EVOLUCIÓN DE LA ABSTRACCIÓN MATEMÁTICA DEL CONCEPTO DE DIVISIBILIDAD: EL CASO DE ALUMNOS DE NIVEL SECUNDARIA HASTA EL NIVEL SUPERIOR

Faustino Vizcarra Parra José Vidal Jiménez Ramírez, Martha Catalina Guzmán Reyes
faustinovizcarra@uas.edu.mx, vidaljr@uas.edu.mx, mcmacatty@hotmail.com
Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS), Secretaría de Educación Pública de Sinaloa (SEP), México.

Tema: Pensamiento Algebraico.
Modalidad: P.
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años).
Palabras clave: Mínimo Común Múltiplo, Máximo Común Divisor, Divisibilidad y Lenguaje Algebraico.

Resumen

En el estudio participaron 36 alumnos de tercero de secundaria, 57 de primero bachillerato, 34 de segundo de bachillerato, 39 de tercero de bachillerato de la fase Físico-Matemáticas y 34 estudiantes de primer grado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, México.

Cada estudiante dio respuesta al problema: demuestra que la suma de tres números enteros consecutivos cualquiera, es un número divisible entre 3.

Las respuestas proporcionadas por los estudiantes se dieron desde la aritmética utilizando los conceptos de múltiplo o divisor, y desde el algebra implementando los conceptos de divisor y la definición de divisibilidad.

En los tres niveles educativos se observan errores en el uso del lenguaje matemático. Los errores que prevalecen son: separar números o expresiones algebraicas mediante comas y luego sumarlos, y realizar una suma y en la misma secuencia después del signo igual dividir por 3. Así mismo, se observan otros errores, como igualar una suma algebraica a cero y despejar la variable, sumar términos no semejantes, falta de uso de paréntesis al momento de dividir un binomio por 3, y en divisiones (expresadas como fracciones) cancelar números o variables de manera irregular.

Introducción

La teoría de la divisibilidad surge esencialmente para organizar relaciones entre números; desde los pitagóricos, pasando por Euclides y llegando hasta nuestros días, este tema ha ocupado la atención y merecido el esfuerzo de los mejores matemáticos.

Dos conceptos importantes implícitos en la divisibilidad son el de *múltiplo* y el de *divisor*. Estos conceptos, en secundaria, no se incluyen en el plan 2006, plan que cursan los estudiantes de tercer grado (última generación del plan 2006). Actualmente se ven en el bloque 2 de primer grado de secundaria del programa vigente 2011.

En el bachillerato de la UAS, se abordan el primer semestre, en la primera unidad de Matemáticas I, y son abordados desde la aritmética. Después de la unidad I, se abordan en el transcurso del bachillerato, en la medida que se necesitan, desde la aritmética o desde el álgebra, pero no como tema central. Por lo general se abordan desde los objetos matemáticas *mínimo común múltiplo* y *máximo común divisor*, que son dos conceptos presentes en la teoría de divisibilidad.

En el caso de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, el concepto de *múltiplo* y el concepto de *divisor*, se ven en el segundo semestre de primer grado, en el tema de divisibilidad, en la segundad unidad de la asignatura de Álgebra Superior, a un nivel más abstracto con respecto al bachillerato.

Por lo que es de interés conocer la evolución de la abstracción del concepto de divisibilidad, en estudiantes de tercero de secundaria hasta primer grado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas.

Desarrollo

En este estudio, participaron 36 alumnos de tercero de secundaria, 57 de primero bachillerato, 34 de segundo de bachillerato, 39 de tercero de bachillerato de la fase de físico-matemáticas y 34 estudiantes de primer grado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas.

Cada uno de los estudiantes dio respuesta al problema: *demuestra que la suma de tres números enteros consecutivos cualquiera, es un número divisible entre 3*.

Los estudiantes de tercer grado, no cuentan con un referente de divisibilidad visto de manera explicita.

Entre el bagaje de definiciones correspondientes al tema de divisibilidad, los estudiantes de bachillerato cuentan con las siguientes generalizaciones (Ylé Martínez, Juárez Duarte, & Flórez Arco, 2008):

1) *Algoritmo de la división: Cuando* D *y* $d \in N$, $D > d$ *y, además,* d *no es divisor de* D*, entonces, existen los naturales* c *y* $r < d$*, tales que* $D = dc + r$.

2) *Sí* a, d *y* $c \in Z$*, y,* $ab = c \neq 0, \Leftrightarrow c \div a = b$ *y* $c \div b = a$.

Cabe aclarar que cuando los estudiantes no han captado que la expresión $ab = c$ es equivalente a $c \div a = b$ y $c \div b = a$, no identifican que si c es múltiplo de a y b, entonces éstos son divisores de *c*. Al tratar de resolver problemas sobre divisores su consecución, para muchos, no es fácil cuando el enunciado se fundamenta sobre aspectos relacionados con la idea de múltiplos y viceversa (Sierra, González, García, & González, 1977).

Los estudiantes de primer grado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas cuentan con la siguiente definición (Cárdenas, Lluis, Ragui, & Tomás, 1995): *Si a y b son números enteros, decimos que b divide a a si existe un entero q tal que* $a = bq$. A demás de haber cursado el tema de divisibilidad.

Lo anterior es la parte medular en cuanto a contenidos que los estudiantes necesitan para resolver la situación planteada, de a cuerdo con su nivel de estudio. Los resultados al problema propuesto se muestran en las siguientes tablas.

Tabla 1. Porcentajes de respuestas de los estudiantes de tercer grado de secundaria.

Respuesta	Porcentaje
x, x+1, x+2 5+6+7=18 $\frac{18}{3}=6$ Si es porque 18 se puede dividir entre 3 y da 6	11.1%
x1 + x2 = x1 $8+9+10=\frac{27}{3}=9$	2.8%
x, x+1, x+2 $2+3+4=\frac{9}{3}=3$ Que la suma de los x le da 3 y la suma de los numeros le dan 3 eso es un multiplo de 3	8.3%
x+x+1+x+2 x5+x6+7x=18x 18/3=6 (6)(3)=18 por que 6x3=18 entonces eso quiere decir que $\frac{18}{3}=6$ por eso es un número divisible de 3	5.6%
x, x+1, x+2 $\frac{3x+3}{3}=x$ $\frac{3+4+5}{3}=4$ como al sumar los 3 numeros consecutivos entre 3 me dio un numero entero [illegible]	5.6%
x+11, x+10, x+15 = 3x+36 $\frac{3x+36}{3}=12$	2.8%
x, x+6, x+7 $=\frac{18}{3}=6$ Si, Por que al sumar los cantidades me da un numero divisible (entero)	25.0%
x, x+1, x+2, x+5+x+6+x+7 3x=18 $x=\frac{18}{3}$ x=6	8.3%

$x+x+1+x+2 \rightarrow 3x+3=0$, $3x=-3$, $x=\frac{-3}{3}$, $\boxed{x=-1}$ $x=1$, $x+1=2$, $x+2=3$ + = 6, $\frac{6}{3}=\boxed{2}$	5.6%
x x+1 x+2 Al sumar todas las "x" te da 3x y al sumar los números también da 3. Osea, que si son múltiplo de 3.	22.1%
No respondió o su respuesta no tiene que ver con lo solicitado	2.8%

Tabla 2. Porcentajes de respuestas de los estudiantes de primer grado de bachillerato.

Respuesta	Porcentaje
$5+6+7=18$ $3\times 6=18$	19.4%
$5+6+9=18$ 18 es divisible por 3 es decir $18\div 3=6$	10.5%
$1+2+3=6$ $3\overline{)6}^{\,2}$	7.0%
$2+3+4=\frac{9}{3}=3$	24.6%
$4+5+6=15/3=5\times 3=15$	1.7%
$8,9,10=27\div 3=9$	1.7%
$8,9,10=27=9\times 3$	14.0%
$x+(x+1)+(x+2)=3x+3\div 3=x+1$	1.7%
No respondió o su respuesta no tiene que ver con lo solicitado	19.4%

Tabla 3. Porcentajes de respuestas de los estudiantes de segundo grado de bachillerato.

Respuesta	Porcentaje
$2+3+4=9$ 9 es divisible de 3, $3\times 3=9$	53.0%
$2+3+4=9$ $9\,\%\,3=3$	8.8%
$2+3+4=9$ 9 es divisible por 3, es $3\div 9=3$ decir $9=3\times 3$	8.8%
$2+3+4=9\div 3=3$	8.8%

 ISSN 2301-0797

Tabla 3. Porcentajes de respuestas de los estudiantes de segundo grado de bachillerato.

Respuesta	Porcentaje
$n_1 + n_2 + n_3 = n_n/3$ $2 + 3 + 4 = 9/3 = 3$ Un numero puede ser divisible cuando la suma de $n_1 + n_2 + n_3 = n_n/3$ debe de quedar un número entero.	8.8%
$\frac{n+(n+1)+(n+1+1)}{3}$	5.9%
No respondió o su respuesta no tiene que ver con lo solicitado	5.9%

Tabla 4. Porcentajes de respuestas de los estudiantes de tercer grado de bachillerato (fase físico-matemático).

Respuesta	Porcentaje
$1+2+3=6$ $6=3\times 2$	2.6%
$5+6+7=18$ $18\div 3=6$ $9+10+11=30$ $30\div 3=10$	35.9%
$7+8+9=24$ $8\times 3=24$ $24/3=8$	2.6%
$2+3+4=\frac{9}{3}=3$ Al suma los tres numeros da un resultado de 9 y el 9 es divisible entre 3	20.5%
$4, 5, 6 = 15 \div 3 = 5\times 3$	25.6%
$(x+1)+(x+2)+(x+3)$ $n=5$ $(5+1)+(5+2)+(5+3)=$ $6+7+8=21$ $\frac{21}{3}=7$	5.1%
$\frac{n+(n+1)+(n+2)}{3}=10 \Rightarrow n+(n+1)+(n+2)=30$ $3n=27$ $n=\frac{27}{3}=9$ $n=9$ $n_2=10$ $n_3=11$	2.6%
No respondió o su respuesta no tiene que ver con lo solicitado	5.1%

Tabla 5. Porcentajes de respuestas de los estudiantes de primer grado de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas.

Respuesta	Porcentaje

ISSN 2301-0797

$4+5+6=15$ $a=15$ $a=bq$ 3 divide a 15, por que existe 5 tal que $15=3(5)$ $b=5$ $q=3$ $a=(5)(3)$	14.7%
1) Existe $\overbrace{n+1,\ k+1\ y\ p+1}^{\text{enteros consecutivos}}$ tal que $(n+1)+(k+1)+(p+1)=\frac{r}{3}$ Entonces $3[(n+1)+(k+1)+(p+1)]=r$ (def. de divisibilidad) [illegible] el entero q que [illegible] $r=3n+3+3k+3+3p+3$ multiplicado por los enteros consecutivos, es divisible entre 3. como cada expresión es múltiplo de 3, entonces r es divisible entre 3	2.9%
Para todo $n\in\mathbb{Z}$ $\frac{n+n+1+n+2}{3}=\frac{3n+3}{3}=\frac{3(n+1)}{3}=n+1$	35.4%
Sean 3 números consecutivos n, $n+1$ y $n+2$ $(n+n+1+n+2=3n+3$ ó $3(n+1)$ Por divisibilidad $a\mid b$ si $b=aq$ entonces $3n+3=3(n+1)$	29.4%
Demostración decimos que b divide a a si existe un entero q tal que $a=bq$ la suma de 3 números consecutivos $1+2+3=6=a$ $6=(3)(2)$ (por definición)	2.9%
No respondió o su respuesta no tiene que ver con lo solicitado	14.7%

Conclusiones

De acuerdo con los resultados obtenidos, las respuestas proporcionadas por los estudiantes se dieron desde la aritmética utilizando los conceptos de múltiplo o divisor, y desde el algebra implementando los conceptos de divisor y la definición de divisibilidad.

En las respuestas de los estudiantes de tercer grado de secundaria, se observa el uso del lenguaje algebraico, sin embargo, en algunos casos la respuesta es sustentada con un ejemplo particular; predomina el uso del concepto de divisor.

En primer grado de bachillerato predomina el uso de la aritmética, proporcionando casos particulares de la situación planteada; predomina el uso de la definición de divisor.

En el caso de segundo grado de bachillerato, también predomina el uso de la aritmética, es decir, proporcionan casos particulares y no logran la generalización, y predomina el uso de la definición de múltiplo.

Para los estudiantes de tercer grado de bachillerato, la aritmética sigue siendo la herramienta principal para dar solución a la situación planteada, en ellos predomina el uso de la definición de divisor.

Por último, en los estudiantes de primer grado de licenciatura, predomina el uso del lenguaje algebraico, y prevalece el uso de la definición de divisor más que la definición de divisibilidad. Se siguen dando casos particulares como demostración para la situación planteada.

En los tres niveles educativos se observan errores en el uso del lenguaje matemático. Los errores que prevalecen en los tres niveles son: separar números o expresiones algebraicas mediante comas y luego sumarlos, y realizar una suma y en la misma secuencia después del signo igual dividir por 3. En las tablas 1 a la 5, se observan otros errores, como igualar una suma algebraica a cero y despejar la variable, sumar términos no semejantes, falta de uso de paréntesis al momento de dividir un binomio por 3, y en divisiones (expresadas como fracciones) cancelar números o variables de manera irregular.

Bibliografía

Cárdenas, H., Lluis, E., Ragui, F., & Tomás, F. (1995). *Álgebra superior* (Tercera edición ed.). México, D. F.: Editorial Trillas.

Sierra, M., González, M. T., García, A., & González, M. (1977). *Divisibilidad.* España: Editorial síntesis, S. A.

Ylé Martínez, A., Juárez Duarte, J. A., & Flórez Arco, A. (2008). *Matemáticas I (Aritmética y álgebra).* México, Sinaloa: Talleres gráficos de once Ríos Editores.

Anexo I

EVOLUCIÓN DE LA ABSTRACCIÓN MATEMÁTICA DEL CONCEPTO DE DIVISIBILIDAD: EL CASO DE ALUMNOS DE NIVEL SECUNDARIA HASTA EL NIVEL SUPERIOR

INTRODUCCIÓN

La teoría de la divisibilidad surge esencialmente para organizar relaciones entre números; desde los pitagóricos, pasando por Euclides y llegando hasta nuestros días, este tema ha ocupado la atención y merecido el esfuerzo de los mejores matemáticos.

Dos conceptos importantes implícitos en la divisibilidad son el de *múltiplo* y el de *divisor*.
En el bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS) en México, éstos conceptos se abordan en el primer semestre, en la primera unidad de Matemáticas I, y son abordados desde la aritmética. Después de la unidad I, se abordan en el transcurso del bachillerato, en la medida que se necesitan, desde la aritmética o desde el álgebra, pero no como tema central.

Por lo general se abordan desde los objetos matemáticas *mínimo común múltiplo* y *máximo común divisor*, que son dos conceptos presentes en la teoría de divisibilidad.

En el caso de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UAS (FCFM-UAS), el concepto de *múltiplo* y el concepto de *divisor*, se ven en el segundo semestre de primer grado, en el tema de divisibilidad, en la segundad unidad de la asignatura de Álgebra Superior, a un nivel más abstracto con respecto al bachillerato.

Por lo que es de interés conocer la evolución de la abstracción del concepto de divisibilidad, en estudiantes de tercero de secundaria hasta primer grado de la FCFM-UAS.

DESARROLLO

En este estudio, participaron 36 alumnos de tercero de secundaria, 57 de primero bachillerato, 34 de segundo de bachillerato, 39 de tercero de bachillerato de la fase de físico-matemáticas y 34 estudiantes de primer grado de la FCFM-UAS.

Cada uno de los estudiantes dio respuesta al problema: *demuestra que la suma de tres números enteros consecutivos cualquiera, es un número divisible entre 3.*

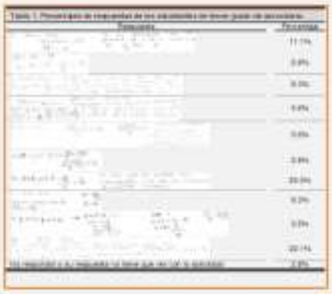
Los estudiantes de tercer grado, no cuentan con un referente de divisibilidad visto de manera explícita.
Entre el bagaje de definiciones correspondientes al tema de divisibilidad, los estudiantes de bachillerato cuentan con las siguientes generalizaciones (Ylé Martínez, Juárez Duarte, & Flórez Arco, 2008):

- *Algoritmo de la división: Cuando D y $d \in N$, $D > d$ y, además, d no es divisor de D, entonces, existen los naturales c y $r < d$, tales que $D = dc + r$.*
- *Si a, d y $c \in Z$, y, $ab = c \neq 0$, $\Leftrightarrow c \div a = b$ y $c \div b = a$.*

Cabe aclarar que cuando los estudiantes no han captado que la expresión $ab = c$ es equivalente a $c \div a = b$ y $c \div b = a$, no identifican que si c es múltiplo de a y b, entonces éstos son divisores de c.
Al tratar de resolver problemas sobre divisores su consecución, para muchos, no es fácil cuando el enunciado se fundamenta sobre aspectos relacionados con la idea de múltiplos y viceversa (Sierra, González, García, & González, 1977).

Los estudiantes de primer grado de la FCFM-UAS cuentan con la siguiente definición (Cárdenas, Lluis, Ragui, & Tomás, 1995): *Si a y b son números enteros, decimos que b divide a a si existe un entero q tal que $a = bq$.* A demás de haber cursado el tema de divisibilidad.

Lo anterior es la parte medular en cuanto a contenidos que los estudiantes necesitan para resolver la situación planteada, de a cuerdo con su nivel de estudio. Los resultados al problema propuesto se muestran en las siguientes tablas.



CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, las respuestas proporcionadas por los estudiantes se dieron desde la aritmética utilizando los conceptos de múltiplo o divisor, y desde el algebra implementando los conceptos de divisor y la definición de divisibilidad.

En las respuestas de los estudiantes de tercer grado de secundaria, se observa el uso del lenguaje algebraico, sin embargo, en algunos casos la respuesta es sustentada con un ejemplo particular; predomina el uso del concepto de divisor.

En primer grado de bachillerato predomina el uso de la aritmética, proporcionando casos particulares de la situación planteada; predomina el uso de la definición de divisor.

En el caso de segundo grado de bachillerato, también predomina el uso de la aritmética, es decir, proporcionan casos particulares y no logran la generalización, y predomina el uso de la definición de múltiplo.

Para los estudiantes de tercer grado de bachillerato, la aritmética sigue siendo la herramienta principal para dar solución a la situación planteada, en ellos predomina el uso de la definición de divisor.

Por último, en los estudiantes de primer grado de licenciatura, predomina el uso del lenguaje algebraico, y prevalece el uso de la definición de divisor más que la definición de divisibilidad. Se siguen dando casos particulares como demostración para la situación planteada.

En los tres niveles educativos se observan errores en el uso del lenguaje matemático. Los errores que prevalecen en los tres niveles son: separar números o expresiones algebraicas mediante comas y luego sumarlos, y realizar una suma y en la misma secuencia después del signo igual dividir por 3. En las tablas 1 a la 5, se observan otros errores, como igualar una suma algebraica a cero y despejar la variable, sumar términos no semejantes, falta de uso de paréntesis al momento de dividir un binomio por 3, y en divisiones (expresadas como fracciones) cancelar números o variables de manera irregular.

Referencias Bibliográficas

Cárdenas, H., Lluis, E., Ragui, F., & Tomás, F. (1995). *Álgebra superior* (Tercera edición ed.). México, D. F.: Editonal Trillas.

Sierra, M., González, M. T., García, A., & González, M. (1977). *Divisibilidad*. España: Editorial síntesis, S. A.

Ylé Martínez, A., Juárez Duarte, J. A., & Flórez Arco, A. (2008). *Matemáticas I (Aritmética y álgebra)*. México, Sinaloa: Talleres gráficos de once Ríos Editores.