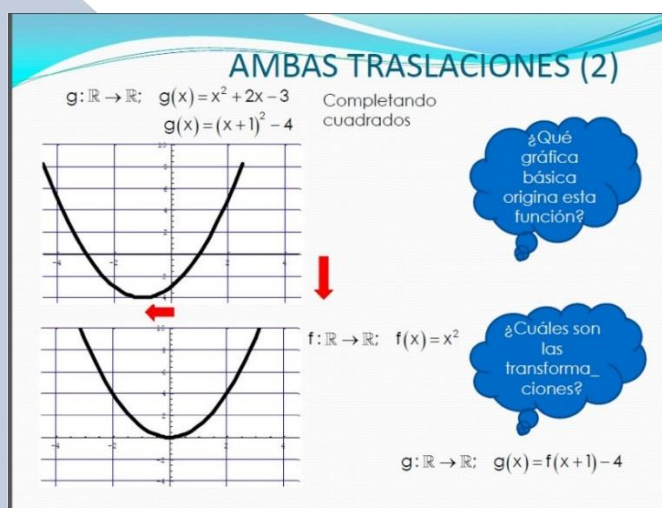


Figura 3.1: Ejemplo de graficación elaborado por la Prof. Silvia Mora para el curso de Matemática Elemental MA-0125.

Por su parte, la Revista Digital Matemática: Educación e Internet (Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2014), se exponen varios applets relacionados al tema en cuestión: Rectas, Parábolas, Dominio de una Función, Dominio de una Función con Intervalos, Ámbito de una Función, Ámbito de una Función con Intervalos, Pares Ordenados, Pares Ordenados y Gráfica, Intervalos Eje X, Intervalos Eje Y y Graficador General, como los que se muestran en las Figuras 3.2 y 3.3.

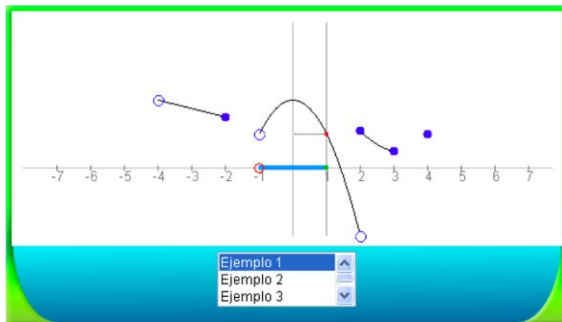


Figura 3.2: Applet con propuesta de dominio de la función.

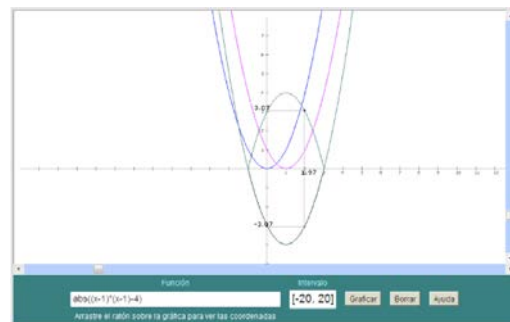


Figura 3.3: Ejemplo de las transformaciones que dan origen a una función.

Ya fuera de las fronteras costarricenses, en Latinoamérica se localizan pocos trabajos relacionados. Algunos de ellos corresponden a un artículo titulado “*El Graficador como Herramienta para la Clase de Matemática*” que acude al graficador Graphmatica en funciones exponenciales y logarítmicas (Lestón) (ver Figura 3.4); un material escrito de apoyo procedente de Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, que incluye “*Graficación de Funciones: Transformaciones*” y ejemplifica diferentes transformaciones y la combinación de estas (ver Figura 3.5); y en Puerto Rico, el “*Tutorial de Matemáticas*” (Cuevas, Figueroa, Novoa, & Serquén, 2015), mediante applets, muestra ejemplos teóricos de transformaciones (Figuras 3.6 y 3.7).

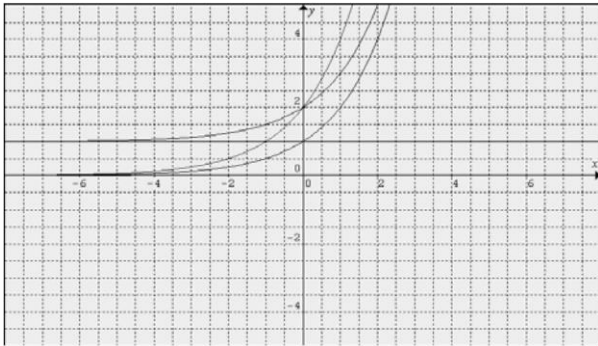


Figura 3.4: Combinación de transformaciones.

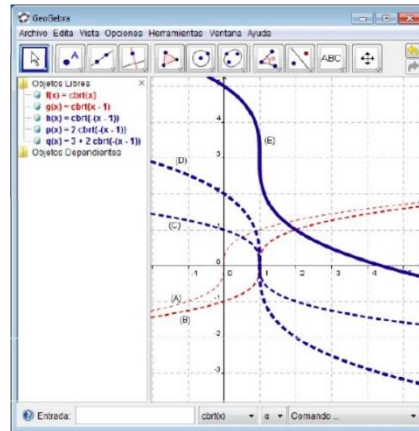


Figura 3.5: Transformaciones de la función definida por  $f(x) = 2^x$ .

### Reflexión de gráficas

Para graficar  $y = -f(x)$ , refleje la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $x$ .

Para graficar  $y = f(-x)$ , refleje la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $y$ .

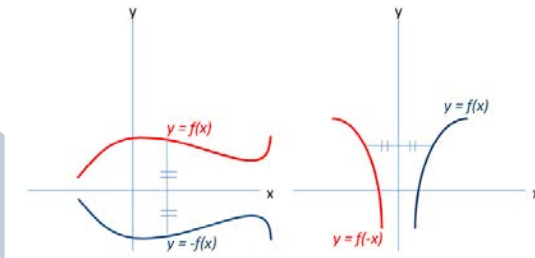


Figura 3.6: Reflexión de la gráfica.

### Ejemplo: Reflexión de gráficas

Trace la gráfica de cada función:

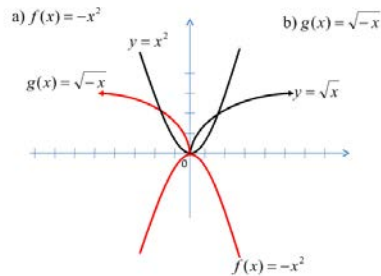


Figura 3.7: Ejemplo de reflexión de gráficas.

En los Estados Unidos se puede ubicar investigaciones como “How Graphing Calculators and Visual Imagery Contribute to College Algebra Students’ Understanding the Concept of Function” (Lane, 2003), que detalla un estudio de casos cualitativo que muestra el papel de las calculadoras gráficas y determina cómo éstas y las imágenes visuales contribuyen a la comprensión de las funciones, por parte de los estudiantes universitarios. Los datos utilizados en este estudio se basaron en entrevistas y revisión de documentos y fueron analizados mediante el uso de dos marcos teóricos: Translating component for understanding functions, O’Callaghan (1998) y Role of graphing calculator approaches, Ruthven (1990).

En España, el Proyecto Descartes (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2015) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte surgió para promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como

herramienta didáctica. Ofrece materiales didácticos para el aprendizaje de las matemáticas, en los niveles de enseñanza no universitaria y en él se puede encontrar el vínculo de “Transformaciones de funciones: Traslaciones y Dilataciones” (Figuras 3.8 y 3.10).

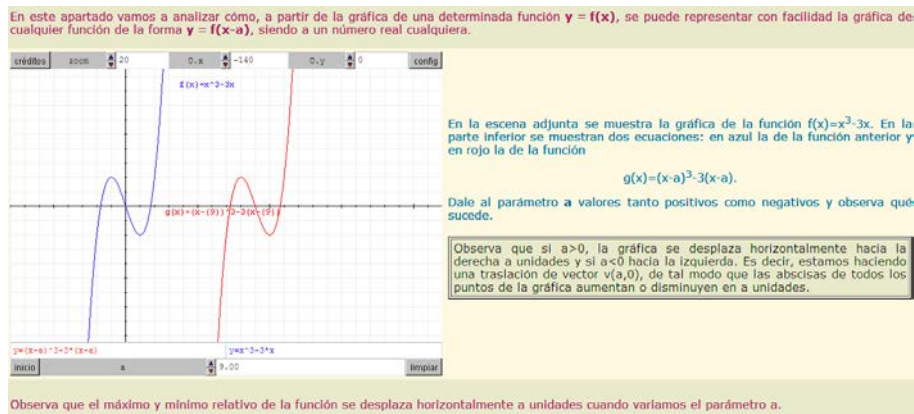


Figura 3.9: Traslación horizontal.

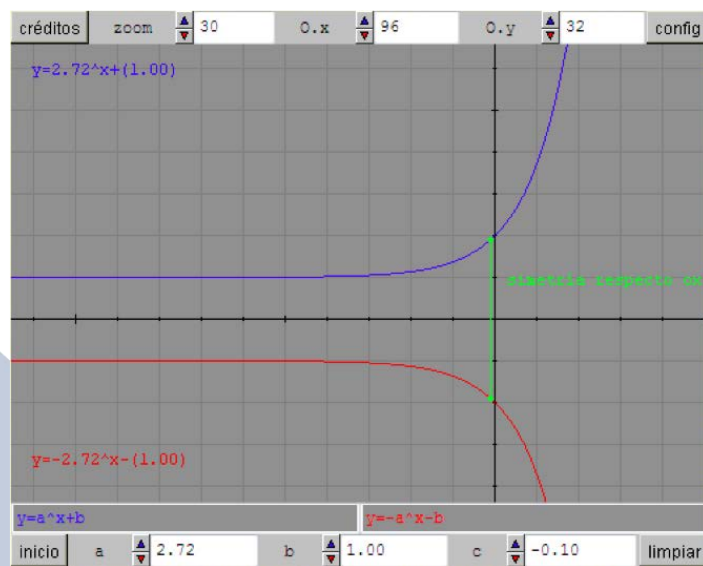


Figura 3.10: Simetría respecto al eje de las abscisas.

Pero también existen opciones como la página web del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado en donde se encuentra un enlace con el ejemplo de una función cuadrática creada en GeoGebra (Arias), que permite al usuario variar uno o más parámetros  $y$ , con ello, aplicar un máximo de siete transformaciones: reflexiones, traslaciones, elongaciones y valor absoluto (ver Figuras 3.10).



#### TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Observa cómo afecta a la gráfica de una función  $y=f(x)$  cambiar  $x$  por  $x+a$ ,  $y$  por  $y+a$ ,  $x$  por  $-x$ ,  $y$  por  $-y$ , etc. Mueve el deslizador a para observar los cambios. Marca los cuadrados de la izquierda para visualizar u ocultar las gráficas.

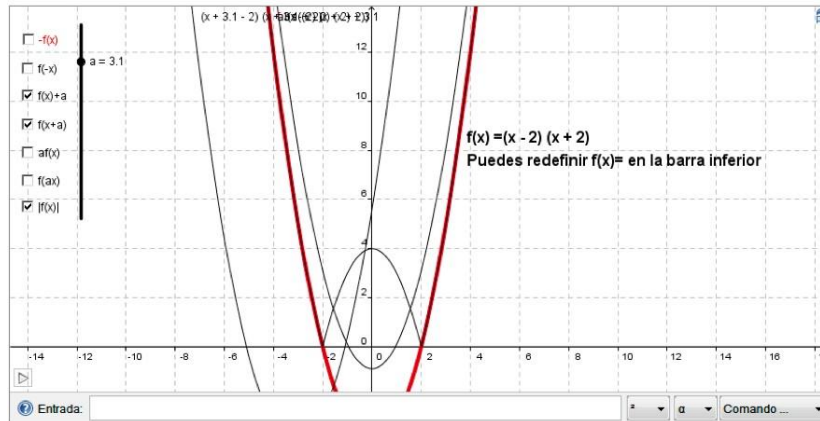


Figura 3.10: Transformaciones de una función.

#### 4. Pensamiento complejo y unidad didáctica

La unidad didáctica que se pretende implementar está diseñada considerando parámetros del Pensamiento Complejo (Margery, 2010), caracterizada por la no linealidad y regido por los principios de:

**Simplicidad:** El ser humano tiende a simplificar la realidad para abarcarla y entenderla de una manera global.

**Visión sistémica:** La combinación de diferentes interacciones de los componentes de un sistema complejo puede dar lugar a propiedades emergentes, conductas del sistema visto como un todo.

**Co-visión:** Toda visión está marcada por diferentes perspectivas de los observadores, quienes interpretan lo que ven y tienen visiones fragmentadas de la realidad.

Para el abordaje de la unidad didáctica, se pretende complementar la memoria auditiva potenciando la visual mediante el uso de recursos informáticos, sin dejar de lado la construcción de esquemas en la graficación de una función por el método de transformaciones automatizando algunos de los procesos.

Debido a la variabilidad de tareas de aprendizaje que propone el Pensamiento Complejo, la unidad didáctica está estructurada en dos o tres sesiones (según el tiempo disponible para el tema, a partir del cronograma del curso), con las siguientes actividades:

- Motivación.
- Exposición magistral.
- Exposición de ejemplos con apoyo de TIC.
- Tareas formativas.
- Diagnóstico de conocimientos adquiridos.
- Verificación y resolución apoyado en TIC.

Además, el uso de softwares permite al estudiante un control considerable de su aprendizaje cuando verifica con ellos los resultados que obtiene con el solo uso del lápiz y el papel. Por tal razón, se elaboró en GeoGebra una serie de Módulos de graficación que permiten tales tareas. Ellos son:

**Módulo 1:** Permite esbozar hasta tres gráficas en un mismo plano, en dominios comprendidos entre  $-20$  y  $20$ . Pretende brindar al estudiante una mejor noción de la relación de la gráfica con el criterio que la define, siendo además amigable al usuario (ver Figura 4.1).

**Módulo 2:** Permite representar rápida y eficientemente cada una de las gráficas que se obtienen a partir de la ecuación de una función básica, dejando el “rastros” de cada una de ellas y resaltando la última. El usuario puede seleccionar una de las opciones de función básica y variar el o los parámetros que considere necesarios, puede verificar tanto la ecuación como la gráfica que se obtiene con las diferentes variaciones (ver Figura 4.2).

**Módulo 3:** Se complementa con el Módulo 2, pero centrándose ya no en la variación de parámetros sino en las transformaciones (ver Figura 4.3).

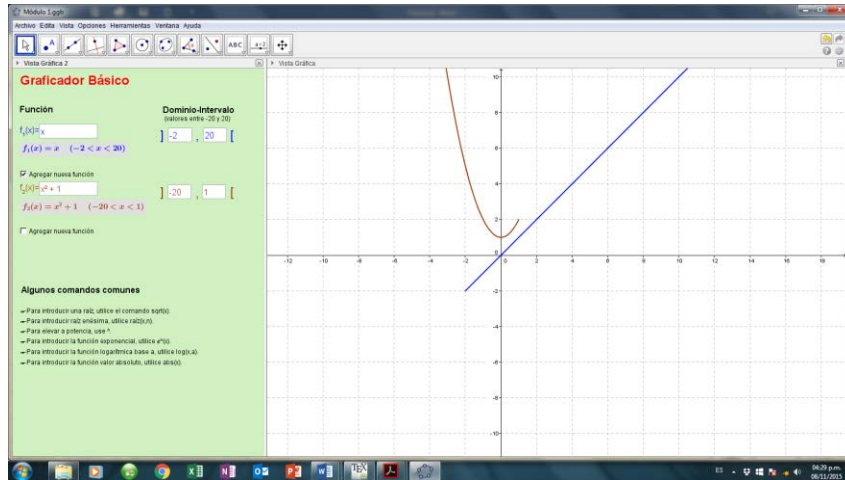


Figura 4.1: Módulo 1.

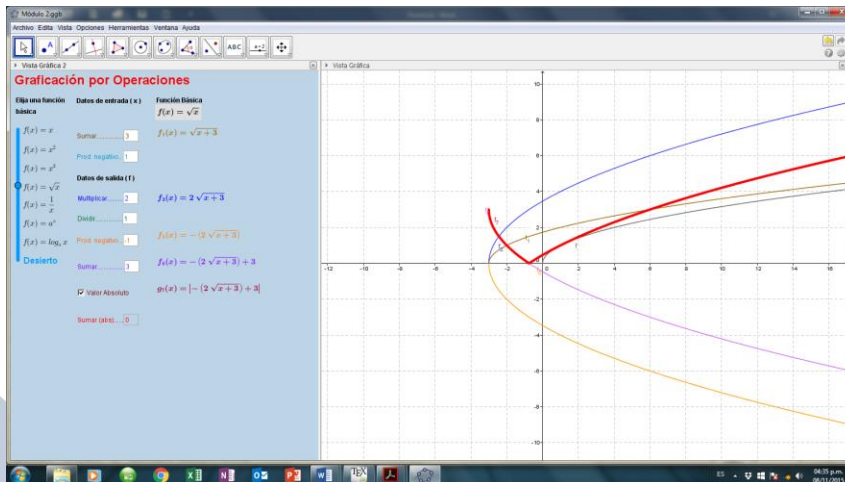


Figura 4.2: Módulo 2.

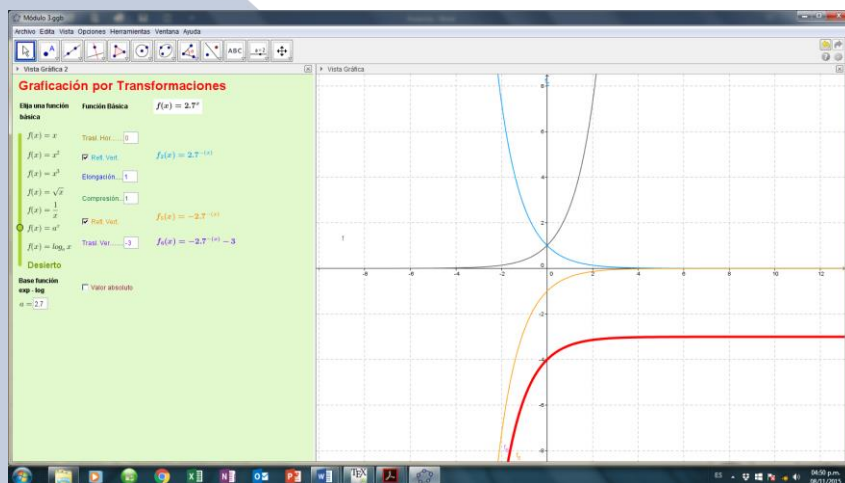


Figura 4.3: Módulo 3.

## 5. Metodología

Se utiliza una metodología cuasi-experimental con un grupo experimental y otro control. Además, la investigación se valdrá de test y cuestionarios objetivos para hacer un análisis de la situación, con la utilización de técnicas estadísticas en el análisis de datos y generalización de resultados.

De esta manera se pretende verificar o refutar las siguientes hipótesis respecto a la implementación de la propuesta didáctica planteada:

- El uso de TIC puede crear un ambiente más cercano y agradable para el estudiantado.
- La implementación de diversas técnicas de transmisión de conocimiento le permite al estudiante un panorama más claro de los conceptos y procedimientos y, por lo tanto, más perdurable.
- Con el uso de TIC se logra un aprovechamiento más eficiente del tiempo disponible para abordar el tema, dentro y fuera de clase.

### Fuentes de información

Se requiere de fuentes de información bibliográfica, preferentemente, primarias, con el fin de fundamentar las razones del porqué de la investigación, basados en experiencias nacionales y foráneas; asimismo, para el desarrollo de una propuesta didáctica y la validación de los instrumentos elaborados y los resultados obtenidos. Entre las fuentes de información se cuentan:

- Memorias de congresos nacionales e internacionales y publicaciones de investigaciones en el área.
- Sitios web especializados en materiales científicos, particularmente, en el área de matemáticas.
- Libros y materiales de uso común en los cursos en los cuales se trata el tema planteado en el presente trabajo.
- Libros y publicaciones de análisis de datos.

Aunado a las anteriores fuentes, se contaría con la información que puedan aportar los profesores expertos en el tratamiento del tema y los estudiantes de estos grupos, mediante los siguientes instrumentos:

## **Encuestas**

Estas serán dirigidas a los estudiantes de dichos grupos de control y prueba con la finalidad de recolectar su apreciación y conocer su actitud respecto al tema en cuestión.

## **Entrevistas**

Estas serán implementadas en los profesores expertos y los docentes de curso, para preparar una propuesta educativa acorde a las exigencias del tema por tratar y validar los insumos preparados para tal fin.

## **Procedimientos**

El estudio se aplica en el curso de Precálculo MA-0001, de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. Para ello se estima conveniente primero poner en práctica la propuesta didáctica sólo con el fin de depurar aspectos como el tiempo disponible, insumos y los mismos ejemplos y ejercicios que pudiesen usarse posteriormente.

Paralelamente, algunos expertos, docentes conocedores del manejo del tema en el nivel correspondiente, validan los insumos y hacen las observaciones pertinentes para la mejor adaptación de las mismas.

Ya depurada la propuesta, se contaría con un grupo experimental y otro control, tratando de mantener condiciones homogéneas en ambos casos, de manera que sea viable detectar los efectos que pudiera provocar la aplicación de la propuesta didáctica. Para el primer caso, se contaría con las actividades propuestas en la presente investigación; para el segundo, se dictarían clases expositivas, sin el apoyo de TIC y apegadas a los mecanismos que tradicionalmente se implementan en el curso.

Cabe destacar que los profesores expertos que cooperen con la investigación deberán ser seleccionados por su experiencia y posición en la cátedra a la cual pertenezcan.

La evaluación no sólo contempla los resultados académicos de los estudiantes pues este rubro es sólo uno más que permitiría la evaluación integral del efecto que la propuesta y el uso de TIC pudiesen tener en el proceso de aprendizaje de la Graficación de Funciones por el Método de Transformaciones. También se espera medir aspectos tales como su eficiencia respecto al manejo del tiempo disponible por el profesor, tiempo dispuesto por el estudiantado para el estudio del tema, actitud de los estudiantes ante la metodología empleada. En dicha evaluación intervendría un diagnóstico de los conocimientos básicos de

los estudiantes respecto al tema, la aplicación de pruebas cortas en las diferentes sesiones y los resultados arrojados en la prueba correspondiente al curso.

## 6. Conclusiones y recomendaciones

El proyecto está formulado para aplicar la Unidad Didáctica en el curso de verano del 2016 de la Universidad de Costa Rica, que se extendería los meses de enero y febrero, para así iniciar inmediatamente después con el análisis de los resultados.

## 7. Referencias bibliográficas

- Arias, J. C. (s.f.). *Matemáticas*. Obtenido de <http://platea.pntic.mec.es/jcarias/>
- Cuevas, J., Figueroa, W., Novoa, A., & Serquén, A. (5 de Agosto de 2015). *Cuaderno Autoinstructivo de Preparación. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas*. Obtenido de <http://es.scribd.com/doc/80140186/Manual-Autoinstructivo-a-Calculo-Ingenieria>
- INEC. (9 de Abril de 2015). Obtenido de <http://www.inec.go.cr/Web/Home/pagPrincipal.aspx>
- Instituto Tecnológico de Costa Rica. (2 de Julio de 2014). *Revista Digital Matemática: Educación e Internet*. Obtenido de <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>
- Lane, R. (2003). How Graphing Calculators and Visual Imagery Contribute to College Algebra Students' Understanding the Concept of Function. Florida: The Florida State University College of Education.
- Lestón, P. (s.f.). El Graficador como Herramienta para la Clase de Matemática. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 9-16. Obtenido de <http://www.soarem.org.ar/Documentos/24%20Leston.pdf>
- Margery, E. (2010). *Complejidad, Transdisciplinariedad y Competencias: Cinco Viñetas Pedagógicas*. San José, Costa Rica: URUK Editores.
- Ministerio de Ciencia y Tecnología. (2011). *Plan Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación 2011-2014*.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. (6 de Junio de 2015). *Proyecto Descartes*. Obtenido de [recursostic.educacion.es/descartes/web/](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/)
- Peña, P., & Peña, M. A. (2007). El Saber y las TIC: ¿Brecha digital o brecha institucional? *Revista Iberoamericana de Educación*, 89-106.
- Rosado, J. (24 de Setiembre de 2011). *La Tecnología de la Informática y la Comunicación*. Obtenido de <http://www.cibersociedad.net/archivo/articulo.php?art=218>

- Ruiz, A. (2013). La Educación Matemática en Costa Rica: antes de la reforma. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10-20.
- Sarmiento, M., Torres, Y., & Macías, N. (2011). RYDUX: Software para apoyar la enseñanza-aprendizaje del Método de Reducción en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. *Memorias del VII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora* (págs. 148-158). Instituto Tecnológico de Costa Rica: A. Borbón (ed.).
- Viquez, M. F., & Arroyo, J. (2011). Implementación del software GeoGebra para modelar funciones reales de variable real. *Memorias del VII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora* (págs. 138-147). Instituto Tecnológico de Costa Rica: A. Borbón (ed.).