IX CIEMAC
Congreso Internacional
sobre la Enseñanza de la
Matemática Asistida por Computadora
www.cidse.tec.ac.cr/ciemac

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Estudio de la manera de resolver un problema de existencia y unicidad por un grupo de profesores en formación

M.Sc. Félix Núñez Vanegas
Escuela de Matemática
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
fnunez@itcr.ac.cr

M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes
Escuela de Matemática
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
gsanabria@itcr.ac.cr

Resumen: Con el fin de estudiar la manera de resolver un problema de existencia y unicidad por un grupo de profesores en formación de la provincia de Cartago y determinar si lo que indica Antibí en su libro Métodos de Resolución de Problemas acerca de este tipo de demostraciones, se da también con este grupo, se aplicó un test en el que se pedía demostrar que un conjunto de dos vectores de IR^2 es base de IR^2. En este artículo se presentan los resultados.

Palabras clave: Existencia, unicidad, demostración, bases de un espacio vectorial

Abstract: In order to study how to solve a problem of existence and uniqueness by a group of teachers in training in the province of Cartago and to determine if indicating Antibí in his book Methods of Solving Problems about these kind of demonstrations is given also with this group, a test in which it was asked to demonstrate that a set of two vectors IR^2 is basis of IR^2. In this paper the results are presented.

Keywords: Existence, uniquiness, basis, vector space.

1. Introducción

Cuando se carece de un aprendizaje preciso de la noción de demostración, es difícil que se puedan abordar ciertas demostraciones de resultados matemáticos. Por tal razón, entrenar a un estudiante en métodos de demostración es muy importante y se requiere, por tanto, que tal noción paramatemática, según Chevallard (1998), forme parte de un programa de estudio. Es decir, es necesario que esa noción se convierta en un objeto matemático.

Usualmente en los cursos de matemática no se hace hincapié en métodos que ayuden a abordar un determinado problema, ya sea de conclusión conocida o bien desconocida. A la luz de algunas ideas que Antibí (2002) propone en su libro Métodos de Resolución de

Problemas, es que se realizó una experimentación acerca de cómo es que un grupo de profesores en formación, de la provincia de Cartago, proceden a darle solución a un problema de existencia y unicidad, con la intención de determinar si este grupo también resuelve este problema de la misma manera que lo indica el autor.

En los problemas de existencia y unicidad, por lo general su resolución, salvo en los casos en que la existencia de un tal elemento está garantizada por la vía de un teorema, es como mágica y artificiosa. El profesor Antibí es consciente de esa realidad y brinda un método para proceder de manera natural ante esos problemas.

Con este método, demostrar que un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial dado, es muy sencillo. No obstante en las aulas no se resuelven así. Es frecuente dividir el problema en dos partes: Que es un conjunto linealmente independiente y que es parte generatriz del espacio vectorial dado. Esto sin embargo lleva a los estudiantes a cometer errores, aplicando muy mecánicamente, el algoritmo establecido, desprovisto de cualquier significado.

2. Problemas de Existencia y Unicidad

En la mayoría de problemas de este tipo, los enunciados pueden escribirse bajo la forma: "Demostrar que existe uno y sólo un elemento de un conjunto E que satisface una propiedad dada". Las soluciones dadas a los problemas de esta categoría, por lo general son redactadas de forma tal que no se sabe cómo es que han sido encontradas.

Para solucionar los problemas de existencia y unicidad se pueden plantear así: Se considera el conjunto $V=\{x\in E / p(x)\}$ y se trata de probar dos cosas:

1. $V\neq\varnothing$ y

2. La cardinalidad de V es a lo sumo igual a uno.

Nótese que la cardinalidad de V es a lo sumo igual a uno significa que dicha cardinalidad es 0 o bien 1. Si la cardinalidad de V es 0, entonces $V=\varnothing$, pero esta posibilidad estaría descartada por la condición uno.

Para demostrar que $V \neq \emptyset$, se pueden presentar algunas situaciones. Utilizando un resultado que garantice la existencia sin saber cuál específicamente es el valor que satisface. Por ejemplo, para demostrar que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en IR, se podría recurrir al teorema de los valores intermedios.

Escribimos $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Claramente f es continua en IR, además $\lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = \infty$ por lo que existe un $c \in IR$ tal que $f(c) = 0$.

O bien, especificando un elemento de V. Para ello se puede en ocasiones transformar la función proposicional $p(x)$ por funciones proposicionales equivalentes, la última siendo de la forma $x = x_0$, donde $x_0 \in E$. Así, el ejemplo anterior se pudo haber resuelto así:

Se tiene que para todo $x \in IR$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

En el caso en que no se pueda proceder así, la búsqueda del elemento x de V, se puede hacer por condición necesaria, específicamente se prueba que $\forall x \in E$, se tiene que $p(x) \Rightarrow q(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = x_0$. Es decir, si tal elemento existiera, debería cumplir la serie de implicaciones de funciones proposicionales, por lo que al obtener $x = x_0$ se ha demostrado la unicidad. De esta forma, se demuestra que hay a lo sumo un elemento x_0 de E que verifica $p(x)$. Es decir se demuestra la unicidad. Para garantizar la existencia, hace falta ver que tal elemento satisface $p(x)$. En otras palabras, hay que verificar que x_0 está en V. Obsérvese que esta fase de la demostración es sumamente útil, no sólo porque permite vislumbrar el elemento que sirve, sino también para mostrar la unicidad.

Por lo general, en los ejercicios de este tipo, cuando se procede por condición necesaria, la unicidad se prueba dos veces. En efecto, hay una percepción errónea cuando se procede así. Al obtener x_0 así, se piensa que se ha probado la existencia, cuando en realidad se ha demostrado la unicidad. Luego, como existe este error, se procede a demostrar la unicidad de la siguiente manera: Se verifica que si dos elementos a, b satisfacen la función proposicional $p(x)$, entonces se concluye que $a = b$. De manera más precisa, se procede así

$\forall(a,b) \in ExE, (a \in V \ y \ b \in V \Rightarrow a = b)$. (*)

En lo que se refiere a la existencia, la mayoría de veces se exhibe un elemento x_0 que satisface $p(x)$. No obstante, estos problemas deben resolverse de la manera más natural posible, mostrándole al estudiante el procedimiento de búsqueda del elemento x_0 que funciona.

Debe quedar claro, que cuando se procede por condición necesaria, lo que se ha garantizado es la unicidad y no la existencia. Por tal razón no tiene sentido probar la unicidad de nuevo según (*). En tal caso, se habría probado dos veces la unicidad y no la existencia. Por eso, cuando se procede así, verificar que x_0 satisface $p(x)$, no es un paso demás, se debe hacer. Estas aclaraciones deben realizarse en el aula y comprenderse bien la lógica del procedimiento.

En ocasiones para efectos de examen, los estudiantes proceden a demostrar la unicidad con el método (*), ya que de esta forma, se aseguran algún puntaje del ejercicio.

3. Estudio de la manera de resolver un problema de existencia y unicidad por un grupo de profesores en formación

Enunciado del test

Demuestre que en el espacio vectorial $\left(R^2,+,.\right)$ sobre IR, el conjunto {(-1,2), (3,-1)} constituye una base. No use teoremas, la demostración debe ser hecha únicamente usando la definición de una base.

Este es un problema que corresponde a los del tipo Existencia y Unicidad.

Indicaciones orales dadas durante la sesión de experimentación

Se reafirmó la instrucción escrita de no usar teoremas, y que la demostración debe ser hecha únicamente usando la definición de una base. Se les indicó que no se podía usar, por ejemplo, el hecho de que el espacio $\left(R^2,+,.\right)$ es de dimensión 2.

Precisiones

No se impuso ninguna duración para responder al test. Las personas tomaron aproximadamente quince minutos. El test fue aplicado sin previo aviso.

Personas interrogadas

Este test fue aplicado a: 25 docentes en formación del área de matemática de la provincia de Cartago.

Resultados del test

Cuadro 1. Número de estudiantes y su porcentaje según tipo de respuesta dada a la Pregunta

Tipo de respuesta		Número	Porcentaje
Respuestas correctas	En una vez	1	4
	En dos veces	2	8
	Total	3	12
Respuestas incorrectas	Epistemológicas	6	24
	Error típico	3	12
	Otros	5	20
	Total	14	56
$Dim(IR^2) = 2$		2	8
No terminado		4	16
No hecho		2	8

Precisiones referentes a las diferentes rúbricas

- Respuestas correctas en una vez

Se trata de fichas en las cuales se demuestra:

$\forall (x, y) \in R^2$ se debe encontrar una pareja única (λ_1, λ_2) de IR2 tal que

$(x, y) = \lambda_1(-1, 2) + \lambda_2(3, -1)$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(-\lambda_1+3\lambda_2, 2\lambda_1-\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -\lambda_1+3\lambda_2=x \\ 2\lambda_1-\lambda_2=y \end{matrix}\right\}(S)$$

Se concluye entonces diciendo que el sistema (S) admite una única solución dado que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero o bien

$$(S)\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda_1=\dfrac{x+3y}{5} \\ \lambda_2=\dfrac{2x+y}{5} \end{matrix}\right\}$$

- Respuestas correctas en dos veces

En este caso se demuestra separadamente que

$$\forall(\lambda_1,\lambda_1)\in IR^2, \qquad \lambda_1(-1,2)+\lambda_2(3,-1)=(0,0)\leftrightarrow \lambda_1=0 \bigwedge \lambda_2=0$$

b) $\forall(x,y)\in IR^2 \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in IR^2: (x,y)=\lambda_1(-1,2)+\lambda_2(3,-1)$

- Respuestas incorrectas-epistemológicas

Se trata de fichas en las que el concepto de base no es claro. En algunos casos se confunde por ejemplo la definición de ser un conjunto linealmente independiente con un conjunto generador (Un caso). En cuatro fichas se encontró la frase "se debe mostrar que {(-1,2), (3,-1)} se puede escribir como combinación lineal", y luego demuestra que es un conjunto generador.

- Error Típico

Se trata de fichas en la que se pretende mostrar que {(-1,2), (3,-1)} es un conjunto l.i. Escriben una combinación lineal igualada a cero como escalar. De tal manera que de un lado de la igualdad se tiene un vector y del otro un número real.

- Otros

En 5 fichas de esta categoría se demuestra correctamente que {(-1,2), (3,-1)} es un conjunto linealmente independiente, pero la demostración de que es un conjunto generador es incorrecta.

- $Dim(IR^2) = 2$

Contrario a las indicaciones, hubo dos personas que utilizaron el hecho de que la dimensión del espacio es 2.

- No terminado

En cuatro fichas de esta categoría, se demuestra únicamente que {(-1,2), (3,-1)} es linealmente independiente

- No hecho

Son fichas en las que dos personas indican que no recuerdan nada. Incluso hay uno que manifiesta haber llevado álgebra hace dos años.

4. Conclusiones

Para ser un problema tan común en un curso de álgebra lineal, el número de respuestas correctas es muy bajo.

Los docentes muestran una gran preferencia por separar el problema justamente, porque, en los cursos se insiste sobre el siguiente punto: una base es una familia linealmente independiente y generadora, y por lo general, estas dos nociones son estudiadas por separado.

La mayoría de errores cometidos por las personas al resolver el ejercicio propuesto en este test provienen de la separación del problema en dos partes: independencia lineal y conjunto generador. Los resultados obtenidos con este grupo en esta experimentación, coincide con lo que señala Antibí, en el sentido de que se separa el problema en dos, y no se entiende lo que se hace. Es una manera algoritmizada de resolver este tipo de problemas.

Se da una mayor importancia a la separación del problema en dos partes, muchos porque así se les ha enseñado, y otros porque afirman es más fácil proceder así. No obstante, los resultados no avalan esa posición.

Se le debe brindar una mayor importancia al aprendizaje de métodos para resolver problemas de existencia y unicidad.

5. Referencias bibliográficas

Antibí, A. (2000). Métodos de resolución de problemas. Segunda Edición. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

Arce, C; Castillo, W; González, J. (2004) Álgebra lineal. Tercera edición. UCR. San Pedro, Costa Rica.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Tercera edición, Aique editor.

Lang, S. (1976). Álgebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano, S.A., México.