IX CIEMAC
Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora
www.cidse.tec.ac.cr/ciemac

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Errores en el Aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

Ing. José Roberto Portillo
Universidad Galileo, Guatemala
portillo51@galileo.edu

Ing. Luis Fernando Díaz
Universidad Galileo, Guatemala
luisfer48@galileo.edu

Resumen: En el transcurso de los años se ha demostrado que los estudiantes suelen equivocarse constantemente en los cursos introductorios de cálculo diferencial e integral. Por esta razón surge la necesidad de estudiar sus errores, los cuales muchas veces presentan patrones interesantes. Para examinar detalladamente las causas de los mismos, en este estudio se clasifica y analiza la información obtenida en 3 grupos distintos de estudiantes de primer año de ingeniería en diferentes especializaciones. Además, se incluye la descripción de las posibles soluciones que actualmente se están implementando para mejorar la comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: educación, enseñanza de la matemática, errores de aprendizaje, educación en ingeniería, enseñanza del cálculo.

1. Introducción

Existen diversas opiniones en cuanto a la importancia que se debe dar a cada uno de los temas que se enseñan en los primeros cursos de cálculo de ingeniería. Dado que no existe un estándar, los distintos departamentos de matemática toman la decisión en base a la experiencia y conocimiento de su equipo docente.

Las evaluaciones y hojas de trabajo muestran que los estudiantes cometen errores recurrentes, los cuales muchas veces presentan patrones y en la clasificación de dichos patrones existe información valiosa que puede ayudar a mejorar la comprensión y entendimiento de cada uno de los temas. Existen clasificaciones para los errores más comunes en la enseñanza de la matemática y algunas han sido utilizadas directamente en el cálculo; entre ellas se encuentran las propuestas por Donaldson (1963) y Hirst (1999), siendo la primera una de las más utilizadas en el ámbito y la segunda la que mejor se adapta a nuestro propósito.

En los primeros cursos de cálculo de ingeniería que se imparten en Universidad Galileo se han hecho notar varios errores que cumplen con las características presentadas en las clasificaciones presentadas anteriormente. Por lo tanto, se ha empezado a trabajar en la búsqueda de causas e implementación de posibles soluciones.

En este documento se utiliza la propuesta presentada por Sofronas et al. en el 2011, en donde se indican los 4 pilares en un curso introductorio de cálculo. Seguidamente se extraen los errores típicos obtenidos en exámenes de cursos introductorios de cálculo en el transcurso de 5 años en Universidad Galileo, los cuales se clasifican para extraer información de los mismos. Para finalizar se muestran algunas medidas correctivas que se están ejecutando actualmente para aumentar la comprensión de cada uno de los temas por parte de los estudiantes.

2. Temas a impartir en los primeros cursos de cálculo

Las cuatro áreas principales que se sugiere cubrir en un curso introductorio de cálculo de ingeniería son las siguientes (Sofronas, 2011):

a. Dominio de conceptos y habilidades fundamentales.
b. Relaciones entre conceptos y habilidades.
c. Habilidad para la utilización de cálculo.
d. Contexto y propósito del cálculo.

Dicha clasificación puede ser utilizada como marco de referencia para explicar el fracaso de un buen porcentaje de estudiantes en los primeros cursos de cálculo. Una de las razones es que el contenido se sesga y no se hace un buen balance entre las cuatro ramas principales. Por ende los problemas que presentan los estudiantes en el transcurso de su carrera aumentan considerablemente.

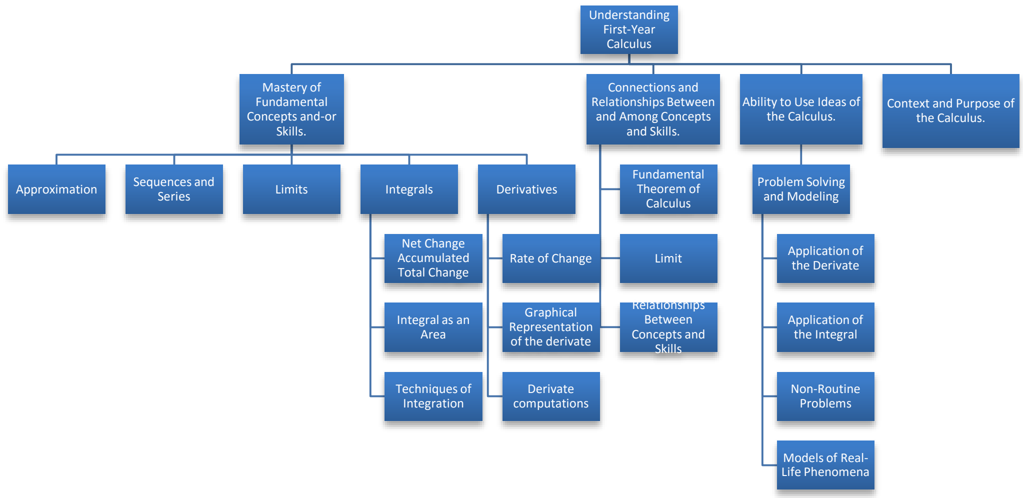


Figura 1: Sofronas (2011).

Por otro lado, se ha observado que el fracaso de los estudiantes no está dado únicamente por el énfasis que se le da a cada uno de los temas, sino también puede ser causado entre otros por la formación adquirida en los cursos de matemática de nivel medio. Cabe mencionar que en nuestra responsabilidad como profesores, no podemos excusarnos en la formación previa al cálculo. Según Clark et al. (1997), al planificar la enseñanza de un tema, sin importar el contexto de sebe responder a las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo un estudiante construye su entendimiento del tema?
b. ¿Cuáles son los conceptos que el estudiante necesita para construir el concepto del tema?
c. ¿Cómo sabe un estudiante cuando aplicar el concepto en distintas situaciones?

Las primeras dos preguntas son fundamentales, ya que incluyen el refuerzo de conceptos que el estudiante podría no saber y el análisis de los errores. Los errores no solo muestran el estado actual del conocimiento del estudiante sino su proceso de pensamiento y las estrategias de resolución de problemas que más se le están complicando (Easdown, 2006).

3. Clasificación de errores

Existen diversas clasificaciones de errores en cursos de matemática, de las cuales se presentan a continuación dos orientadas a la enseñanza del cálculo, que para propósito de este documento mostraron ser más útiles:

Primero, la propuesta de Keith E. Hirst (1999), la cual divide los errores (principalmente en proceso algorítmicos de cálculo de una variable) en:

a. Extrapolación Procedimental. Se refiere a la generalización sin criterio de procedimientos algorítmicos.
b. Pseudo-linealidad. Se refiere a que toda expresión matemática cumple con la propiedad de linealidad.
c. Balance de Ecuaciones. Se refiere a realizar sustituciones sin restricción.

Segundo, se puede citar la clasificación de Donaldson (1963) utilizada por Orton (1983) en uno de los estudios más completos de un grupo de estudiantes de cálculo:

a. Estructurales. Se refiere a la falta de capacidad para apreciar las relaciones involucradas en el problema o para comprender los principios esenciales que se utilizan para encontrar la solución a un problema.
b. Arbitrarios. Se refiere a los errores cometidos por un estudiante cuando no se toma en cuenta las restricciones involucradas en el problema.
c. Ejecución. Se refiere a los errores que involucran una manipulación de expresiones utilizando mal los conceptos.

4. La experiencia en Universidad Galileo

En una muestra de 200 exámenes de estudiantes de ingeniería administrativa, electrónica, industrial, mecatrónica, en sistemas y telecomunicaciones, realizados durante los últimos 5 años se han encontrado errores de los estudiantes que aparecen de forma recursiva. Los errores fueron clasificados utilizando la propuesta de Hirst (1999), la cual cabe mencionar que sigue vigente después de 16 años:

Extrapolación Procedimental:

a. La derivada de un producto de funciones es calculada como el producto de las derivadas de las funciones.

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{d}{dx}f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

b. La derivada de un cociente de funciones es calculada como el cociente de las derivadas de las funciones.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)}$$

c. La integral de un producto de funciones es calculada como el producto de las integrales de las funciones.

$$\int f(x)g(x)\,dx=\int f(x)\,dx\int g(x)\,dx$$

d. La base de todos los logaritmos es la misma.

$$\log(x)=\ln(x)$$

e. Se separan las funciones trigonométricas de su argumento.

$$x=\frac{1}{\tan}$$

f. En las funciones trigonométricas el argumento se simplifica en conjunto con toda la expresión.

$$x\tan(x)=\tan(x^2)$$

Pseudo-linealidad:

a. La raíz de una suma es la suma de las raíces.

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

b. Se puede separar una fracción en base a sumas en el denominador.

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

c. El logaritmo de una suma es la suma de los logaritmos.

$$\ln(a+b)=\ln(a)+\ln(b)$$

d. No se aplica el teorema del binomio.

$$(a+b)^n=a^n+b^n$$

e. Si hay productos de funciones trascendentales y variables, las variables son tomadas como constantes en las integrales.

$$\int x\tan(x)\,dx=x\int\tan(x)\,dx$$

Balance de ecuaciones:

a. Integración de funciones como una expresión de la forma x^n.

$$\int f^n(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

b. No se utiliza la regla de la cadena en funciones exponenciales.

$$\frac{d}{dx}e^{5x} = e^{5x}$$

En lo anterior se puede detectar un patrón, que los estudiantes conocen el procedimiento pero desconocen o no tienen claro el fundamento, lo cual desencadena que la mayoría de errores se encuentren en la categoría de extrapolación procedimental. Si se analiza a detalle, los estudiantes parecen no comprender el significado de lo que están operando (semántica) lo cual desencadena en errores de sintaxis. La sintaxis se refiere a la estructura del lenguaje, en este caso del lenguaje de la matemática y la semántica al concepto detrás del lenguaje.

Se considera que aquí surge el verdadero problema; la mayor parte de los estudiantes consiguen aprender los símbolos y la estructura del lenguaje matemático pero no aprenden a "hablar matemáticas", porque no llegan a alcanzar el nivel comprensivo del lenguaje. (Radillo, 2005). Por una parte los profesores al enseñar un tema tienen en su mente un modelo conceptual (es decir semántico), el cual quieren transmitir a la mente de los estudiantes. Pero, por otro lado, los estudiantes pueden tener en su mente ideas anteriores confusas y no comprender el modelo conceptual como tal, todo esto lleva al estudiante directamente a cometer errores semánticos. Es importante recordar que no se puede comparar la comprensión de un estudiante con la de un profesor, ya que los estudiantes no tienen los mismos años de experiencia tratando temas afines (Easdown, 2006).

Actualmente en Universidad Galileo se está trabajando en implementar soluciones que reduzcan el gap entre la semántica y la sintaxis, como lo define Easdown (2006) en su trabajo. Entre las estrategias y herramientas más importantes que se están utilizando se encuentran:

a. Énfasis constante en el entendimiento de los conceptos.

Tanto en clase como en las evaluaciones se enfatiza en 3 grandes áreas: conceptos, operatoria y aplicaciones, las cuales se definen como:

Conceptual: Incluye preguntas teóricas, demostraciones y problemas que evalúen el manejo que el estudiante tiene de los conceptos básicos del curso.

Operatoria: Incluye ejercicios prácticos y evalúa al estudiante en el manejo de las técnicas y procedimientos operativos dictados en el curso.

Aplicaciones: Incluye todos aquellos problemas verbales en donde el estudiante aplique los conceptos y herramientas presentadas en el curso. Los problemas de aplicación involucran tanto conceptos como operatoria, sin embargo, esta sección busca evaluar la capacidad del estudiante para integrar dichas áreas en la solución de un problema práctico.

Las hojas de trabajo se realizan con 4 secciones, las 3 anteriormente explicadas y una sección de *repaso acumulativo* que nos sirve para fortalecer y recordar constantemente los conceptos fundamentales. Esta sección abarca: preguntas teóricas y ejercicios prácticos de matemática preuniversitaria.

b. Inclusión de dispositivos electrónicos.

Para apoyar a los estudiantes fuera de clase, se ha implementado la siguiente mecánica: al encontrarse con una duda, los estudiantes envían un correo electrónico con la fotografía de su pregunta desde su Smartphone (hoy en día, la gran mayoría cuenta con estos dispositivos) al cual los catedráticos responden desde sus tablets con Stylus (ver figura 2). Se utilizan tablets debido a la rapidez en la realización de la solución. El objetivo de esta mecánica es que los estudiantes se queden sin dudas luego de sus horas de estudio.

$$\int sen^7\theta \cos^5\theta \, d\theta = \int sen^7\theta \cos^4\theta \cos\theta \, d\theta = \int sen^7\theta (\cos^2\theta)^2 \cos\theta \, d\theta$$

$$\int sen^7\theta (1 - sen^2\theta)^2 \cos\theta \, d\theta \qquad u = sen\theta \qquad du = \cos\theta \, d\theta$$

$$\int u^7 (1-u^2)^2 \, du = \int u^7 (1 - 2u^2 + u^4) \, du = \int u^7 - 2u^9 + u^{11} \, du$$

$$= \frac{u^8}{8} - \frac{2u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12} + C \Rightarrow \frac{sen^8\theta}{8} - \frac{sen^{10}\theta}{5} + \frac{sen^{12}\theta}{12} + C$$

Figura 2: Ejemplo realizado en Tablet.

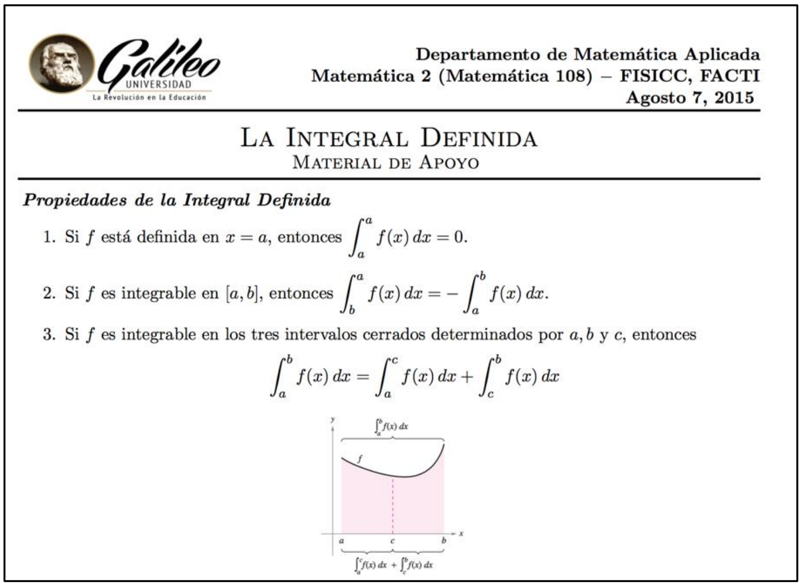
c. Actividades de motivación.

Se realizan sesiones de estudio de 3 a 5 veces por semestre, en las cuales los estudiantes notan el interés que tienen los catedráticos en su aprendizaje. El objetivo principal de esta actividad como menciona es fortalecer tanto la integración académica como la social de los estudiantes al curso, lo cual mejora el rendimiento y reduce la deserción (Tinto, 1983).

Figura 3: Repaso de Matemática.

d. Material de Apoyo.

El material de apoyo es relevante para los alumnos debido a que en este se incluyen los teoremas frecuentemente utilizados en el curso y de importancia en cursos posteriores. La realización de estos documentos ayuda a disminuir los errores presentados previamente porque el alumno puede saber que propiedades puede utilizar.



Departamento de Matemática Aplicada
Matemática 2 (Matemática 108) – FISICC, FACTI
Agosto 7, 2015

LA INTEGRAL DEFINIDA
MATERIAL DE APOYO

Propiedades de la Integral Definida

1. Si f está definida en $x = a$, entonces $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
3. Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Figura 4: Material de Apoyo – La Integral Definida

e. Proyectos de aplicación integradores.

En todos los cursos de matemática se realiza un proyecto de aplicación, en donde se busca integrar los conceptos vistos en clase para la solución de algún problema real. Dichos proyectos están relacionados con otros cursos, tales como física y ciencias de la computación.

5. Conclusiones y recomendaciones

Es difícil saber a qué temas se les debe dar mayor relevancia en un curso de cálculo para ingeniería ya que cada equipo docente tiene un punto de vista. Se ha notado que la relevancia como tal implica buscar nuevas formas de transmitir la información a los estudiantes, donde se resalte constantemente el concepto aunque se esté trabajando la operatoria o bien aplicaciones. Un dominio claro de la semántica del lenguaje de la matemática provee al estudiante las herramientas necesarias para una mejor comprensión y una mejor utilización de la sintaxis, donde se vea perfectamente una disminución en la frecuencia de aparición de los errores presentados en este documento. Cabe mencionar que en los cursos de cálculo de primer año de ingeniería que se imparten actualmente en Universidad Galileo los estudiantes están mostrando mejoras en su aprendizaje y la cantidad de errores está disminuyendo. Por lo que actualmente se están desarrollando mediciones de la efectividad de las técnicas acá discutidas y se espera que las mismas sirvan a los estudiantes para una mejor y más fácil comprensión de las aplicaciones en ingeniería y cursos posteriores afines tales como física, química y todos aquellos en donde la matemática es su lenguaje fundamental.

6. Referencias bibliográficas.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., Tolias, G. & John, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior, 16(4)*, 345–364.

Easdown, D. (2006). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 40*, 941-949.

Hirst, K. (2002). Classifying students mistakes in Calculus. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*.

Orton, A. (1983). Students Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 1-18.

Radillo, E., Nesterova, E., Ulloa, A. & Pantoja, R. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático. *V Congreso Internacional Virtual de Educación, 12.*

Sofronas, K., DeFranco, T., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L. & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior, 30,* 131-148.