Actividades para la enseñanza del concepto parábola usando tecnología

Héctor Osorio Abrego.
Profesor jubilado, Universidad Autónoma de Chiriquí, Panamá.
hosorioa@cwpanama.net

Resumen: El taller que se propone consta de un conjunto de actividades que han sido diseñadas tomando como marco teórico el modelo de razonamiento de Van Hiele. Las actividades del taller se han diseñado para fomentar la enseñanza de algunas estrategias cognitivas generales tales como construcción de gráficas, reconocimiento de patrones y generalización. El desarrollo del mismo se hará de acuerdo al aspecto prescriptivo del modelo de Van Hiele. Al inicio se dará información respecto al objetivo que se pretende alcanzar así como establecer un diálogo donde se tratarán conocimientos previos.

Palabras clave: orientación dirigida, orientación libre, representación semiótica, tratamiento, conversión.

1. Introducción

En la literatura sobre Matemática Educativa se han presentado diversas propuestas de estrategias didácticas o actividades para la enseñanza y aprendizaje de las cónicas (Sánchez, 1996; Real, 2004; Díaz, 2007; Bifano y Ferragina, 2012; Bonilla, Parraguez y Solanilla, 2014). El taller que se propone consta de un conjunto de actividades que han sido diseñadas tomando como marco teórico el modelo de razonamiento de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1995; Jaime y Gutiérrez, 1996) lo que implica que el desarrollo de ellas para la enseñanza y el aprendizaje debe tener en cuenta dicho modelo.

Sánchez (1996) señala que "las matemáticas no sólo son conceptos y procedimientos específicos; también son un conjunto de estrategias cognitivas generales que actúan en tres ámbitos distintos pero complementarios: resolución de problemas, descubrimiento de propiedades o invención de conceptos y evaluación de conjeturas" (p. 51). Además, menciona entre otras, las siguientes estrategias: construcción de dibujos y modelos materiales, búsqueda de regularidades, pautas o analogías y generalización; indicando finalmente que “estas y otras estrategias cognitivas, comunes a muchas otras ciencias deben ser enseñadas como un contenido de aprendizaje en las mismas condiciones que los conceptos y los procedimientos más específicos” (Sánchez, 1996, p. 52). Las actividades del taller se han diseñado para fomentar la enseñanza de éstas estrategias.

La elaboración del taller se ha hecho de forma tal que el desarrollo del mismo, en un aula de clase, permite poner en práctica algunos principios didácticos generales. Algunos de estos principios (Sánchez, 1996) son:

1. El docente debe diseñar actividades estructuradas de manera que emerjan las concepciones previas.
2. El aprendizaje requiere la participación activa del estudiante basado |en la consideración de sus necesidades, intereses y capacidades.
3. La metodología didáctica favorecerá, además de la exposición por parte del docente, el diálogo y la discusión de los alumnos entre sí y de estos con el docente.
4. Las tareas instructivas deben permitir a los alumnos utilizar activamente sus propios conocimientos y habilidades para producir un desarrollo de su autoestima y de sus formas de pensamientos originales.
5. La presentación de contenidos nuevos deben insertarse en situaciones de problemas planteados en un entorno que anime a los estudiantes a explorar, formular y comprobar conjeturas, facilitar generalizaciones, discutir y aplicar los resultados de sus análisis.
6. Junto con la resolución de problemas, la realización de investigaciones, las exposiciones del docente, la discusión de éste con los alumnos y de estos entre sí, la enseñanza de la matemática también debe incluir prácticas sobre procedimientos rutinarios y manipulación con modelos y recursos apropiados.

En matemática es necesario el uso de diferentes representaciones de los objetos matemáticos. Duval, autor de la Teoría de registros semióticos de representación, “reconoce que el único medio para la aprehensión cognoscitiva de los objetos matemáticos, en la enseñanza, son sus representaciones semióticas” (Díaz, 2007, p. 210). Los tratamientos o cambios en una misma representación, así como la conversión de una representación a otra, son transformaciones que revelan diferentes características de los objetos abstractos y permiten llegar a conocerlos. Por ello, “es necesario transitar con el concepto por varias representaciones con el propósito de ampliar la gama de sus significados” (Díaz, 2007, p. 210).

Los tratamientos y las conversiones se han contemplado en las actividades del taller. En particular, se han diseñado actividades para la conversión de una representación en lenguaje natural o de una representación gráfica del concepto parábola a una representación algebraica (ecuación).

2. Aspectos generales

El desarrollo del taller se hará de acuerdo al aspecto prescriptivo del modelo de Van Hiele. El objetivo del mismo es presentar una estrategia didáctica al docente participante de manera que se le facilite desarrollar clases activas en torno al concepto parábola, donde el estudiante mediante observación, exploración, experimentación y formulación de conjeturas pueda llegar a conocer propiedades y relaciones entre los elementos de dicho objeto matemático, por si mismo y con guía del docente.

A los asistentes se les facilitarán copias de las actividades de aprendizaje programadas, las cuales constituyen guías para la realización de la fase "orientación dirigida" del modelo de Van Hiele. Así mismo, se proponen y facilitan copias de actividades que son la base de la fase de "orientación libre" del modelo aludido.

El taller está dirigido a docentes que laboren en secundaria. Se requiere de un laboratorio de informática que cuente con el programa Geogebra y un proyector digital. Es preferible que los participantes posean las ideas básicas sobre el uso del programa Geogebra. Las actividades han sido diseñadas para ser desarrolladas en cuatro (4) horas, dos sesiones de dos (2) horas cada una.

3. Guías de trabajo

En la guía que a continuación se presenta las palabras en mayúscula aluden a herramientas o comandos del programa Geogebra. Al finalizar cada actividad se debe limpiar la pantalla a menos que de forma explícita se señale lo contrario.

CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA PARÁBOLA

Objetivo: Asimilar de manera visual la forma común particular de las representaciones gráficas de las parábolas.

ACTIVIDAD No. 1

1. En la ventana inicial de Geogebra oculta la vista algebraica y los ejes. Utilizando RECTA construya una recta en cualquier parte del plano y utilizando PUNTO construya un punto fuera de la recta. Denota a la recta con la letra d y al punto con la letra F.

2. Utilizando PARÁBOLA construya la gráfica de una parábola. Para ello, haga CLIC en el punto F y seguidamente haga CLIC en la recta d. Observa la configuración creada.
3. Utilizando ELIGE Y MUEVE, modifica la posición de la recta d en el plano y observa las configuraciones correspondientes. De igual manera, modifica la posición del punto F en el plano y observa las configuraciones correspondientes. (NO BORRE LA PANTALLA)

Nota: Las configuraciones de puntos que has observado son representaciones gráficas del concepto *parábola*. El punto F se llama foco de la parábola y la recta d se llama directriz de la parábola. ¿Qué relación existe entre el foco, la directriz y los puntos de la parábola? A continuación usted investigará y determinará esta relación.

LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

ACTIVIDAD No. 2

1. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto en la parábola, denótalo P. Utilizando PERPENDICULAR construya una perpendicular a la recta d y que pase por el punto P. Utilizando INTERSECCIÓN construya la intersección de la perpendicular con la recta d, denótalo Q. Utilizando SEGMENTO construya el segmento que tiene por extremos a P y F.
2. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida la distancia de P a F (distancia de P al foco F) y de P a Q (distancia de P a la directriz d). ¿Qué relación existe entre la distancia de P al foco y la distancia de P a la directriz? _______________________. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si mueves el punto P a lo largo de la parábola. ¿Se conserva la relación anterior para los distintos puntos de la parábola? ____________.
3. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si modificas la posición de la recta d en el plano. ¿Se conserva la relación entre las distancias de P al foco y las distancias de P a la directriz para cada parábola así construida? ____________________.
4. De igual manera a como procediste en el punto anterior, modifica la posición del punto F en el plano. ¿Se conserva la relación entre las distancias de P al foco y las distancias de P a la directriz para cada parábola así construida? ____________________________.
5. Utilizando PUNTO construya un punto M que no se encuentre en la parábola. Mida las distancias de M a la directriz y al foco. ¿Cómo son las distancias del punto M (que no se encuentra en la parábola) a la directriz y al foco? ____________________________.

Mueva el punto M a distintas posiciones del plano y observe como son las distancias de M a la directriz y al foco de la parábola. Anote sus observaciones ___________________.

6. Con base a las experiencias anteriores formula una conjetura y con fundamento en ella (asumiendo que es verdadera) elabora una definición de parábola como lugar geométrico:

____

____

____

____

____

CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA PARÁBOLA. PROPIEDADES.

ACTIVIDAD No. 3

1. Siguiendo las indicaciones dadas en los numerales 1 y 2 de la ACTIVIDAD No. 1, construya una parábola. Utilizando PERPENDICULAR construya una perpendicular a la directriz que pase por el punto F. Denótala con la letra m. Utilizando INTERSECCIÖN construya las intersecciones de la recta m con la parábola y con la directriz. Denota estos puntos de intersección con V y F', respectivamente.

   Nota: La recta m, perpendicular a la directriz que pasa por el foco, se denomina eje focal de la parábola. El punto V, intersección del eje focal y la parábola, se denomina vértice de la parábola.

2. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida la distancia del vértice al foco F y la distancia del vértice a la directriz o sea a F'. ¿Qué relación existe entre estas distancias? _____________. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si desplazas el foco F a diferentes posiciones del plano. ¿Se conserva la relación entre las distancias del vértice al foco F y la del vértice a la directriz (a F')? ___________________.

3. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si desplazas la directriz a diferentes posiciones del plano. ¿Se conserva la relación entre las distancias del vértice al foco y la del vértice a la directriz (a F')? ____________________.

4. Formula una conjetura con base a las experiencias anteriores: _______________________ ____. Argumenta la validez de tu conjetura.

5. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto P en la parábola. Utilizando SEGMENTO construya el segmento PF. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida la distancia del punto P de la parábola al foco F de la parábola.

6. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora para determinar el punto de la parábola cuya distancia al foco es la menor de todas. ¿A qué conclusión has llegado? _______________.

Nota: La distancia del vértice al foco se denomina distancia focal de la parábola. La designaremos por p ($p > 0$). (NO BORRE LA PANTALLA)

ACTIVIDAD No. 4

1. Utilizando PERPENDICULAR construya una perpendicular al eje focal y que pase por el foco F. Utilizando INTERSECCIÓN construya las intersecciones de la recta perpendicular al eje focal en F y la parábola, denótalos con M y M', respectivamente. Utilizando SEGMENTO construya el segmento MM'. Utilizando OBJETO IN(VISIBLE) oculta la perpendicular al eje focal.

   Nota: El segmento determinado por dos puntos distintos de una parábola se denomina cuerda. Una cuerda que pase por el foco de la parábola se denomina cuerda focal. La cuerda focal que es perpendicular al eje focal de la parábola se denomina "lado recto".

2. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida la longitud del lado recto. ¿Qué relación existe entre la longitud del lado recto y la distancia focal? Para ello, utilizando ELIGE Y MUEVE explora moviendo tanto el foco como la directriz a distintas posiciones en el plano y observa para cada posición, tanto la del foco como la de la directriz, las magnitudes del lado recto y la distancia focal. ___________________________________.
3. ¿Qué sucede con la parábola, si el foco F se acerca o se aleja de la directriz d? ______________________________________. ¿Puedes dar una explicación de tu punto de vista? ____.
4. ¿Qué sucede con la parábola si el foco F se coloca sobre la directriz d? _______________
5. La parábola y su foco se encuentran en uno de los dos semiplanos determinados por la directriz. ¿Qué sucede con la parábola si el foco F se coloca en el otro semiplano determinado por la directriz? ____.
6. ¿Qué sucede con la parábola si el foco F se mueve a la misma distancia de la directriz? ____

ACTIVIDAD No. 5

1. Siguiendo las indicaciones dadas en los numerales 1 y 2 de la ACTIVIDAD No. 1, construya una parábola. Construya el eje focal de la parábola. Utilizando PUNTO EN

OBJETO construya un punto en la parábola. Denótalo con la letra P. Utilizando PERPENDICULAR construye una recta perpendicular al eje focal que pase por el punto P. Utilizando INTERSECCIÓN construya los puntos de intersección de la recta perpendicular al eje focal, con el eje focal y con la otra rama de la parábola. Denótalos con las letras G y P', respectivamente.

2. Utilizando ÁNGULO, verifica que la recta PP' es perpendicular al eje focal, para ello haga CLIC sucesivamente en los puntos P, G y F. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mida las distancias de P a G y de P' a G. ¿Qué observas?, ¿Las distancias PG y P'G son iguales? _______________

   Nota: En estas circunstancias, en que P y P' se encuentran en una misma recta perpendicular a la recta que representa al eje focal y cuyas distancias a dicha recta son iguales, se dice que P' es un punto simétrico de P con respecto a la recta y viceversa, que P es simétrico de P' respecto a la recta.

3. Utilizando ELIGE Y MUEVE, mueve el punto P a lo largo de la parábola. ¿Qué observas? ¿Para cada nuevo punto P, las rectas PP' son perpendiculares al eje focal?, ¿Las nuevas distancia PG y P'G son iguales?, ¿Todo punto de la parábola tiene un punto simétrico con respecto al eje focal que se encuentra en la misma parábola? ____

4. Repite las experiencias del numeral 3 moviendo el foco F a otras posiciones del eje focal a uno y otro lado de la directriz, así como la directriz a otras posiciones del plano. Para todas las nuevas parábolas, ¿tus respuestas a las interrogantes del numeral 3 siguen siendo las mismas? ____

   Nota: Dada una figura, si cualquier punto de la figura tiene su simétrico, con respecto a una recta, en la misma figura, se dice de esa figura que tiene simetría axial o que es axialmente simétrica y que la recta es su eje de simetría.

5. De las experiencias realizadas en los numerales 3 y 4, y de lo expuesto en la nota anterior, ¿a qué conclusión llegas? ____.

ACTIVIDAD No. 6

1. Siguiendo las indicaciones dadas en los numerales 1 y 2 de la ACTIVIDAD No. 1, construya una parábola. Construya el eje focal y el vértice V de la parábola. Construya el lado recto denominando sus extremos con M y M', respectivamente. Construya un punto

P en la parábola. Construya el segmento perpendicular de P al eje focal denominando al pie de la perpendicular en el eje focal con Q. Construya el segmento VQ.

2. Utilizando Distancia o Longitud determina las longitudes del lado recto (segmento MM') y de los segmentos VQ y PQ.
3. Analiza las longitudes de los segmentos anteriores y determina una relación entre sus medidas. ¿Cuál es esa relación? ______________________________________. Explora moviendo el punto P a otras posiciones en la parábola o moviendo el foco F y la directriz d de la parábola a otras posiciones. ¿Se mantiene la relación? ___________. Formula una conjetura de acuerdo a tus observaciones y experiencias: __________________________
____

CAMBIO DE REGISTRO DE REPRESENTACIÓN PARA EL CONCEPTO PARÁBOLA

Hasta aquí hemos utilizado dos registros de representación del concepto parábola. Iniciamos con las representaciones gráficas y a partir de las gráficas de parábolas estudiamos las condiciones que satisfacen los puntos de una parábola permitiendo esto representar el concepto de parábola como una expresión escrita en lenguaje natural (expresión utilizada para definir el concepto de parábola). Ahora, aprovecharemos la potencia de cálculo simbólico que posee Geogebra para cambiar a otro registro de representación. Para ello, trabajaremos en una pantalla con las vistas gráfica y algebraica activadas. Estudiaremos algunas características de la nueva representación para parábolas con vértices en el origen de coordenadas, eje focal en el eje "y" y foco localizado en la parte positiva del eje "y".

ACTIVIDAD No. 7

1. En una pantalla limpia activa las vistas gráfica y algebraica si no lo están. Utilizando INTERSECCIÓN construya un punto en el origen del sistema de coordenadas, denótalo O. Este punto será el vértice de la parábola que se construirá a continuación. Utilizando PUNTO EN OBJETO construya un punto en la parte positiva del eje "y", denótalo F. Utilizando SIMETRÍA AXIAL construya el punto simétrico de F con respecto al eje "x", denótalo F'. Utilizando PERPENDICULAR construya una recta perpendicular al eje "y" y que pase por F', denótala d. Utilizando PARÁBOLA construya la parábola con foco F y directriz d. (El eje focal de la a parábola así construida es el eje "y", el vértice es el origen del sistema de coordenadas y el foco se encuentra en la parte positiva del eje "y").

2. Construya el lado recto denominando sus extremos con M y M’, respectivamente (segmento MM’). Construya un punto P en la parábola. Construya el segmento perpendicular de P al eje focal denominando al pie de la perpendicular en el eje focal con Q. Construya el segmento OQ.

Nota: Observa que en la Vista Algebraica, bajo el acápite Segmento, aparecen los segmentos MM’, OQ y PQ con otros nombres y sus respectivas longitudes. En la Vista Gráfica, resaltando con el puntero los segmentos, aparecen resaltados en la Vista Algebraica los segmentos respectivos y sus longitudes; y viceversa.

3. Teniendo presente la relación encontrada en el numeral 3 de la Actividad 6, escribe la relación entre las longitudes de los segmentos PQ, MM’ y OQ. ____________________. Utilizando la Barra de Entrada verifica la relación creando variables dependientes para representar las magnitudes que aparecen en dicha relación y que son función de las longitudes de los segmentos.
4. Observando la Vista Algebraica, contesta las siguientes preguntas: ¿Qué relación existe entre la longitud del segmento PQ y la abscisa del punto P? ______________________. ¿Qué relación existe entre el cuadrado de la longitud del segmento PQ y el cuadrado de la abscisa del punto P?______________________. ¿Qué relación existe entre la longitud del segmento OQ y la ordenada del punto P? ______________________. Escribe la relación señalada en el numeral anterior en términos de las coordenadas del punto P y la longitud del lado recto. ______________________________.
5. En la Vista Algebraica (acápite Cónica) aparece una ecuación. Esta ecuación es la ecuación de la parábola que aparece en la Vista Gráfica. La ecuación tiene la forma $x^2 – Ay = 0$, escríbela ____________________. Escribe la ecuación en la forma $x^2 = Ay$, para ello a CLIC sobre la forma $x^2 – Ay = 0$ con la tecla derecha del ratón y selecciona la forma correspondiente _______________. ¿Es esta ecuación igual a la que escribiste en el numeral 4? ____________.
6. Construya el segmento OF. Determina si existe alguna relación entre el coeficiente A de la ecuación $x^2 = Ay$ y la distancia focal p (p>0). ¿Cuál es tu respuesta? ______________.
7. De igual manera, determina si existe alguna relación entre el coeficiente A de la ecuación $x^2=Ay$ y la longitud del lado recto. ¿Cuál es tu respuesta? ________________________.
8. Expresa A, el coeficiente de y en la ecuación $x^2 = Ay$, en términos de p (p>0), distancia focal, A = __ p. De esta manera la ecuación $x^2 = Ay$ se puede escribir como $x^2 =$ ___ py.

ACTIVIDAD No. 8

1. Teniendo presente la definición de parábola como lugar geométrico obtenida en la Actividad No. 2 prueba que $x^2 = 4py$ ($p>0$) es la ecuación de una parábola con vértice en el origen del sistema de coordenadas, eje focal coincidiendo con el eje "y" y foco F(0, p), es decir, distancia focal igual a p ($p > 0$). Compárala con la ecuación que aparece en la Actividad No. 7.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

Nota: De manera análoga a las Actividades 6, 7 y 8 se pueden realizar actividades para determinar las representaciones por medio de ecuaciones de parábolas con focos en el lado negativo del eje "y" o parábolas con eje focal en el eje "x", vértice en el origen y focos tanto en la parte positiva como en la negativa del eje "x". Así mismo, se puede generalizar aún más la situación para encontrar las representaciones de las parábolas por medio de ecuaciones para los casos en que el vértice se encuentre en cualquier punto (h, k) del plano y cuyo eje focal ya sea paralelo al eje "x" o al eje "y".

CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA A PARTIR DE LA ECUACIÓN $x^2 = 4py$.
Verificación de sus características.

ACTIVIDAD No. 9

1. Construya la gráfica de la ecuación $x^2 = 8y$. Para ello, escribe la ecuación en la barra de entrada de datos y pulsa la tecla ENTRAR. ¿Qué observas? ________________________
   ¿Para qué valores de y está definida la curva? ___________________________________
   ¿En qué dirección y sentido se abre la parábola? _________________________________
2. Teniendo presente lo visto en la actividad anterior, ¿cuáles son las coordenadas del foco F de la parábola? F(__, __).
   Escribe este punto en la barra de entrada y da ENTRAR. ¿Qué observas? ______________
   ¿Cuáles son las coordenadas del vértice V de la parábola? V(__, __).

Escribe este punto en la barra de entrada y da ENTRAR. ¿Qué observas? _____________

¿Cuál es la ecuación de la directriz de la parábola? ______________________________

Escriba la ecuación de la directriz de la parábola en la barra de entrada y da ENTRAR. ¿Qué observas? ____

3. Utilizando PUNTO EN OBJETO, construya un punto sobre la parábola y desígnelo con la letra P. Utilizando PERPENDICULAR trace una recta perpendicular a la directriz de la parábola y que pase por P. Utilizando INTERSECCIÓN construya el punto de intersección de las dos rectas. Denomine el punto de intersección con la letra Q. Utilizando SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS construya el segmento PF. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD calcule las distancias de P a Q (distancia de P a la directriz) y de P a F (distancia de P al foco F).

   ¿Qué relación existe entre la distancia de P a Q y la distancia de P a F? _______________

4. Utilizando ELIGE Y MUEVE explora y observa que sucede si mueves el punto P a lo largo de la parábola. ¿Siguen siendo iguales las distancias de todos los puntos P de la parábola, a la directriz y al foco F? ____

5. (En lo que sigue bajo ninguna circunstancia mueva el foco o la directriz de la parábola). Construya la recta perpendicular al eje y que pasa por el foco. Construya los puntos de intersección de esta recta con la parábola. Denótelos con M y M’, respectivamente. Utilizando SEGMENTO construya el segmento determinado por los puntos de intersección M y M’, es decir, el lado recto. Utilizando OBJETO (IN)VISIBLE, oculta la recta MM’.

6. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD calcula la longitud del lado recto MM’. ¿Cuál es el valor de la longitud del lado recto MM’._______________.

   ¿Qué relación existe entre la longitud del lado recto y el coeficiente de y de la ecuación de la parábola? ____

7. ¿Qué relación existe entre la distancia del vértice de la parábola al foco (o sea la distancia focal $p > 0$) y la longitud del lado recto?____________________________________

8. ¿Qué relación existe entre la distancia del foco a la directriz de la parábola y la longitud del lado recto? ____

ACTIVIDAD No. 10

Nota: A continuación construirás una familia de parábolas, observaras las ecuaciones correspondientes a cada una de ellas y verificarás, una vez más, algunas de sus características.

1. Construya una familia de parábolas partiendo de sus ecuaciones. Para ello, definirás una ecuación general de la siguiente forma: utilizando DESLIZADOR crea una variable p (que denotará la distancia focal) con dominio $0 \leq p \leq 20$, luego escribe en la barra de entrada la ecuación $x^2 = 4py$ y da ENTRAR. ¿Qué observas? ____________________ Mueve el punto del deslizador. ¿Qué observas? ________________________________
2. ¿Cuáles son las coordenadas de los focos de las parábolas F(__, __). Escríbelas en la barra de entrada y da ENTRAR. ¿Qué observas? ____________________________. Mueve el punto del deslizador. ¿Qué observas? ___________________________________. ¿Qué relación hay entre p y los coeficientes de y de las distintas ecuaciones? __________
3. Construya una perpendicular al eje focal (eje de las y) que contenga al foco F de la parábola. Construya las intersecciones de la perpendicular con la parábola. Denote las intersecciones con M y M', respectivamente. Construya el segmento MM', lado recto de la parábola. Utilizando OBJETO (IN)VISIBLE, oculta la recta MM'.
4. Utilizando DISTANCIA O LONGITUD mide la distancia de M a M', longitud del lado recto. Mueve el punto del deslizador ¿Qué observas? ___________________________ ¿Qué relación hay entre la longitud del lado recto y los coeficientes de y de las distintas ecuaciones? ______________________________. ¿Qué sucede con la parábola si el foco F se acerca o se aleja del vértice de la parábola? ____________________________ ¿Qué sucede con la parábola si el foco F coincide con el vértice? __________________, ¿puede dar una explicación? ____.

Nota: De manera análoga a las Actividades 9 y 10 se pueden realizar actividades para los casos señalados en la nota al final de la Actividad 8.

ACTIVIDADES (ORIENTACIÓN LIBRE)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina las coordenadas del foco, encuentra la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola $3y^2 = 8x$.
2. Dada la parábola $x^2 = 12y$ encuentra las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones del eje y la directriz. Determina la longitud del lado recto.
3. Encuentra la ecuación de la parábola con foco en $(0, -\frac{4}{3})$ y directriz $y - \frac{4}{3} = 0$. Encuentra la longitud del lado recto.
4. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz $y + 3 = 0$.

5. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje a lo largo del eje de las x, y pasa por el punto (-3, 6).
6. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, longitud del lado recto 7 y foco en el eje y negativo.
7. El segmento que une el foco F y un punto P cualquiera de la parábola se denomina **radio focal.** Dada una parábola $y^2 = 4px$ ($p>0$), descubra para todo punto P de la parábola, una relación entre la longitud del radio focal, la abscisa del foco y la abscisa del punto P. [Sugerencia: utiliza Geogebra].
8. Investiga la situación anterior para el caso en que la parábola sea $y^2 = - 4px$ ($p>0$). ¿A qué conclusión llegas?
9. Considera la parábola $y^2 = 4px$ ($p>0$) y $P(x, y)$ un punto cualquiera de ella. Descubra una relación entre el cuadrado construido sobre la ordenada "y" de cualquier punto y el rectángulo construido con la abscisa "x" y el lado recto. ¿Puedes dar una justificación de tu conjetura? [Sugerencia: utiliza Geogebra].
10. La propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto "parábola" asociada a este taller, se inicia a partir de una representación gráfica del concepto. A partir de ella se descubren propiedades que permiten expresar el concepto mediante una representación en lenguaje natural o en lenguaje algebraico (ecuaciones), lo cual se logra mediante actividades fundamentadas en el Modelo de Van Hiele y utilizando tecnología. En la literatura sobre Matemática Educativa se han presentado diversas propuestas de estrategias didácticas o actividades para la enseñanza y aprendizaje de las cónicas. Una de ellas está basada en el enfoque de resolución de problemas en la que el estudio del concepto "parábola" se inicia a partir de una situación problema que plantea la determinación del conjunto de puntos (lugar geométrico) que equidistan de una recta y un punto fuera de ella. En otras palabras, en este enfoque, se da una propiedad del concepto y se pide encontrar su representación gráfica, para luego investigar otras propiedades del concepto.

    Resuelva el siguiente problema: determinar los puntos equidistantes de una recta y un punto fuera de ella.

    [Sugerencia: utiliza Geogebra (pero no la herramienta PARÁBOLA). En la ventana inicial oculta la vista algebraica y los ejes cartesianos.]

4. Referencias bibliográficas

Bifano, F. y Ferragina, R. (2012). Cónicas: algo más que focos y directriz. En R. Ferragina (Ed). *GeoGebra entra al aula de Matemática* (2ª ed.) (pp. 85-94). Buenos Aires: Miño y Dávila Editores.

Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2014). Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. En P. Lestón (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 779-786. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Díaz, M. (2007). Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 207-229). México: Ediciones Díaz de Santos.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México, D.F.,México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *SUMA, revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas 46*, 71-77.

Sánchez, J. (1996). *Lugares Geométricos. Cónicas*. Madrid, España: Editorial Síntesis.