# DEFINICIÓN DE LÍMITE: DE LO INTUITIVO A LO FORMAL

Edilmo Carvajal – Thais Arreaza
qedcarvajal@gmail.com – tarreaza@gmail.com
Instituto Pedagógico de Caracas – Venezuela

Tema: I.1 – Pensamiento Algebraico
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Terciario – Universitario
Palabras Claves: definición de límite; representación verbal, gráfica y algebraica.

**Resumen**
*Lo común de los cursos de cálculo cuando se introduce la noción de límite, es hacerlo a través de la noción formal, es decir, mediante el uso de épsilon y delta. En varios estudios e investigaciones se ha demostrado que el estudiante difícilmente entiende la noción de límite cuando partimos de una definición rigurosa. Por tal motivo en este trabajo, se pretende que el estudiante vaya construyendo la noción de límite partiendo de situaciones expresadas en forma verbal, numérica y gráfica, para finalmente concluir con la definición formal de límite.*

## Planteamiento del Problema.

Son muchos los intentos que los docentes hacemos cada día para detectar, identificar y analizar las causas de las deficiencias cognitivas de los estudiantes, en matemática, y a partir de ese análisis elaborar propuestas que permitan que el aprendizaje de la matemática se haga más fácil y comprensible.

Con respecto a lo anterior, Oviedo y Kanashiro (2010) señalan:

> Las dificultades presentadas por los alumnos al abordar los temas de Cálculo en los primeros años de la Universidad que son detectados en nuestra práctica diaria y que coinciden además con numerosas investigaciones en Didáctica de la Matemática nos indican que el abordaje de la noción de límite resulta ser uno de los problemas primordiales. (p. 578)

Existen nuevas tendencias que sugieren cambiar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a nivel universitario. Entre estas tendencias podemos señalar la utilización de diferentes sistemas de representación para poder captar en toda su complejidad las particularidades propias de los conceptos y estructuras matemáticas como lo han señalado distintos investigadores (Castro, 1995; Duval, 1998; González Marí, 1995; Oviedo y Kanashiro, 2010; Rico, 2000). Duval (1998) señala que para formar un concepto debemos considerar las relaciones entre los distintos sistemas de representación, articulando entre diferentes registros, en los que se conserva la totalidad o parte del significado de le representación inicial.

**Objetivo General.**

Diseñar y aplicar una propuesta didáctica que facilite la adquisición y comprensión de la definición de límite partiendo de su interpretación intuitiva hasta llegar a su formalización.

**Justificación e Importancia.**

Las dificultades presentadas por nuestros estudiantes en los cursos de cálculos en los primeros años de su carrera son motivo de preocupación en nuestra práctica docente y que coinciden con diversas y numerosas investigaciones en didáctica de la matemática, que nos muestran la enseñanza y aprendizaje del límite como un problema importante.

El concepto de límite se estudia en los cursos iniciales de los programas de orientación científica en el Instituto Pedagógico de Caracas (IPC), tales como: Introducción al cálculo, cálculo diferencial e integral, cálculo de funciones de varias variables. Los estudiantes de estos cursos generalmente presentan dificultades para adquirir el concepto de límite. Los autores basados en su experiencia consideran que entre las causas se puede mencionar la forma tradicional como se introduce dicho concepto en el aula, es decir, partiendo de la definición formal de $\varepsilon$ y $\delta$.

Spivak (1998), realza la importancia del concepto de límite cuando afirma: "Entre todos los conceptos que se presentan en el cálculo infinitesimal, el del límite es, a no dudarlo, el más importante, y quizás también el más difícil."(p.107). Incluso en cursos avanzados del programa de Matemáticas, como: análisis matemático y análisis de funciones de variables complejas se siguen presentando estas dificultades.

Por lo anteriormente expuesto, es importante diseñar métodos, herramientas, estrategias metodológicas o propuestas que faciliten la comprensión del concepto formal del límite partiendo de las nociones intuitivas que los estudiantes traen de su experiencia con el concepto de función (tabulación, graficación, presencia de asíntotas, valores de la variable dependiente cuando la independiente toma valores cada vez mas grandes o cada vez mas pequeños),

**Marco teórico.**

El concepto de límite que aparece en la matemática moderna y que sirve de base para el análisis matemático es producto de un largo proceso de razonamiento que comenzó en el siglo XVII con las ideas provenientes del cálculo. Según Purcell, Varberg y Rigdon (2001):

> El descubrimiento del cálculo, por lo regular, se atribuye a Isaac Newton (1642-1727) y a Gotfried Wilhelm von Leibniz (1646_1716), quienes trabajaron de manera independiente en los finales de 1600. Aunque Newton y Leibniz, junto con sus sucesores, descubrieron muchas propiedades de cálculo, y se encontró que el cálculo tiene muchas aplicaciones en las ciencias físicas, no fue sino hasta el siglo XIX que se propuso una definición precisa de un límite. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), un ingeniero y matemático francés, dio esta definición si los valores atribuidos a la misma variable que se aproximan indefinidamente a un valor fijo, tal que ellos finalmente difieren de él, por tan poco como uno quiera este último es llamado el límite de todos los demás". Incluso, Cauchy un maestro del rigor fue un poco vago en la definición de limite; ¿Qué significa "valores sucesivos"?, ¿Qué "finalmente difieren"? La frase "finalmente difieren de el por tan poco como uno quiera" contiene la semilla de la definición ε-δ, pues indica que la diferencia entre f(x) y su limite L puede hacerse mas pequeña que cualquier número dado, el numero fue etiquetado ε. El matemático alemán Karl Weiestrass (1815-1897) fue el primero en reunir la definición que es equivalente a nuestra definición ε-δ de limite (p. 71).

Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por eso recurrimos a diferentes representaciones para su estudio, teniendo en cuenta que las representaciones no son objetos matemáticos en sí, pero ayudan a su comprensión. La importancia didáctica de las representaciones es que mediante ellas podemos asignar significados y comprender las estructuras matemáticas. Se entiende por representaciones, diferentes notaciones; en nuestra propuesta trabajaremos con la numérica, la verbal, la gráfica y la algebraica. La mayoría de los investigadores que han trabajado contenidos matemáticos utilizando diferente representaciones sugieren que el estudiante debe pasar de una representación a otra, para que se constituya en una operación cognitiva básica. Como indica Rico, son muchos los investigadores que sugieren las distintas representaciones de un mismo concepto para captar las complejidad del mismo (Blázquez, S. y ortega, T., 2001).

En el concepto de límite la representación numérica la observamos en la tabla de valores o en la aproximación a un determinado valor. La representación Verbal es la que nos permite utilizar el lenguaje cotidiano para expresar los términos matemáticos. La representación gráfica la observamos en la utilización de la recta real y del sistema de coordenadas cartesianas. La representación algebraica cuando describimos gráficas y utilizamos símbolos que nos llevan a la representación formal, donde los objetos se manipulan a través de definiciones y no con descripciones, constituyendo la base del análisis matemático.

**Metodología**

El presente estudio está enmarcado en un paradigma cualitativo y concebido dentro de la modalidad de estudio de la investigación de campo del tipo Investigación-acción.

Según Hernández, Fernández y Baptista (2006):

> …Elliot (1991) conceptúa la investigación-acción como el estudio de una situación social con miras a mejorar la calidad de la acción dentro de ella. León y Montero (2002) representa el estudio de un contexto social donde mediante un proceso de investigación con pasos “En espiral”, se investiga al mismo tiempo que se interviene. (p.706)

En esta propuesta didáctica se quiere resolver una situación problemática, como lo es la comprensión de la definición formal de límite, y por esta razón se propone abordar el tema no desde una perspectiva convencional y rigurosa, sino desde la construcción de la definición partiendo de la intuición para luego pasar a una formalización del concepto. Conviene aclarar que este estudio abarcará hasta la noción de límite finito.

Basados en la experiencia de los autores se sugiere trabajar el concepto de densidad de los números reales de manera intuitiva antes de abordar el concepto de límite pues es claro que estos dos están íntimamente relacionados. También se recomienda trabajar las nociones de aproximación, tender a un valor, primeramente en el caso de los números reales en una recta y posteriormente en el del plano cartesiano. Si estas nociones ofrecen problemas en sí, lo hacen mucho más cuando se tienen que trabajar en dos ejes (X, Y). El trabajo con las sucesiones en los números reales ayuda a clarificar la noción de “tender a”, “aproximarse a” ayudando a preparar el tránsito de lo intuitivo a lo formal en la definición de límite, en los números reales.

**Selección de los Sujetos Sociales**

Estudiantes pertenecientes a una de las secciones de introducción al cálculo del Programa de Informática del IPC. Institución formadora de los profesores del nivel escolar medio.

**Fases de la metodología**

Esta investigación constará de tres fases: diseño de la propuesta, aplicación de la propuesta y evaluación.

Fase 1. Diseño de la propuesta.

En la propuesta se toman en consideración los siguientes tipos de sistemas de representaciones: numérico, verbal, gráfico y algebraico. Según Duval (1998) para la comprensión integral de un concepto hay que trabajar en más de un registro de representación.

Nuestra propuesta consta de un conjunto de actividades y ejercicios que conllevan una intencionalidad. En la definición de límite se hace mención de la noción de *tender a y de aproximarse a,* relacionadas con la densidad de los números reales, que en la mayoría de los casos los docentes dan por entendido que los estudiantes manejan con propiedad. En las actividades 1, 2 y 3 se pretende que el estudiante interiorice la noción de densidad en forma intuitiva sin pretender su definición formal. Se dirige su atención a determinar, si es posible, hallar el elemento más próximo a un elemento fijo. Teniendo sentido la pregunta cuando se trata del conjunto de los números naturales y de los números enteros debido a que los elementos están separados a una distancia determinada unos de otros pero que carece de total sentido en el conjunto de los números racionales, irracionales y reales, pues siempre podemos encontrar un número racional, irracional o real más próximo que a uno dado. Esta observación, nos lleva a cambiar nuestra atención en la noción de proximidad que habíamos puesto sobre un elemento fijo hacia los valores que se acercan a un valor determinado…haciendo alusión a la definición de límite dada de Cauchy.

**Actividades sobre nociones de *aproximarse a* y *tender a* en los números reales**

1. a. En el conjunto **N** ¿cuál es el elemento más próximo a cero?
b. En el conjunto **Z** ¿cuál es el elemento más próximo a cero?
c. En el conjunto **Q** ¿cuál es el elemento más próximo a cero?
2. a. ¿Puede encontrar un número racional entre 0 y 2/3? ¿Y entre el número encontrado y 0?
b. ¿Cuantas veces cree usted que se pueda repetir lo anterior?
c. Ubique los números obtenidos en la recta real.
3. ¿Para el número irracional $\sqrt{2}$ puede repetir lo realizado en el caso de un número racional?

En las actividades 4, 5 y 6 se busca que el estudiante maneje la noción de entorno y que observe la relación entre *estar próximo a* y *estar a una distancia muy pequeña de*.

4. Encuentre seis valores cuya distancia a x=1.5 sea menor que: 1, 0.5, 0.25. En cada caso obtenga un intervalo alrededor de x=1.5 que contenga los valores dados.
5. Dados los números reales: $0.15, -\frac{7}{8}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{11}{10}, -0.6$. Construya un intervalo abierto que contenga los números dados.
6. Para los siguientes valores determine la distancia entre cada uno de estos valores y el valor 3

| X | 2.9999 | 2.9 | 3.01 | 3.0001 | 2.8 | 3.0001 | 2.999 | 3.01 | 2.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia a 3 | | | | | | | | | |

a. Ubique los valores anteriores en la recta real.

b. Qué relación observas entre el valor más cercano a tres y la distancia más pequeña encontrada?

c. Indica en la tabla el valor de x correspondiente a la distancia más pequeña.

7. La solución de la inecuación $|x-a|<b$ es un intervalo el cual denotamos $(a-b,a+b)$ y viceversa. Que argumentos utilizaría para respaldar la afirmación anterior.

En la actividad 8 y 9 también se introduce la noción de *aproximarse a* y de *límite*, en forma intuitiva pero involucrando la noción de sucesión de números reales; para los autores al estudiante se le hace más fácil comprender la noción de límite utilizando el tema de sucesiones que el de funciones.

8. a. Obtenga los seis primeros términos de la sucesión cuyo término general esta dado por: $\left\{\frac{2n-3}{n+1}\right\}$. Ubíquelos en la recta real. Obtenga los términos $a_9$, $a_{20}$, $a_{30}$, $a_{100}$. Ubícalos en la recta real. ¿Qué observa? ¿Cuándo n toma valores grandes a que valor se aproxima $a_n$? ¿Existe un término de la sucesión que sea igual al valor aproximado?

b. Una vez que hemos visto que 2 es el valor al cual se aproximan los valores de $a_n$. ¿Puede obtener un término de la sucesión cuya distancia a 2 sea menor que ε=0.5, ε= 0.05, ε=0.001?

c. ¿Puede obtener un valor para n de manera que se tenga que la desigualdad $|a_n-2|<0{,}5$, tal que $|a_n-2|<0{,}05$ y $|a_n-2|<0{,}001$? Encuentra alguna diferencia entre esta pregunta y la pregunta anterior?

9. En la siguiente tabla se considera los valores de la función f cuando los valores en la variable x están muy cerca del valor 3

| X | 2.8 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3 | 3.0001 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 5.21 | 5.19 | 5.17 | 5.1 | ------- | 5.097 | 5.08 | 5.07 | 5.04 |

a. ¿A que número T se aproximan los valores de x?

b. ¿A que número L se aproximan sus imágenes f(x)?

c. Busca una aproximación de L

d. Busca la distancia entre la aproximación encontrada y L

e. Busca la mejor aproximación a L en la tabla anterior.

f. Construya un intervalo para T que contenga los valores anteriores

g. Construya un intervalo para L que contenga los valores anteriores.

Los anexos 1 y 2 del trabajo fueron tomados del libro *Métodos de Graficación* (Alson, 1996, pp.9.1–9.2). En el Anexo 1 se pueden observar tres tipos de representaciones: gráfica, verbal y algebraica. En ella se trabajan los límites laterales para que el estudiante interiorice la necesidad de reflexionar sobre la aproximación a un valor por la izquierda y por la derecha. En el Anexo 2 se combinan situaciones del anexo 1, de límite por la izquierda y límite por la derecha para abordar implícitamente la existencia de límite. Se observa el uso de la representación verbal al colocar expresiones como *tiende por encima y/o por debajo*, en relación con el eje Y como análogos de tender por la izquierda y/o por la derecha, pues estas expresiones facilitan la comprensión por parte del estudiante.

En el anexo 3 se trabajará la transición de la noción básica de límite a la definición formal. En la actividad 1, se plantean ejercicios relacionados con propiedades del valor absoluto que involucran los elementos que aparecen en la definición formal de límite. En la actividad 2, se establece la asociación entre la parte gráfica y la representación simbólica de expresiones que aparecen en la definición formal de límite. En la actividad 3, se introduce la definición formal de límite relacionándola con la notación usual.

Las Fases 2 y 3 de la investigación todavía no han sido aplicadas

**Bibliografía.**

Alson, P. (1996). *Métodos de Graficación.*(3ª. ed.). Venezuela: Editorial ERRO.

Alson, P. 1999). *Cálculo Básico*. Venezuela: Editorial ERRO

Azcárate, C. y Matías M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2).

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada, España: Comares.

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González Marí, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.

Oviedo, M. y Kanashiro, A. (2010, Agosto). *Caracterización de distintos registros de representación del concepto límite funcional en la bibliografía básica del cálculo.* Comunicación Breve presentada en el III REPEM, La Pampa.

Purcell, Varbery y Rigdon (2001). *Cálculo* (8a. ed.). México: Editorial Prentice Hall.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Sonsoles S. y Ortega T (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *4*(3), 219-236.

Sonsoles S. y Ortega T (2008). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. *Contextos Educativos*, 11, 7-21

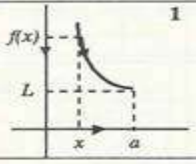
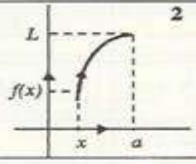
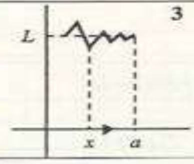
Spivak, M. (1998). *Cálculo infinitesimal* (2ª. ed.). México: Editorial Reverté, S.A.

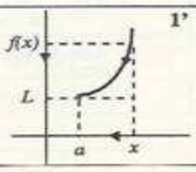
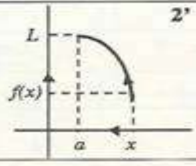
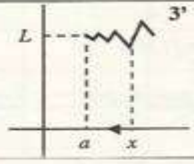
## ANEXO 1
## HOJA DE TRABAJO No. 1



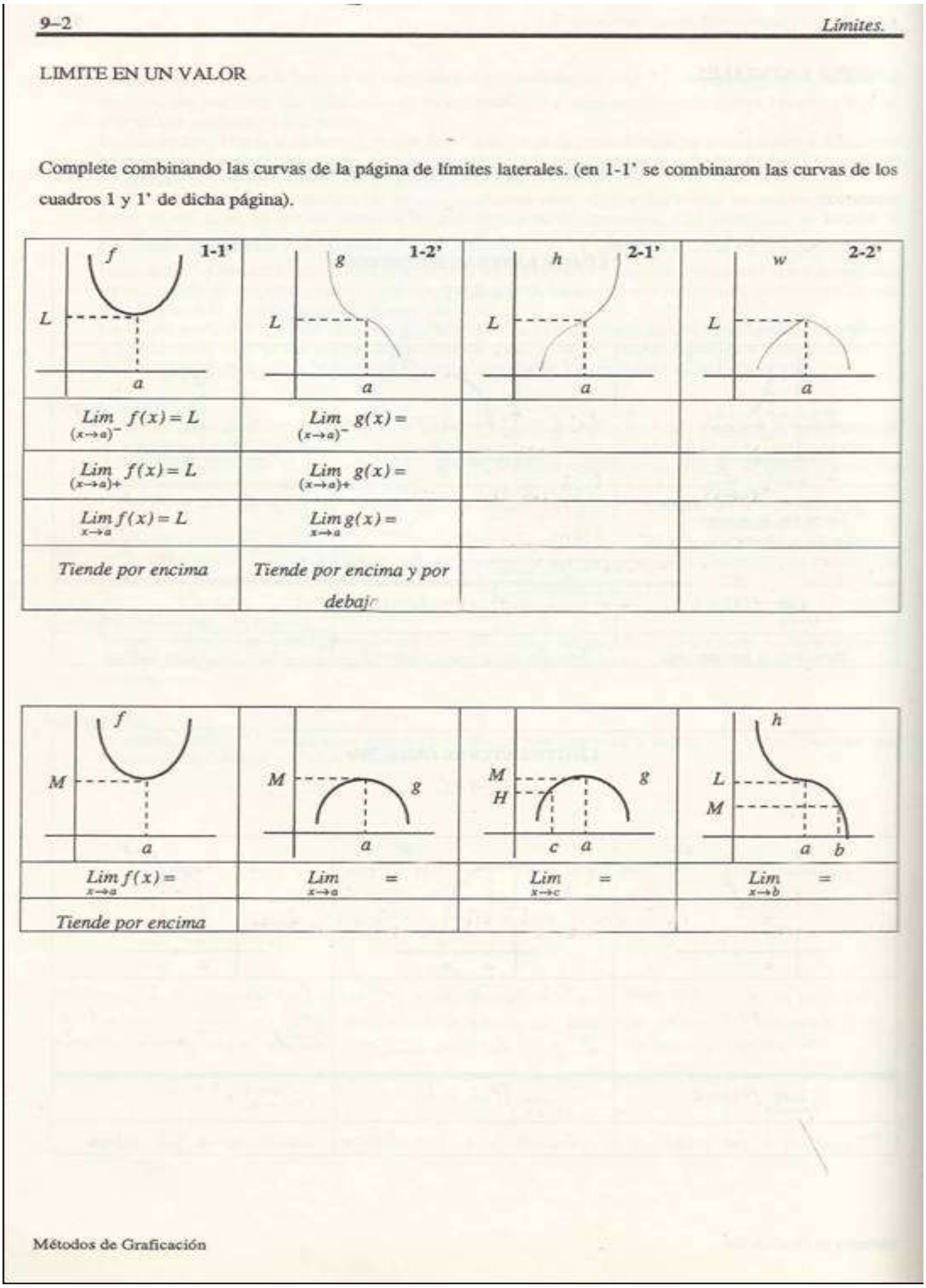
LIMITES LATERALES

Complete: líneas punteadas, flechitas y letras en los gráficos, símbolos y palabras adecuadas en los recuadros.

| LÍMITE LATERAL IZQUIERDO $(x \to a)^-$ | | |
|---|---|---|
| 1   | 2   | 3   |
| *f(x) tiende a L por encima cuando x tiende a a por la izquierda* | | |
| $\lim_{(x\to a)^-} f(x) = L$ | | |
| *Tiende a L por encima* | | |

| LÍMITE LATERAL DERECHO $(x \to a)^+$ | | |
|---|---|---|
| 1'   | 2'   | 3'   |
| | | |
| $\lim_{(x\to a)+} f(x) = L$ | | |
| | | |

## ANEXO 2
## HOJA DE TRABAJO Nº 2





LIMITE EN UN VALOR

Complete combinando las curvas de la página de límites laterales. (en 1-1' se combinaron las curvas de los cuadros 1 y 1' de dicha página).

| 1-1' | 1-2' | 2-1' | 2-2' |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{(x\to a)^-} f(x)=L$ | $\lim\limits_{(x\to a)^-} g(x)=$ | | |
| $\lim\limits_{(x\to a)+} f(x)=L$ | $\lim\limits_{(x\to a)+} g(x)=$ | | |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ | $\lim\limits_{x\to a} g(x)=$ | | |
| *Tiende por encima* | *Tiende por encima y por debajo* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$ | $\lim\limits_{x\to a} \quad =$ | $\lim\limits_{x\to c} \quad =$ | $\lim\limits_{x\to b} \quad =$ |
| *Tiende por encima* | | | |



## ANEXO 3

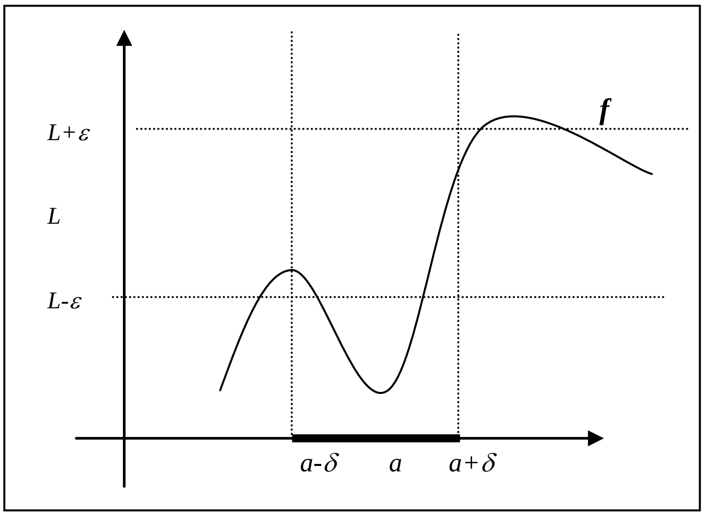
# HOJA DE TRABAJO 3

1. Escriba una expresión equivalente a la expresión dada:

| Expresión | Equivalente | Significado |
|---|---|---|
| $\lvert x-a\rvert<\delta$ | $x\in(a-\delta,a+\delta)$ | Un intervalo abierto con centro en $a$ y radio $\delta$ |
| $0<\lvert x-a\rvert<\delta$ | | |
| $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ | | |
| $\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ | | |

Nota: Recuerde que la expresión $A\Rightarrow B$ nos dice que cuando $A$ se cumple entonces $B$ también se cumple.

2. Tomando en cuenta el gráfico indica si las siguientes expresiones son verdaderas (V) o falsas (F)




| Expresión | V o F |
|---|---|
| $\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ | |
| $\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow f(x)<L$ | |
| $\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow f(x)<L+\varepsilon$ | |
| $x\in(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow f(x)\in(L-\in,L+\in)$ | |
| $x-a<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ | |

3. La expresión $\lim_{x\to a} f(x)=L$ trabajada en los anexos anteriores tiene la siguiente representación algebraica en términos de $\varepsilon$ y $\delta$:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ tal que } 0<\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon,$$

En palabras, para cada epsilon mayor que cero existe un al menos mayor que cero tal que si $x$ es distinto de $a$ y la distancia de $x$ a $a$ es menor que delta entonces la distancia de $f(x)$ a $L$ es menor que epsilon.

Donde $x \to a$ corresponde a la desigualdad $0<|x-a|<\delta$ que implica que para $f(x)$ y $L$ se debe cumplir la desigualdad $|f(x)-L|<\varepsilon$

Con base en el ejercicio uno escriba una representación algebraica alternativa a la dada anteriormente

4. Utilizando la representación algebraica complete el siguiente cuadro:

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to 2} 2x+1=3$ | $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que $0<\vert x-2\vert<\delta \Rightarrow \vert(2x+1)-3\vert<\varepsilon$ |
| $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ | |
| | $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que $0<\vert x-5\vert<\delta \Rightarrow \vert(2x^2+x)-54\vert<\varepsilon$ |
| $\lim\limits_{x\to 0} \cos x=1$ | |
| | $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que $0<\vert x-s\vert<\delta \Rightarrow \vert g(x)-H\vert<\varepsilon$ |