



**IX CIEMAC**  
Congreso Internacional  
sobre la Enseñanza de la  
Matemática Asistida por Computadora  
[www.cidse.tec.ac.cr/ciemac](http://www.cidse.tec.ac.cr/ciemac)

**TEC** | Tecnológico  
de Costa Rica

## Aplicación de un modelo de función lineal en el análisis de estructuras

Ing. Carlos Mayorga E.  
Instituto Tecnológico de Costa Rica  
[cmayorga@itcr.ac.cr](mailto:cmayorga@itcr.ac.cr), [cmayorgae@gmail.com](mailto:cmayorgae@gmail.com)

**Resumen:** Como es bien conocido la ingeniería es una disciplina que estudia y aplica diversas ramas tecnológicas haciendo uso de principios y fundamentos provenientes de las ciencias naturales y de la matemática. La ingeniería civil y en especial una de sus especialidades, la ingeniería estructural no es una excepción; esta rama estudia y analiza en detalle el comportamiento de elementos cuando estos están sujetos a cargas externas. Para ello hace uso de algunos modelos que son válidos en ciertas condiciones, uno de los más utilizados es la ley Hooke la cual establece que la magnitud de fuerza en un resorte es directamente proporcional a la deformación del mismo. La linealidad que representa esta relación es conveniente para el análisis de los elementos que conforman una estructura.

**Palabras clave:** función lineal, ley de Hooke, constante de resorte, análisis estructural.

**Abstract:** It is well known as the engineering is a discipline that studies and applied various technological branches making use of principles and foundations from the natural sciences and mathematics. Civil engineering and in particular one of their specialities, the structural engineering is no exception; this branch studies and analyzes in detail the behavior of elements when they are subject to external loads. One of the most commonly used is the Hooke law which stipulates that the magnitude of force in a spring is directly to the deformation of it. The linearity that represents this relationship is useful for analysis of the elements that make up a structure.

**Keywords:** linear function, Hooke's law, string constant, structural analysis

### 1. Introducción

La ingeniería hace uso de principios y fundamentos científicos y matemáticos para poder estudiar, analizar y modificar sus objetos de estudio. Lo anterior se hace especialmente

válido en el caso del estudio de elementos sujetos a diferentes tipos de fuerzas o cargas externas. La ingeniería estructural es la rama de la ingeniería civil que se encarga de analizar y estudiar tales objetos y su interrelación con otras partes de una estructura. Para lograr lo anterior esta especialidad basa su conocimiento en modelos físico-matemáticos los cuales son válidos en ciertas circunstancias. La ley de Hooke es uno de tales modelos el cual establece que la fuerza que produce un resorte es directamente proporcional a la deformación del mismo. Pruebas de laboratorio demuestran que los elementos que componen una estructura (esto es cierto para los materiales comúnmente utilizados) obedecen la ley de Hooke en cierto rango de la magnitud de fuerzas externas que dependen del material del cual está hecho el elemento. Esta característica permite un estudio de estructuras y su comportamiento ante sollicitaciones externas (fuerzas, momentos flexionantes, torsionantes) constantes o no de un modo relativamente sencillo tanto matemática como físicamente. En el presente trabajo se brindará un breve preámbulo histórico sobre la ingeniería estructural mencionando cronológicamente a algunos de los personajes que más aportaron en el nacimiento y desarrollo de esta disciplina. Luego se explicarán algunos conceptos básicos sobre mecánica de materiales que conciernen al análisis de estructuras, tales como el concepto de esfuerzo normal, esfuerzo cortante, momento flexionante, momento torsor. Posteriormente se brindará una introducción básica sobre el comportamiento del acero y del concreto ante cargas externas mostrando los diagramas de esfuerzo-deformación típicos para evidenciar su comportamiento lineal, esto permitirá seguidamente aplicar tales resultados a casos de estructuras reales y de este modo resaltar la importancia del modelo lineal (Ley de Hooke) para estudio y análisis de estructuras.

## **2. Sección 1**

### *Un poco de historia*

Desde comienzos de la humanidad el ser humano ha hecho uso de su ingenio para modificar las condiciones de su medio en aras de aumentar las posibilidades de su subsistencia o de hacer más confortable su entorno. En sus primeros inicios el ser humano desarrolló algunas piezas tales como la cuña, la palanca y el plano inclinado los cuales fueron utilizados para mover grandes bloques de piedra y así facilitar las construcciones de

inmensas edificaciones (cultura Sumeria 6.000 años antes de Cristo). Posteriormente a estas invenciones el ser humano agregó a la lista la máquina hidráulica ideada por Blaise Pascal en el año 1620 después de Cristo. Para ese entonces la ingeniería estructural no existía como tal pues se le consideraba como arte heredado de la antigüedad. Según los registros históricos en el año 1638 después de Cristo Galileo Galilei realizó esfuerzos para estudiar la viga en voladizo. Leonardo da Vinci también aportó notables ideas relacionadas con la estabilidad de estructuras (introdujo el concepto de momento de una fuerza) tanto en estática (cuerpos aceleración cero) como en dinámica (cuerpo aceleración diferente de cero) En tal época los constructores hacían uso de reglas empíricas para la concepción, diseño y ejecución de proyectos de infraestructura debido a que no había sido desarrolladas la herramientas matemáticas correspondientes.

Posterior a Galileo Galilei surgió uno de los hombres que más ha realizado aportes a la matemática, física e ingeniería de toda la humanidad, tal personaje es desde luego que Isaac Newton. Este notable científico desarrolló en su libro Principia Matemática los principios fundamentales que rigen el movimiento de los cuerpos, este aporte fue sin duda alguna uno de los más relevantes puntos de inflexión en el comienzo y desarrollo de hoy conocemos como ingeniería estructural. A pesar del incommensurable aporte de Newton, este no se ocupó de manera especial del tema de deformación de los cuerpos.

Robert Hooke contemporáneo de Newton fue el primero en encontrar una relación entre la deformación de un resorte y la fuerza que este produce. Hooke enunció la relación: “como es la tensión así es la fuerza”, en un lenguaje matemático ello implica que la fuerza que produce un resorte es proporcional a la deformación que este experimenta.

En 1670 Mariotte fue el primero en aplicar el modelo de Hooke a las fibras de vigas en condiciones de flexión obteniendo prometedores resultados, tales descubrimientos sentaron la base del estudio de los elementos sujetos a flexión.

Posteriormente el intervalo temporal comprendido entre finales del siglo XVIII y mediados del siglo XX fue en extremo fructífero en cuanto a aportes matemáticos y físicos propios del análisis y comportamiento de estructuras y materiales, se enuncian a continuación los personajes y aportes más relevantes:

- Leonhard Euler realizó contribuciones en tema de pandeo de columnas y el desarrollo de curvas elásticas de vigas.
- Navier y Coulomb desarrollaron el concepto de esfuerzo. Coulomb desarrolló el estudio de vigas aplicando el concepto de esfuerzo, la ley de Hooke y las ecuaciones de equilibrio de Newton, debido a ello se le considera el padre de la mecánica de materiales.
- Thomas Young (Cambridge): introdujo por primera vez el concepto de módulo de elasticidad.
- Barré de Saint-Venant (Paris): Compendio formal sobre Teoría de Elasticidad.
- Clapeyron (Paris): Desarrollo del Teorema de Tres Momentos para el diseño y análisis de vigas continuas (puentes).
- Winkler (Alemania): Postuló el concepto de línea de influencia (diseño de puentes).
- J.C.Maxwell (Cambridge): Padre del análisis estructural clásico, aplicó métodos de energía para la resolución de sistemas estáticamente indeterminados.
- Otto Mohr (Alemania): Aportes incomensurables en el análisis de esfuerzos en elementos (base diseño de elementos mecánicos), aplicación de conceptos de energía en el análisis de estructuras.
- Alberto Castigliano (Menabrea): Aplicación de conceptos de energía en el análisis de estructuras, Teorema de Castigliano.
- Hardy Cross (USA): Distribución de momentos: Método Numérico que consiste en el uso de aproximaciones sucesivas para la resolución de estructuras estáticamente indeterminadas.
- Turner, Clough, Martin y Topp (USA): Métodos Matriciales, lo que originó el método de elemento finito, talvés el más poderoso método para el análisis de estructuras.

### *Conceptos básicos sobre ingeniería estructural*

Con el objetivo de poner un sustento conceptual básico necesario para la comprensión del tema a desarrollar se explican algunos conceptos básicos de ingeniería estructural:

1. Esfuerzo: El esfuerzo puede definirse como la resistencia que ofrece (o se solicita) un área unitaria cualquiera de un material ante la acción de una carga dada. Los esfuerzos pueden ser de distintos tipos dependiendo de su efecto en el elemento en estudio. Los esfuerzos que se producen formando un ángulo recto con la superficie del material se conocen como esfuerzos normales. Por otro lado los esfuerzos que producen paralelos a la superficie del elemento en cuestión se conocen como esfuerzos cortantes. En la figura 1 se muestran una representación gráfica de los esfuerzos normales (fuerzas normales) y de los esfuerzos cortantes (fuerzas cortantes)

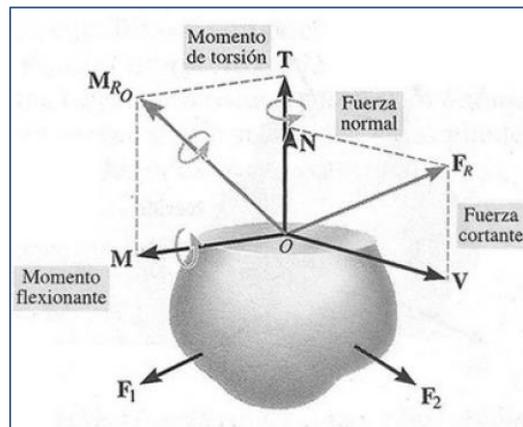


Figura 1. Representación gráfica de los esfuerzos cortantes y normales presentes en un elemento al cual se le ejercen fuerzas externas (adaptado del libro *Mecánica de Sólidos*, Russel C. Hibbeler Sexta Edición, pp 8).

En esta representación se indican fuerzas externas  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  actuando sobre un elemento de geometría cualquiera. Al existir la acción de tales cargas externas se dará una distribución interna (no necesariamente constante en el espacio) de esfuerzos (fuerza por unidad de área) en la sección del elemento.

2. Ley de Hooke: Según Robert Hooke la fuerza necesaria para encoger (o estirar un resorte es proporcional a la deformación del resorte medida desde la posición de reposo del resorte (posición en la cual el resorte tiene deformación cero). La constante de proporcionalidad se llama constante del resorte y es propia de cada

resorte. Cuanto mayor sea la constante de proporcionalidad más difícil será deformar el resorte. La relación matemática es:

$$F = |k * x| \text{ (Ecuación 1)}$$

3. Prueba de Tensión, Máquina Universal, deformación unitaria: Como indica Popov, Egor (1999) para medir las propiedades mecánicas de los materiales se efectúan pruebas estandarizadas internacionalmente a probetas de ciertas dimensiones ya establecidas. Tales experimentos se llevan a cabo en laboratorios debidamente equipados para tales fines. Por ejemplo se cuenta con máquinas que pueden cargar axialmente (compresión o tensión) una probeta y al mismo tiempo obtener datos sobre la deformación del elemento. Tales dispositivos se conocen como máquinas universales. La figura 2 muestra una máquina universal típica.

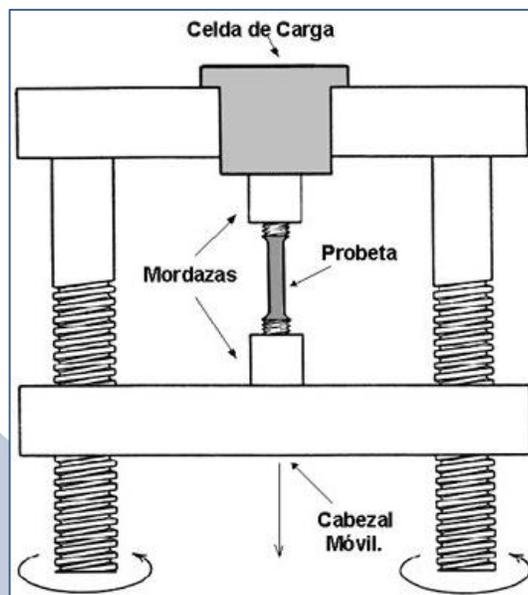


Figura 2. Máquina universal típica. Se muestra la colocación de la probeta, las mordazas que fijan el elemento al cabezal móvil y la celda de carga que permite registrar los datos de deformación y carga aplicada (<http://marcelodelima.blogspot.com/2008/06/recepcin-de-muestras.html>)

La máquina universal mostrada cuenta con las siguientes partes: mordazas para fijar la probeta al cabezal móvil, cabezal móvil (permite el movimiento vertical hacia arriba o vertical hacia abajo), celda de carga la cual permite digitalizar la los datos de carga y deformación. Como indica Popov, Egor (1999) una de las pruebas más importantes que

pueden realizarse con este dispositivo se conoce como prueba de tensión. En esta prueba se coloca la probeta como se indica en la figura 2 se aumenta la carga de tensión sobre el elemento probado alejando verticalmente hacia abajo el cabezal móvil elongando de este modo la probeta en cuestión. La celda de carga está diseñada apropiadamente para registrar datos de carga (esfuerzo normal de tensión  $\sigma = \frac{\text{Fuerza Axial}}{\text{Área transversal de la probeta}}$  y deformación de la probeta).

Por conveniencia experimental es más adecuado definir la deformación del elemento como la razón de cambio de la longitud dividida entre la longitud original:

$$\varepsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0} \text{ (Ecuación 2)}$$

A tal término se le conoce como deformación unitaria del material

Al graficar los datos de carga aplicada contra la deformación unitaria se obtiene para el caso de una probeta de acero la gráfica mostrada en la figura 3:

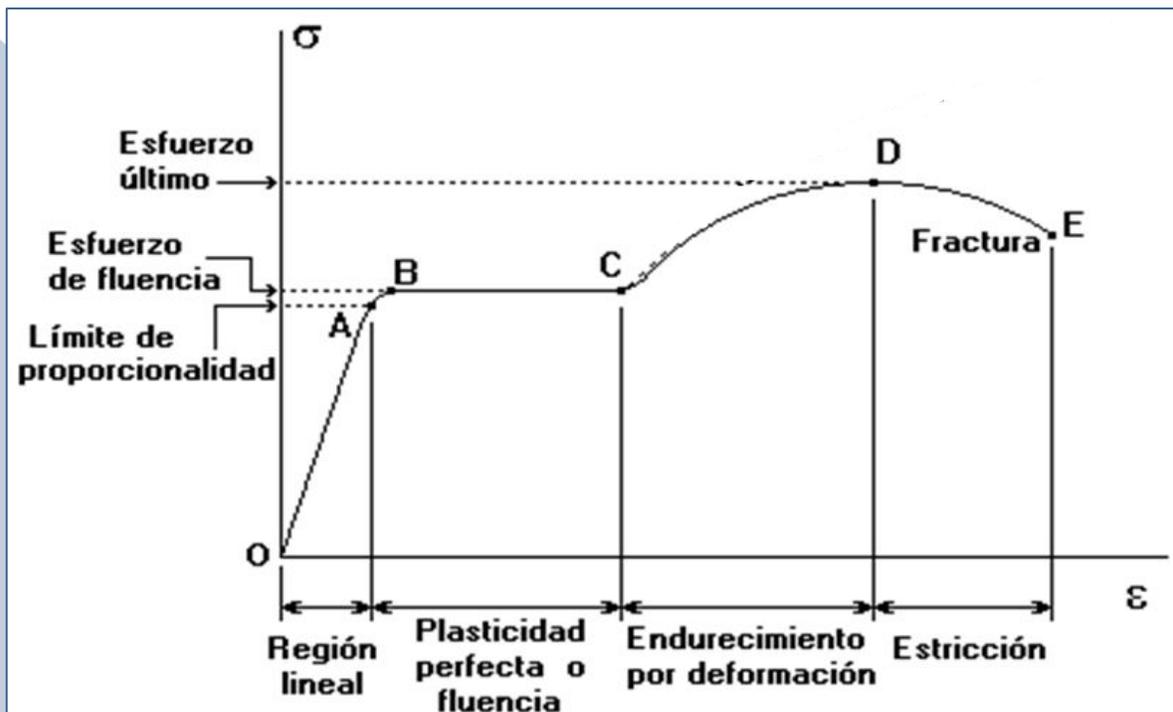


Figura 3. Diagrama de esfuerzo deformación típico para una probeta de acero. Se distinguen cuatro regiones diferentes: región lineal, meseta de fluencia, endurecimiento por deformación, estricción.  
(<http://www.monografias.com/trabajos38/traccion-en-metales/traccion-en-metales.shtml>)

En la gráfica de esfuerzo de tensión contra deformación unitaria se distinguen cuatro regiones diferentes. La primera región muestra una relación lineal entre el esfuerzo tensional  $\sigma$  y la deformación axial  $\varepsilon$  o sea  $\sigma \propto \varepsilon$  o  $\sigma = \text{CONSTANTE} * \varepsilon$  (Ecuación 2), dicha relación matemática es idéntica a la Ley de Hooke  $F = |k * x|$  por lo que la probeta se comporta como un resorte en la región lineal, de modo tal que si se retira la carga la probeta regresará a su longitud original y no habrá deformación permanente, este comportamiento se dará hasta una carga máxima indicada en la gráfica como límite de proporcionalidad. La constante de proporcionalidad en el esfuerzo tensional y la deformación unitaria se conoce como Módulo de Young o Módulo de Elasticidad  $E$  y es propia de cada material, para el caso del acero tiene un valor de 200 GPa. Esta característica de lineal tiene en general muchas ventajas tanto matemática como físicamente. Por ejemplo debido a que el material se comporta como un resorte es posible determinar en forma sencilla la deformación unitaria que tendrá un elemento (a tensión) en una estructura cuando el mismo esté sujeto a cargas externas o en contraste es posible restringir las cargas de tensión sobre un elemento para que el mismo no se deforme más allá de límites que podrían poner en peligro la integridad de seres humanos o la de una estructura. La otra región que se distingue con facilidad es la región de fluencia, la misma comienza al alcanzarse una carga mínima indicada como esfuerzo de fluencia. En esta región el elemento ya no se comporta en forma lineal sino que “fluye” pues para una misma carga o esfuerzo tensionante se da una deformación creciente, en este escenario el elemento sufrirá deformaciones permanentes pues si se retira la carga la probeta no regresará a su longitud original. Esta propiedad es deseable en todos aquellos materiales que deben responder a cargas de tensión, entre ellos el acero estructural es típicamente el más destacado. Luego de la región de fluencia se muestra una región en la cual para seguir deformando el material es necesario aumentar la carga o esfuerzo, esta región se conoce como endurecimiento por deformación y se da básicamente debido a que internamente en el material existe una distribución poco ordenada de átomos lo que conlleva a un aumento en la resistencia del material, la cual aumenta hasta a un valor máximo (máxima resistencia del material) conocida como esfuerzo último. Si al elemento se le aplica una carga mayor al esfuerzo último se llega a la región de estricción. En ella se da un adelgazamiento de la sección transversal de la probeta, la resistencia del elemento disminuye hasta que se llega a

la fractura y por ende separación del elemento en dos partes. En la figura 4 se muestra una probeta con estricción central y luego la fractura respectiva.

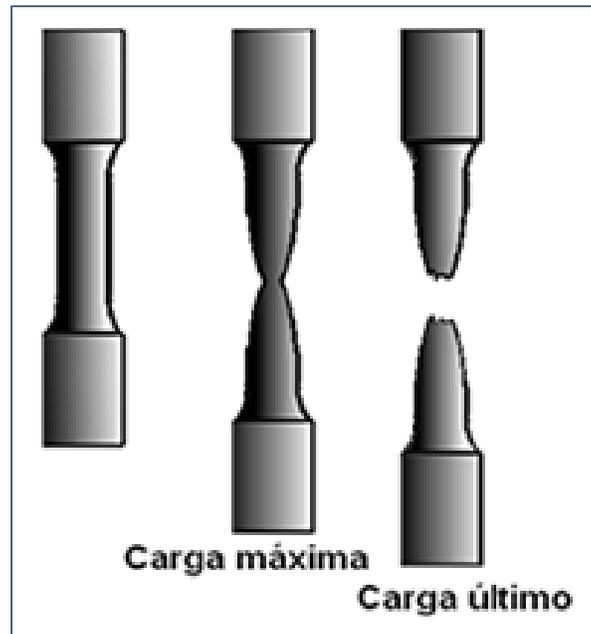


Figura 4. Dibujo que muestra la aparición de estricción y la subsiguiente fractura de una probeta de acero durante una prueba de tensión.

(<http://descom.jmc.utfsm.cl/sgeywitz/sub-paginas/Materiales/Ensayotraccion/Ensayodetraccion.htm>)

### 3. Análisis de datos reales de una probeta de acero:

En esta sección se realizarán dos ejercicios en los cuales se aplicarán los conceptos relaciones con la ley de Hooke aplicada a casos de estructuras. El primero de ellos tiene que con datos obtenidos en una máquina universal al practicar una prueba de tensión sobre una probeta de un metal no conocido. El segundo tiene ver con el procedimiento básico de diseño de un elemento estructural de una armadura.

#### i. Determinación del Módulo de Young de una barra metálica.

Se realizó el ensayo de esfuerzo deformación a una barra de 0,506 pulgadas de diámetro y 10 pulg de largo. Los datos obtenidos se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Valores de Fuerza y Desplazamiento de una barra de acero de 0,506 pulgadas de diámetro obtenidos en una máquina universal.

DEFORMACIÓN UNITARIA (pulg/pulg)	ESFUERZO APLICADO ( $\pm 0,1$ lb/(pulg*pulg)
0	0
0.00003	4972.892659
0.000072	9945.785317
0.000107	14918.67798
0.00015	19891.57063
0.000172	24939.05668
0.00021	29911.94934
0.000243	34810.24861
0.00065	37918.30652
0.00065	44010.10003
0.00952	49853.2489
0.018	55820.72009
0.032	63598.32421
0.0522	66363.25253
0.063	64771.92688
0.078	61658.89607
0.0822	47685.0677

Una vez obtenidos los datos en forma experimental se procede a realizar un gráfico de dispersión. Las figuras 5 y 6 muestran claramente que se establece una región lineal en la cual la relación matemática entre el esfuerzo de tensión y la deformación unitaria de la probeta es lineal, tal región por lo tanto cumple con la ley de Hooke. Para encontrar la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo de tensión  $\sigma$  y la deformación  $\epsilon$  se realizó una regresión lineal por medio de mínimos cuadrados. Se obtuvo que la constante es de  $1 \times 10^8 \frac{lb}{pulg^2}$  lo cual concuerda con el orden de magnitud para acero estructural. Así mismo se obtuvo un coeficiente de correlación de  $R^2 = 0,9971$  lo que indica que la linealidad de la relación entre variables es alta.

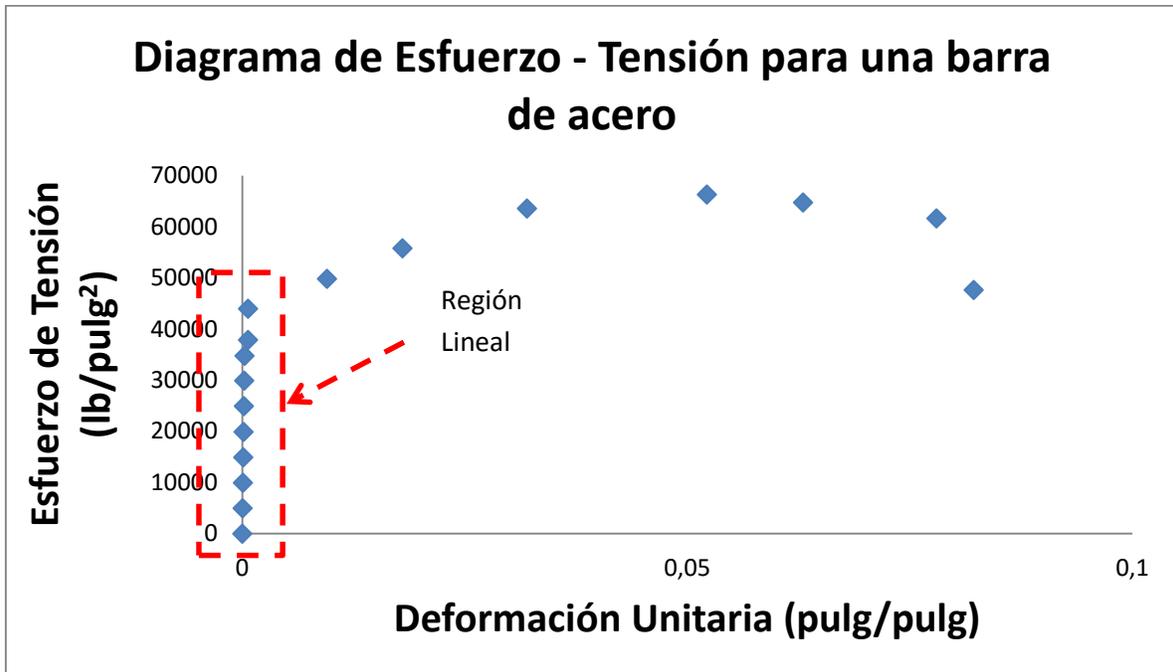


Figura 5. Diagrama de esfuerzo deformación para probeta de acero.

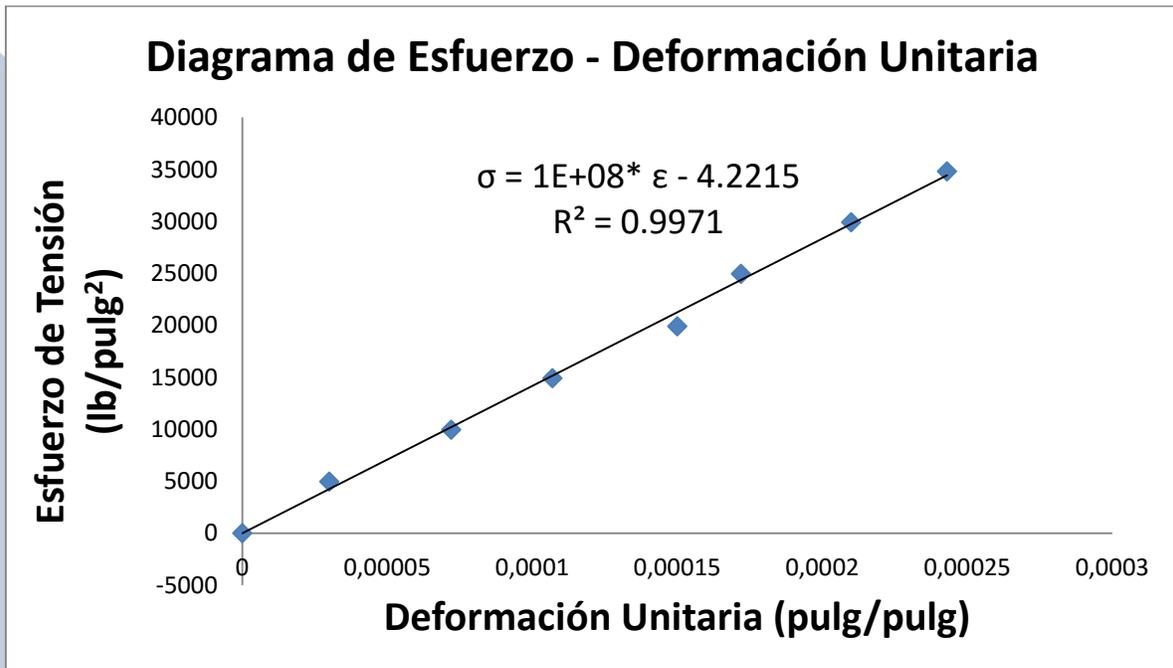


Figura 6. Diagrama de esfuerzo deformación para probeta de acero (Región Lineal o Elástica Lineal)

- ii. Diseño del elemento estructural de un elemento de una torre de una armadura:  
Considere la siguiente estructura mostrada en la figura 7 la cual está compuesta por elementos metálicos ( $E = 2 \text{ GPa}$ ) unidos en puntos conocidos como nodos (puntos A, B, C, D, E). Tal estructura está sujeta a una carga externa horizontal de  $600 \text{ kN}$  en C (esta carga podría deberse a la sollicitación producida por un cable que hala a la torre horizontalmente). Además de la carga horizontal externa la estructura también estará sujeta a cargas o fuerzas que le producen los apoyos en A y en B. Entonces la torre “experimentará” fuerzas en los puntos A, B, C, y debido a que los elementos están unidos en los nodos las fuerzas se distribuirán a en todos los elementos que conforman la estructura. Es posible (por medio de ecuaciones de equilibrio traslacional y rotacional) determinar las fuerzas (sólo tensión o compresión) que generarán en cada elemento.

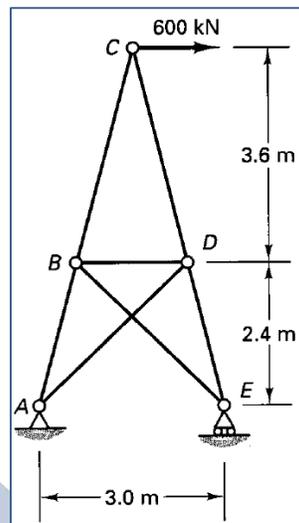


Figura 7. Armadura o torre compuesta por elementos que se unen en puntos conocidos como nodos

Por ejemplo el elemento AB experimenta una fuerza de  $824,6 \text{ N}$ . Si se considera que ese elemento se comporta como un resorte se tendrá (por requerimientos de diseño y seguridad) que el mismo se deforme como máximo una cierta deformación unitaria. Supongamos que tal límite de deformación sea de  $0,003 \text{ m}$

entonces se tiene que el elemento AB debe cumplir la ecuación  $m$  (Ley de Hooke):

:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F_{AB}}{\text{Área Elemento } AB} = E * \varepsilon \\ &= E * \left( \frac{\text{Longitud Final } AB - \text{Longitud Inicial } AB}{\text{Longitud Inicial}} \right) \\ \frac{824,6 \text{ N}}{\text{Área Elemento } AB} &= 2 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 0,003\end{aligned}$$

De donde se puede obtener el área del elemento AB necesaria para que la deformación del elemento no sobrepase el valor de 0,003 m. El área mínima (hay soluciones infinitas) adecuada sería:

$$\text{Área Elemento } AB = \frac{824,6 \text{ N}}{2 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 0,003} = 1,37 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,37 \text{ cm}^2$$

#### 4. Conclusiones y recomendaciones

- En la ingeniería se utilizan modelos matemáticos y físicos que permiten la resolución aproximada de problemas reales.
- La ingeniería estructural es una rama de la ingeniería civil que se desarrolló a lo largo de varios siglos (del siglo XVII al siglo XX) con la colaboración de matemáticos y físicos.
- La ley de Hooke es una relación lineal entre la deformación de un resorte y la fuerza que este genera.
- Los elementos que conforman una estructura obedecen la ley de Hooke (se comportan como resortes) cuando se les aplican cargas externas hasta cierto valor de magnitud de las mismas, si se incrementa la carga más allá de tal límite no se da un comportamiento lineal entre el esfuerzo y la deformación correspondiente
- El modelo lineal de la ley de Hooke representa una herramienta sencilla y muy útil para determinar las dimensiones de estructuras según los requerimientos estructurales correspondientes.

## 5. Referencias bibliográficas

Fletcher, B. (1948). *A History of Architecture on the comparative Method*. Londres: Charles Scribner's Sons.

Hibbeler, R.C. (2006). *Mecánica de Materiales*. Sexta Edición. México: Pearson Educación.

Monografías (26 de octubre 2015). **Ensayo de Tracción en metales**. Recuperado (26 de octubre) desde

<http://www.monografias.com/trabajos38/traccion-en-metales/traccion-en-metales.shtml>

Popov, E. (2000). *Mecánica de Sólidos*. Segunda Edición. México: Pearson Educación.

Universidad Nacional de Colombia (26 de octubre 2015). **Ingeniería Estructural I**. Recuperado (26 de octubre) de (26 de octubre) desde

<http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/manizales/4080020/Lecciones/Capitulo%201/BREVE%20HISTORIA%20DE%20LA%20INGENIERIA%20ESTRUCTURAL.htm>

Universidad Nacional de Colombia (26 de octubre 2015). **Ingeniería Estructural I**. Recuperado (26 de octubre) desde

<http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/manizales/4080020/Lecciones/Capitulo%201/ORIGENES%20DE%20LA%20MECANICA%20DE%20MATERIALES%20.htm>

<http://descom.jmc.utfsm.cl/sgeywitz/sub-paginas/Materiales/Ensayotraccion/Ensayodetraccion.htm>