IX CIEMAC
Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora
www.cidse.tec.ac.cr/ciemac

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Experimentación sobre la aplicación de algunos métodos de demostración matemática

M.Sc Félix Núñez Vanegas

Tecnológico de Costa Rica-Costa Rica

fnunez@itcr.ac.cr

M.Sc Giovanni Sanabria Brenes

Tecnológico de Costa Rica-Costa Rica

gsanabria@itcr.ac.cr

Resumen: Con el fin de contribuir al abordaje de demostraciones de proposiciones matemáticas por razonamiento al absurdo, contrapositiva y el método directo y verificar que el desconocimiento de si se trata de un problema de conclusión conocida, o de conclusión desconocida, podría llevar a los docentes al fracaso en demostraciones matemáticas, se brindan algunas indicaciones sobre estos métodos de demostración y los resultados de un test aplicado a un grupo de profesores en formación de la provincia de Cartago del área de matemática, en el que se solicita demostrar un resultado de conclusión conocida, atinente a la teoría de conjuntos.

Palabras clave: Reducción al absurdo, contrapositiva, método directo, conjunto.

Abstract: To assist in addressing the mathematical propositions demonstrations by reasoning absurd, contrapositive and the direct method and verify that the lack of whether this is a known problem or conclusion does not lead teachers to the impossibility of achieving demonstrations mathematics, some considerations about these methods of proof are provided and raised to a group of teachers in training in the province of Cartago area of mathematics, a test in which it was asked to demonstrate a result of known conclusion pertains to set theory .

Keywords: Reduction to absurd, contrapositive, direct method, set

1. Introducción

Cuando se carece de un aprendizaje preciso de la noción de demostración matemática, es difícil que se puedan abordar ciertas demostraciones de resultados matemáticos. Por tal razón, entrenar a un estudiante en métodos de demostración es muy importante y se requiere, por tanto, que tal noción paramatemática, según Chevallard (1998), forme parte de un programa de estudio. Es decir, es necesario que esa noción se convierta en un objeto matemático.

Usualmente en los cursos de matemática no se hace hincapié en métodos que ayuden a abordar un determinado problema, ya sea de conclusión conocida o bien desconocida. Cuando se da este desconocimiento, existe la imposibilidad de demostrar proposiciones matemáticas o bien a cometer errores.

Cuando se tratan problemas de la forma P implica Q, se ha percibido que no todos pocos saben que, sólo en estos casos es que se puede razonar por contradicción. También se tiende a confundir la contrapositiva de una implicación con el razonamiento al absurdo, lo cual produce que no se sepa cómo iniciar una demostración de este tipo. En realidad, demostrar la contrapositiva de una implicación, no necesariamente aporta mayores herramientas en la resolución de un problema, justamente porque obedece al mismo tipo lógico: No Q implica No P.

No así el razonamiento por reducción al absurdo (o contradicción). En estos casos, se agrega al paquete de hipótesis dadas, una nueva: La negación de la conclusión. Tratando de investigar estos aspectos, nos dimos a la tarea de aplicar un test que confirmara, aunque sea en un contexto muy pequeño y nada considerable para un análisis estadísticos, que algunos docentes arrastran estas dudas, y que es importante dilucidarlas a partir de reflexiones sobre el tema, y desde luego, con fuertes entrenamientos.

2. Algunas consideraciones sobre el razonamiento al absurdo

Cuando se trata de resolver un problema, la mayoría de los personas comúnmente no se preocupan por la clase a la que pertenece. Es sabido que la resolución de problemas requiere de muchas habilidades cognitivas del individuo. Conocer si es de conclusión conocida o desconocida puede llevar al sujeto a evocar esquemas que realmente tengan alguna filiación con el problema. Es decir, en el proceso de resolución de un ejercicio, se constituyen profundas reflexiones en los sujetos (sobre todo niños y adolescentes) confrontados a una situación, según Vérgnaud (1990), se dan las filiaciones y rupturas entre conceptos establecidos con anterioridad, o en estado de preconstrucción, según Chevallard (2000), y el problema al que se está enfrentado. Si esto es así, entonces es importante ubicar el problema en alguna de las clases que Antibí (2000) enuncia: Conclusión conocida o conclusión desconocida. Eso daría algunas luces de cómo proceder en aquellos ejercicios de conclusión conocida, puesto que en ellos se observa una estructura ($\mathrm{H} \Rightarrow \mathrm{C}$) que a través de la lógica, se puede saber si lo que se afirma está o no correcto. Ante este tipo de problemas, se puede razonar al absurdo, o se puede buscar una proposición equivalente a C la cual se pueda llegar a probar de manera más sencilla desde H, o en forma directa, la estrategia depende del problema específico. Empero, no siempre se puede razonar al absurdo. Muchos piensan que es asunto de estética o gusto, lo cual es errado. Si eso fuera así, resolver el problema de encontrar el conjunto de números reales que satisfacen la ecuación $x^3 + 3x + x^2 + 3 = 0$, podría razonar al absurdo, a todas luces eso no es posible. Este tipo de razonamiento sólo se puede emplear cuando la conclusión es conocida, y sobre todo, cuando no se tenga una idea de cómo empezar. Añadir a las hipótesis dadas, una suplementaria, que corresponde a la negación de la conclusión, puede en ocasiones brindar luz sobre el camino a seguir. Cuando se razona de esta manera, el problema donde la conclusión es conocida, pasa a ser un problema donde no se sabe con certeza qué se va a concluir.

Por otro lado, existe cierta confusión entre la prueba de una proposición del tipo $\mathrm{H} \Rightarrow \mathrm{C}$ usando la contrapositiva (prueba indirecta) y el razonamiento al absurdo. En efecto, la mayoría de los estudiantes de matemática conoce que la contrapositiva de $H \Rightarrow C$ es $\neg C \Rightarrow \neg H$ y ambas son equivalentes. No obstante, desconoce que el razonamiento al absurdo y el método indirecto son formas diferentes de proceder. En variadas ocasiones hemos notado en una clase tal confusión. Para ejemplificar estas diferencias, considérese el siguiente problema:

Si el cuadrado de un número natural m es par entonces m es par.

Demostración

1. Usando la contrapositiva. Recordar que la contrapositiva de $P \to Q$ corresponde a $\neg Q \to \neg P$, y además $P \to Q \leftrightarrow \neg Q \to \neg P$, es decir son equivalentes.

Proceder por contrapositiva en este caso consiste en suponer que m no es par y vamos a concluir que m^2 no es par.

En efecto, si m no es par entonces m es de la forma $2n+1$ con $n \in IN$.

De esta manera $m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, lo cual demuestra que m^2 es impar.

2. Por razonamiento al absurdo

Supóngase que

m^2 es par y que m es impar.

$$\Rightarrow m^2 = 2n \quad y \quad m = 2l + 1, con\ l, n \in \square$$
$$\Rightarrow (2l+1)^2 = 2n$$
$$\Rightarrow 4l^2 + 4l + 1 = 2n$$
$$\Rightarrow 2(2l^2 + 2l) + 1 = 2n$$

Pero el lado izquierdo de la última igualdad corresponde a un número impar y el lado derecho a un número par. ¿Cómo es que pueden ser iguales?

Por lo tanto se ha llegado a una contradicción y se cumple que la conclusión es verdadera. Es decir, que también m es par.

En ocasiones se ha visto que este tipo de ejercicio se razona así:

Supongamos por contradicción que m no es par. Finalmente se llega a la supuesta contradicción de la hipótesis, o sea que m^2 es impar.

Si los profesores no tienen clara esa diferencia, mucho menos los estudiantes. La contrapositiva de una implicación es del mismo tipo de problemas de conclusión conocida y por tanto, puede caerse en la misma situación del inicio: que podría no saberse por dónde empezar.

3. Para investigar estas cuestiones, se propuso el siguiente test a los mismos estudiantes.

3. Experimentación sobre la aplicación de los métodos de demostración matemática razonamiento al absurdo, contrapositiva y el método directo

Presentación del test.

<u>Enunciado del test:</u>

Demuestre que si $P(A) = \{\varnothing\} \Rightarrow A=\varnothing$ de tres maneras:

1. Por reducción al absurdo
2. Usando la contrapositiva
3. De forma directa

Indicaciones orales dadas durante la sesión de experimentación

Se les indicó que podían usar teoremas y que debían redactar la demostración justificando cada detalle y con el rigor necesario. En caso de no poder demostrarla, escribir al menos qué había que demostrar en cada caso.

Precisiones

No se impuso ninguna duración para responder al test. Se tomaron aproximadamente quince minutos para responderlo.

Personas interrogadas

Este test fue aplicado a 25 docentes en formación, del área de matemática, del Instituto Tecnológico de Costa Rica, en el año 2004, cursando las materias finales de la carrera en Enseñanza de la matemática asisitida por computadora.

4. Análisis de resultados

Cuadro 2. Número de estudiantes y su porcentaje según tipo de respuesta dada a la Indicación 1

Tipo de respuesta		Número	Porcentaje
Respuestas correctas		0	0
Respuestas incorrectas	P(A) $\neq \varnothing \Rightarrow$ A=$\varnothing$	7	28
	Confunde contrapositiva	1	4
	Sabe escribirla pero no la termina	8	32
	Total	16	64
No hecho		9	36
Total		25	100

Precisiones referentes a la rúbrica del cuadro número dos

<u>Respuestas correctas:</u>

Se trata de fichas en las cuales se procede de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \textit{Suponga que } A \neq \varnothing \\
&\Rightarrow \exists x \in A \\
&\Rightarrow \{x\} \in P(A) \\
&\Rightarrow \{x\} \in \{\varnothing\} \textit{ pues } P(A) = \{\varnothing\} \\
&\Rightarrow \{x\} = \varnothing \\
&\Rightarrow x \in \varnothing \textit{ pues } \{x\} \subseteq \varnothing \wedge \varnothing \subseteq \{x\} \Rightarrow\Leftarrow
\end{aligned}
$$

<u>Respuesta incorrecta:</u>

P(A) $\neq \varnothing \Rightarrow$ A=$\varnothing$. Para siete personas razonar por contradicción consiste en negar la hipótesis y mostrar la conclusión.

Confunde contrapositiva

Hay únicamente un estudiante que confunde contrapositiva con razonamiento al absurdo.

No hecho

Un total de nueve estudiantes escriben algunas ideas aisladas.

Cuadro 3. Número de estudiantes y su porcentaje según tipo de respuesta dada a la Pregunta #2

Tipo de respuesta		Número	Porcentaje
Respuestas correctas		1	4
Respuestas incorrectas	$P(A) \neq \varnothing \Rightarrow A \neq \varnothing$	2	8
	Usa contradicción	1	4
	Sabe escribirla pero no la termina	7	28
	Total	11	44
No hecho		14	56
Total		25	100

Precisiones referentes a la rúbrica del cuadro número tres

Respuestas correctas:

Se trata de fichas en las cuales se procede de la siguiente manera:

$$2)\ P(A)=\{\varnothing\} \Rightarrow A=\varnothing \Leftrightarrow A\neq\varnothing \Rightarrow P(A)\neq\{\varnothing\}$$

$$Dem:$$

$$Si\ A\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A \Rightarrow P(A)\ tiene\ al\ menos\ dos\ elementos: \varnothing \wedge x$$

$$\Rightarrow P(A)\neq\{\varnothing\}$$

Respuesta incorrecta:

$P(A) \neq \varnothing \Rightarrow A \neq \varnothing$ Para dos estudiantes no es claro lo que significa la contrapositiva de una implicación.

Usa contradicción:

Se trata de una ficha en la que un estudiante procede por razonamiento al absurdo, creyendo que se trata de la demostración de la contrapositiva.

Hay siete estudiantes que escriben bien lo que se debe demostrar, pero no logran concluir lo que se quiere

No hecho

Un total de 14 estudiantes escriben algunas ideas aisladas.

Cuadro 4. Número de estudiantes y su porcentaje según tipo de respuesta dada a la Pregunta #3

Tipo de respuesta	Número	Porcentaje
Respuestas correctas	1	4
Sabe escribirla pero no la termina	4	16
No hecho	20	80

Precisiones referentes a la rúbrica del cuadro número cuatro

Respuestas correctas

Se trata de fichas en las cuales se procede de la siguiente manera:

3) $\forall A \; conjunto, \; A \in P(A)$

$\Rightarrow A \in \{\varnothing\}$

$\Rightarrow A = \varnothing$

No terminado

Se trata de fichas en las que los estudiantes escriben que se debe partir de la hipótesis y llegar a la conclusión. En ellas afirman que si $P(A) = \{\varnothing\}$ es porque A es el conjunto que no tiene elementos, que es justamente lo que se quiere demostrar.

5. **Conclusiones y recomendaciones**

Pese a que es un problema clásico, tan sólo un estudiante pudo resolverlo correctamente. Esto ayuda a confirmar que en las aulas se hace poco énfasis sobre el aprendizaje de métodos de demostración. Si no se conoce cuál es la contrapositiva de una implicación, podrían arrastrarse algunos errores conceptuales y decir por ejemplo que si f es una función continua en a entonces f es derivable en a. Claramente es un error. El recurso del método de demostración por reducción al absurdo podría ser útil. Recordemos que al razonar reducción al absurdo, a las hipótesis que se tienen se les une un nuevo paquete de hipótesis que provienen justamente de la negación de la conclusión. Esto hace en muchas ocasiones contar con más elementos para llegar a lo que se quiere.

Cuando el método directo no nos brinde un buen punto de partida que nos permita atinarle a la conclusión de manera natural, la contrapositiva probablemente tampoco, puesto que se trata del mismo tipo de problema. No así el razonamiento por contradicción.

En los ejercicios en los cuales se pide demostrar una proposición, es importante notar de si se trata de un ejercicio de conclusión conocida o desconocida. En el primer caso, que es el tratado en este artículo, se nota que probar la veracidad de la contrapositiva es equivalente a demostrar la proposición original y que en definitiva, esta estrategia no necesariamente brinda luz sobre cómo proceder a demostrar tal proposición. Si bien la contrapositiva es equivalente a la proposición, en ocasiones sin embargo, es un método eficaz para demostrar de una manera más agíl la proposición, pues las hipótesis NO(C) tienes muchos elementos que nos ayudar a deduicr NO (H).

Conocer estos métodos, y aplicarlos adecuadamente, es medular en el proceso de formación de los estudiantes y es importante entrenarlos en cada uno de ellos.

Es necesario establecer las diferencias entre una demostración por reducción al absurdo y por contrapositiva. Hacerlo podría significar que un estudiante tenga éxito en los problemas de este tipo lógico. Podría serle útil saber, sin embargo, cuál es la contrapositiva de P implica Q, porque puede contar con un nuevo teorema cuyo enunciado sería No Q implica No P, pero que es del mismo tipo lógico que P implica Q. Podría por ejemplo, a partir de del hecho de que si una función es derivable en a entonces es continua en a, serle útil saber su contrapositiva, que si la función no es continua en a entonces no es derivable a.

6. Referencias bibliográficas

Antibí, A. (2000). Métodos de resolución de problemas. Segunda Edición. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

Barrantes, H. (2009). Introducción a la matemática. EUNED, San José, Costa Rica.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Tercera edición, Aique editor.

Vergnaud, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels", Recherches en Didactique des Mathémathiques Vol. 10 (23): 133-170.