IX CIEMAC
Congreso Internacional
sobre la Enseñanza de la
Matemática Asistida por Computadora
www.cidse.tec.ac.cr/ciemac

Gráficas de curvas y superficies en el espacio tridimensional empleando GeoGebra

M.Eng. Angie Solís Palma

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

ansolis@itcr.ac.cr

Resumen: En este taller, mediante una serie de guías, se pretende explicar a los participantes, algunos procedimientos para graficar curvas y superficies en el espacio tridimensional. En primera instancia se dan algunas explicaciones sobre comandos básicos de GeoGebra, y posteriormente se procede a explicar la manera de parametrizar y graficar las ecuaciones de ciertas superficies (planas, cilíndricas y cuádricas) en GeoGebra.

Palabras clave: GeoGebra, parametrización, trazas, curvas en el espacio, planos, superficies cilíndricas, superficies cuádricas.

Keywords: GeoGebra, parameterization, traces, space curves, flat, cylindrical surfaces, quadric surfaces.

1. Introducción

El uso de herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática, cada día es más frecuente, máxime en aquellos temas que involucran graficación de curvas o superficies, ya sea en el plano o en el espacio.

Sin embargo, en muchos casos a pesar del deseo de los docentes por utilizar dichos recursos, surge la limitante del costo económico o que la curva de aprendizaje para su uso, no es la adecuada para quien no tenga una buena formación en programación.

En algunos casos, estas dos dificultades pueden ser solventadas por programas gratuitos que presentan excelentes características para ser utilizados en el campo de la enseñanza, uno de estos programas es GeoGebra, el cual aparte de ser gratuito, es fácil de instalar y de usar, mediante las guías apropiadas.

La versatilidad de GeoGebra, en sus diferentes versiones es una herramienta que en particular se convierte en una ayuda para graficar curvas en el plano, curvas y superficies en el espacio, utilizando las parametrizaciones adecuadas.

2. Aspectos generales

El taller está dirigido a docentes universitarios, dado que es graficación en tres dimensiones (3D), sin embargo como área de conocimiento podría ser de interés para docentes de primaria y secundaria. Es necesario que los participantes cuenten con conocimientos básicos del programa.

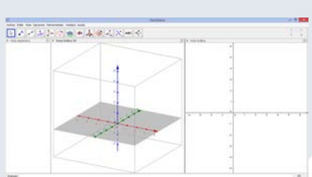
Se requiere de un laboratorio con video bean, y el programa GeoGebra instalado en las computadoras de los participantes.

El objetivo de este taller es aportar a los docentes del campo de la matemática algunos ejemplos en una guía de trabajo, donde se explicará paso a paso la manera de utilizar el programa GeoGebra para graficar curvas y superficies.

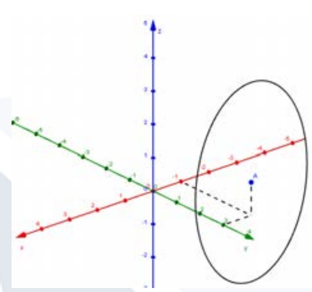
Para el logro del objetivo propuesto, el taller está organizado en dos sesiones distribuidas de la siguiente forma:

Primera Sesión (2 horas)

A. Aspectos básicos de GeoGebra

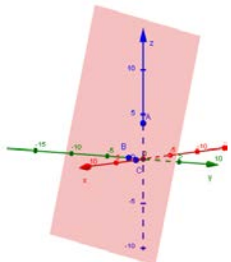


B. Graficación de curvas

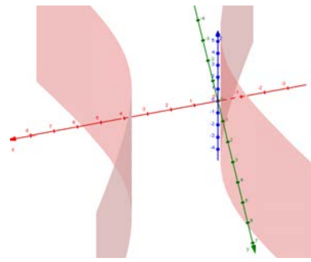


C. Graficación de superficies

Planos

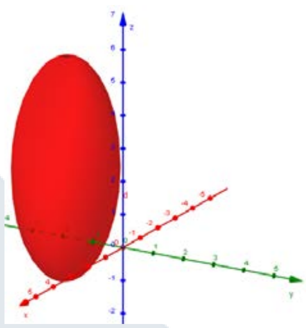


Cilindros

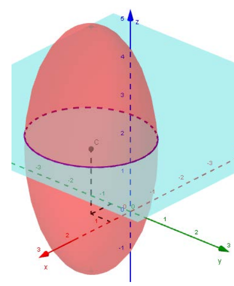


Segunda Sesión (2 horas)

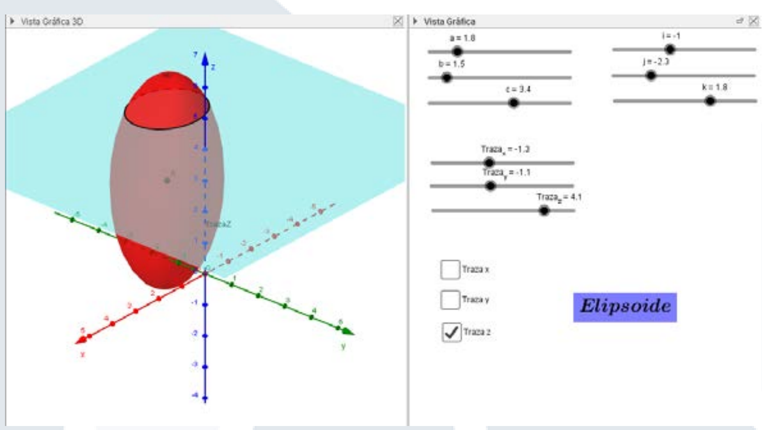
A. Graficación de superficies cuádricas



B. Trazas de superficies cuádricas



C. Diseño y manipulación de objetos visibles



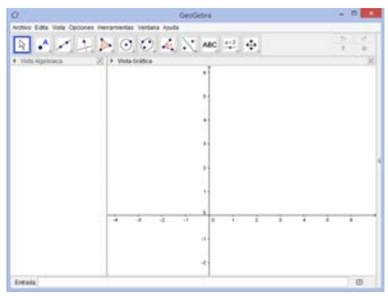
3. Guías de trabajo

Primera Sesión (2 horas)

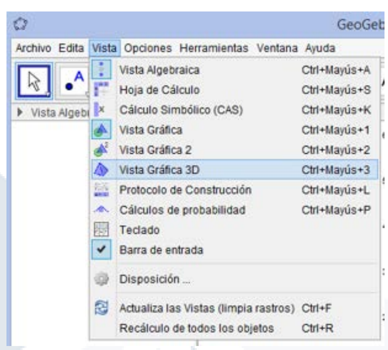
A. **Aspectos básicos de GeoGebra**

En primer lugar debe tener instalado en su computadora la herramienta GeoGebra, la cual es gratuita y se puede descargar en la siguiente dirección de Internet: `https://www.geogebra.org/download`. Cuando la tenga instalada, en sus programas aparecerá uno con el siguiente ícono:

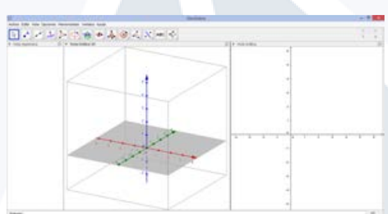
Al entrar al programa tendrá la siguiente pantalla de inicio:



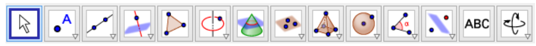
En el menú superior, ingrese a Vista y luego a Vista Gráfica 3D:



Maximice su ventana y ordene las vistas tal como se muestra a continuación:

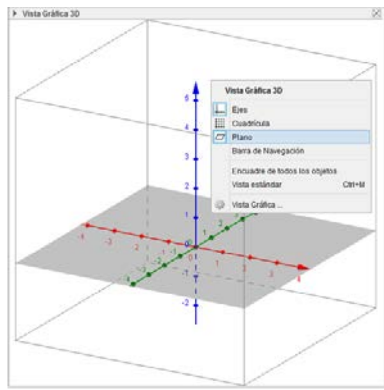


El menú en la parte superior cambiará de acuerdo a la vista gráfica que tenga seleccionada. En Vista Gráfica 3D, se tiene el siguiente menú:

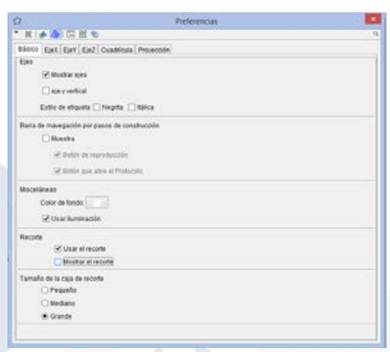


Y en la Vista Gráfica 2D, se tiene el menú:

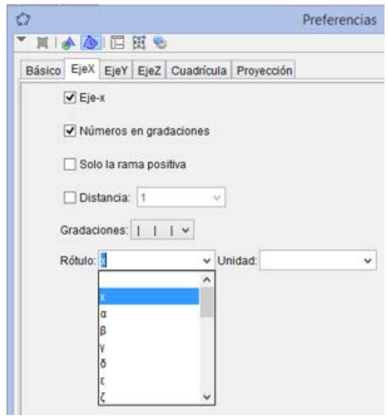
De click derecho sobre la Vista Gráfica 3D y desmarque la opción de plano.



Nuevamente, con click derecho sobre la Vista Gráfica 3D ingrese a Vista Gráfica para poder modificar algunas preferencias. En preferencias desmarque "Mostrar el recorte" y cambie el tamaño de la caja a grande.



En preferencias hay otro menú en la parte superior, seleccione EjeX para rotular el eje, en Rótulo escoja la x. Realice lo mismo para los ejes y y z, y cierre la ventana.



La Vista Gráfica 3D se puede girar, para lograrlo seleccione el ícono  en el menú superior del programa.

Luego de click sobre la Vista Gráfica 3D y manteniendo presionado el ratón, deslice hacia arriba, abajo, derecha o izquierda el sistema de coordenadas para girarlo.

Para ocultar o mostrar los objetos creados, puede utilizar la Vista Algebraica, para ello debe dar click en el punto azul que aparece al lado izquierdo de cada objeto, si el punto está en color blanco el objeto está oculto.

Para cada uno de los ejemplos se recomienda utilizar un archivo diferente, puede organizar uno con las características deseadas, guardarlo y duplicarlo las veces que sea necesario. Luego, solo le debe cambiar el nombre, que podría ser el nombre del ejemplo que está trabajando.

B. Graficación de curvas

Para poder graficar una curva en GeoGebra, primero se tiene que parametrizar, para ello utilice las parametrizaciones que se muestran en la página 292.

Segmento de recta

Ejemplo 1

Considere el segmento de recta que pasa por los puntos $A(2,0,1)$ y $B(1,3,2)$.

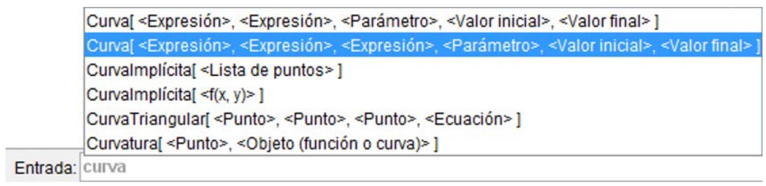
Realice la gráfica del segmento de recta en GeoGebra.

Solución

Primero se parametriza el segmento

$$c(t):\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3t \\ z = 1+t \end{cases} \quad ; \qquad t \in [0,1]$$

Ahora se ingresa a GeoGebra la curva, para esto se escribe la palabra "Curva" en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, GeoGebra le completará la guía para ingresar la curva, usted debe seleccionar la que indica $<$Expresión$>$ en tres ocasiones, ya que esta es la utilizada si se desea graficar en tres dimensiones:



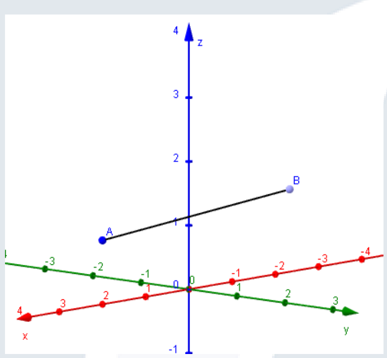
Donde indica $<$Expresión$>$ se debe escribir la parametrización de las tres variables, en el orden x, y, z.

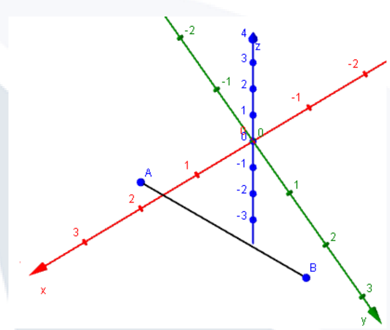
En $<$Parámetro$>$ se escribe t, $<$Valor inicial$>$ y $<$Valor final$>$ corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro, en este caso $t \in [0,1]$.

Su entrada debe quedar de la siguiente manera:

Cuando haya terminado, pulse la tecla "Enter" para poder ver su segmento. Puede girarlo para tener diferentes vistas.

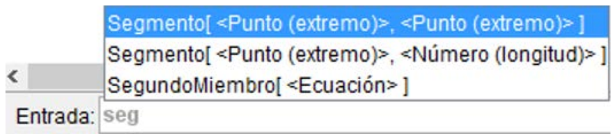
También puede graficar los puntos, para observar el inicio y final del segmento, para ello escriba: $(2,0,1)$ en la celda de entrada en GeoGebra, pulse la tecla "Enter" para poder ver su punto. Haga lo mismo con el punto $(1,3,2)$.





Si se desea mejorar el dibujo, puede agregar algunas líneas punteadas para que indiquen la ubicación de los puntos.

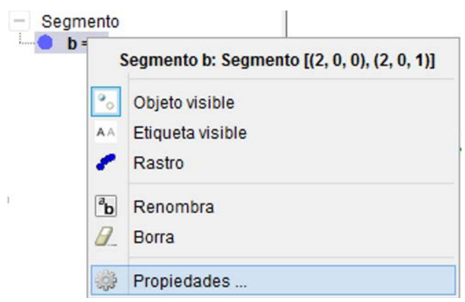
Los segmentos o líneas también se pueden agregar sin parametrizar, escriba la palabra “Segmento” en la celda de entrada en GeoGebra y le completará la guía para ingresar el segmento, usted debe seleccionar la que indica de punto a punto:



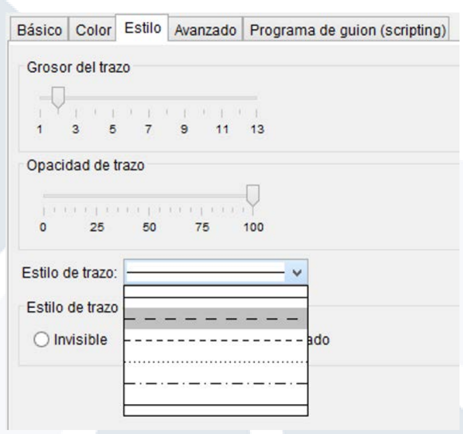
Su entrada debe quedar de la siguiente manera:

Cuando haya terminado, pulse la tecla “Enter” para poder ver su segmento.

Para dibujar el segmento, punteado de click derecho sobre este, puede ser en la Vista Gráfica 3D o en la Vista Algebraica y seleccione “Propiedades”:



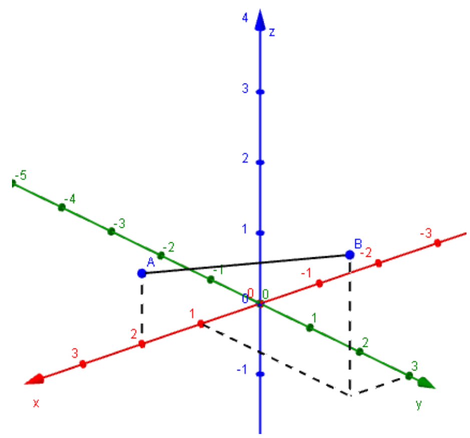
En esta ventana selecciones “Estilo” y luego en “Estilo de trazo” escoja uno punteado:



Luego cierre la ventana.

Cada vez que se crea un objeto utilizando la celda de entrada, debe terminar pulsando la tecla “Enter” para que el programa grafique el objeto editado.

Repita este procedimiento para crear tres segmentos más: el primero de extremos $(1,0,0)$, $(1,3,0)$, el segundo de extremos $(0,3,0)$, $(1,3,0)$ y el último de extremos $(1,3,0)$, $(1,3,2)$. Recuerde darles estilo punteado.



Círculo

Ejemplo 2

Considere el círculo de ecuación:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=4 \\ z=4 \end{cases}$$

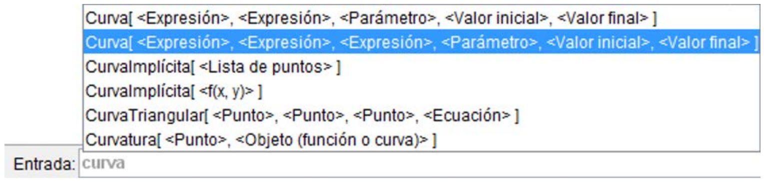
Realice la gráfica de la curva en GeoGebra.

Solución

Primero se parametriza el círculo

$$c(t):\begin{cases} x=1+2\cos t \\ y=2+2\operatorname{sen} t \\ z=4 \end{cases} ; \qquad t\in[0,2\pi]$$

Ahora se ingresa a GeoGebra la curva, para esto se escribe la palabra “Curva” en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, GeoGebra le completará la guía para ingresar la curva, usted debe seleccionar la opción que indica <Expresión> en tres ocasiones:

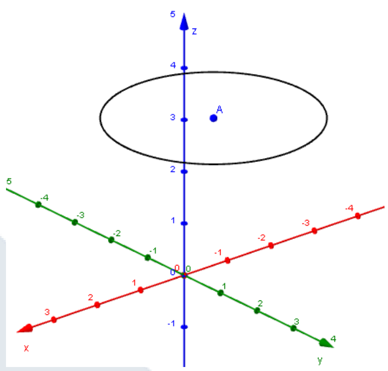


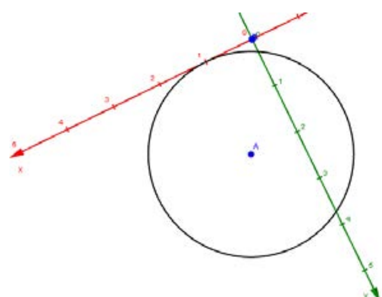
Su entrada debe quedar de la siguiente manera:

El valor de π lo puede escribir como “pi” (sin las comillas), o tomar al final de la línea donde está escribiendo, dando click en: .

Cuando halla terminado, pulse la tecla “Enter” para poder ver su círculo. Puede girarlo para tener diferentes vistas.

También puede graficar su centro, para ello escriba: $(1,2,4)$ en la celda de entrada en GeoGebra y pulse la tecla “Enter” para poder ver su punto.

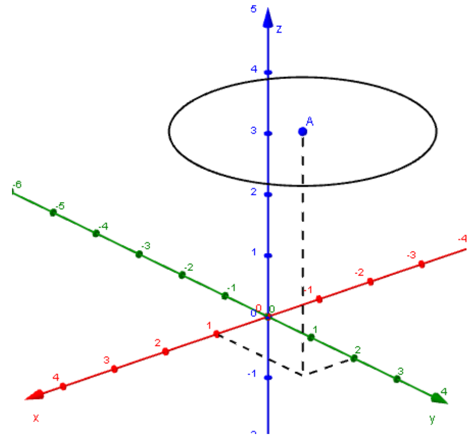




Si se desea mejorar el dibujo, puede agregar algunas líneas punteadas para que indiquen la ubicación del centro.

Los segmentos que necesita son: el primero de extremos $(1,0,0)$, $(1,2,0)$, el segundo de extremos $(1,2,0)$, $(0,2,0)$ y para finalizar uno de extremos $(1,2,0)$, $(1,2,4)$.

Cada vez que se crea un objeto utilizando la celda de entrada, debe terminar pulsando la tecla “Enter” para que el programa grafique el objeto editado.



Hipérbola

Ejemplo 3

Considere la hipérbola de ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{(y-j)^2}{b^2} + \dfrac{(z-k)^2}{c^2} = 1 \\ x = i \end{cases}$$

Donde i, j, k, b y c serán valores cambiantes.

Realice la gráfica de la curva en GeoGebra.

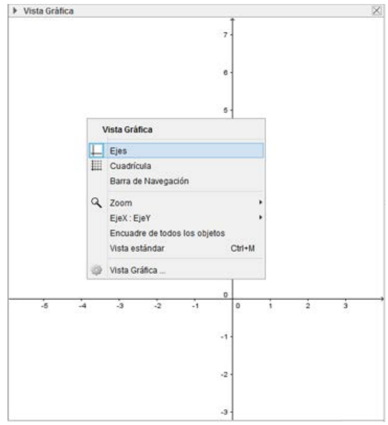
Solución

Primero se parametriza la hipérbola

$$c(t): \begin{cases} x = i \\ y = j + b\sec t \quad ; \qquad t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \\ z = k + c\tan t \end{cases}$$

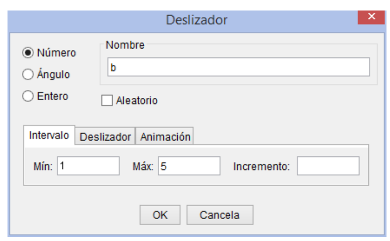
Para realizar esta gráfica, se deben crear varios objetos llamados deslizadores.

Para lo anterior, de click derecho sobre la Vista Gráfica 2D y seleccione la opción “Ejes”, con esto se ocultarán los ejes de la Vista Gráfica.

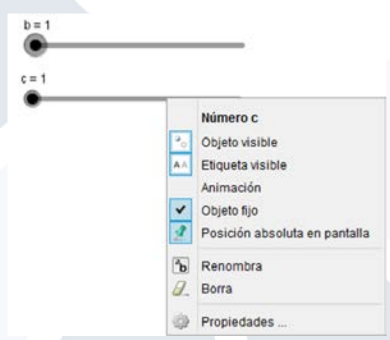


Seleccione el deslizador del menú superior:

De click en la Vista Gráfica 2D donde desea colocar el deslizador, y complete la información que se le solicita, el deslizador se llamará *b*, con un valor mínimo de 1 y máximo de 5, luego seleccione "OK".

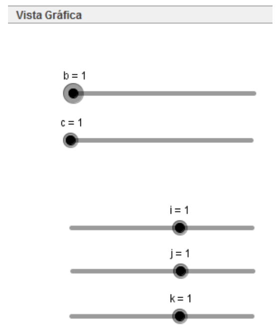


Debe crear un deslizador más llamado *c*, con las mismas características.
Si desea cambiar algunas de las propiedades del deslizador, solo debe dar click derecho sobre la línea del deslizador y seleccionar "Propiedades":

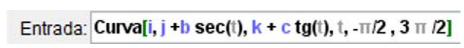


Para crear los deslizadores del centro de la hipérbola use la misma herramienta, para este caso lo que cambiará son las características. Se necesitan tres deslizadores más, llamado i, j y k, con un valor mínimo de -5 y máximo de 5, luego seleccione “OK”.

Por el momento debería tener los siguientes deslizadores:



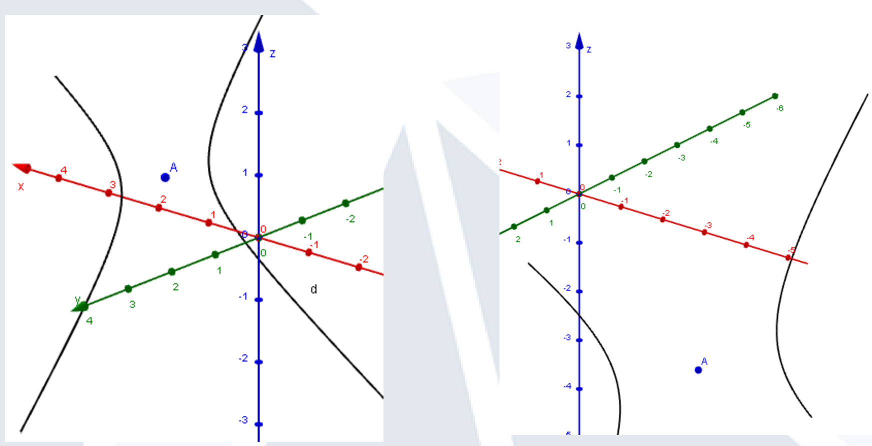
Ahora se creará una hipérbola que dependa de los deslizadores creados anteriormente, esto se realiza escribiendo la palabra “Curva” en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, seleccione la opción que indica <Expresión> en tres ocasiones y complétala de la siguiente manera:



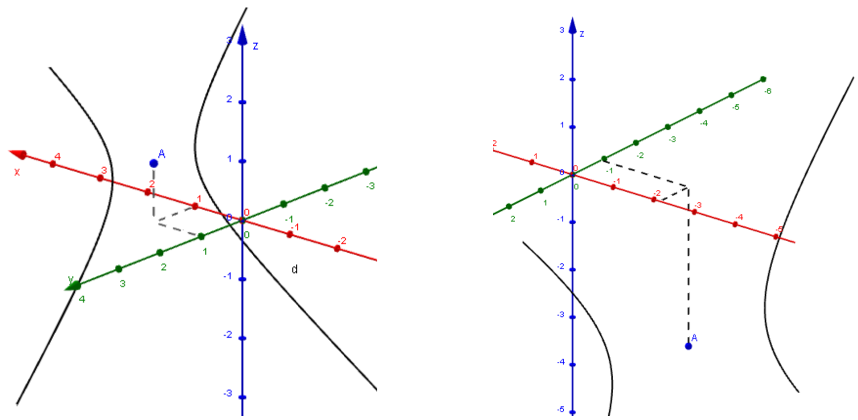
Lo que se muestra en azul, son los deslizadores creados anteriormente, y lo que aparece en gris son los parámetros de la curva.

Cuando halla terminado, pulse la tecla “Enter” para poder ver su curva. Puede girarla para tener diferentes vistas, y variar los deslizadores para obtener diferentes curvas.

Para graficar el centro de la curva, y que este varíe conforme mueve los deslizadores, escriba en la celda de entrada: (i, j, k) y pulse la tecla “Enter”, con esto se creará un punto, el cual se mueve cada vez que mueve el deslizador:



Si se desea mejorar el dibujo, puede agregar algunas líneas punteadas para que indiquen la ubicación del centro, estas líneas deben depender de los deslizadores i, j, k.



Ejercicios 0

Realice la gráfica en GeoGebra de las siguientes curvas:

1 $\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(z-1)^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

2 $\begin{cases} c(y-j) = (z-k)^2 \\ x = i \end{cases}$. Donde i, j, k y c serán valores cambiantes.

C. Graficación de superficies: planos y cilindros

Para poder graficar una superficie en GeoGebra, primero se tiene que parametrizar, para ello, utilice las parametrizaciones que se muestran en la página 293.

Plano

Ejemplo 4

Considere el plano de ecuación:

$$3x - 2y + z = 4$$

Realice la gráfica del plano en GeoGebra.

Solución

Primero se parametriza el plano

$$s(u,v):\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=4-3u+2v \end{cases} \quad ; \quad u\in\mathbb{R}, v\in\mathbb{R}$$

Ahora se ingresa a GeoGebra el plano, se puede hacer de varias formas:

a) Se escribe: $3x-2y+z=4$ en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla:

Entrada: 3x-2y+z=4

Cuando haya terminado, pulse la tecla "Enter" para poder ver su plano.

b) Se escribe la palabra "Superficie" en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, GeoGebra le completará la guía para ingresar la superficie, usted debe seleccionar la opción:

Entrada: super
Superficie[<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro 1>, <Valor inicial 1>, <Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>]

Donde indica <Expresión> se debe escribir la parametrización de las tres variables, en el orden x, y, z.

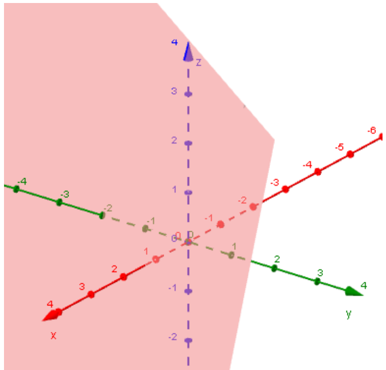
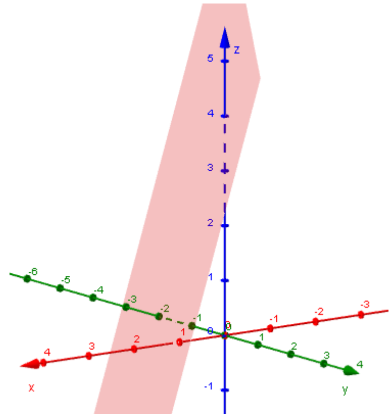
En <Parámetro 1> se escribe u, <Valor inicial 1> y <Valor final 1> corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro 1, en este caso $u\in\mathbb{R}$, pero es recomendable darle un intervalo, por lo que se puede usar $u\in[-20,20]$.

En <Parámetro 2> se escribe v, <Valor inicial 2> y <Valor final 2> corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro 2, en este caso $v\in\mathbb{R}$, de la misma manera es recomendable darle un intervalo, por lo que se puede usar $v\in[-20,20]$.

Su entrada debe quedar de la siguiente manera:

Entrada: Superficie[u, v, 4-3u+2v, u, -20, 20, v, -20, 20]

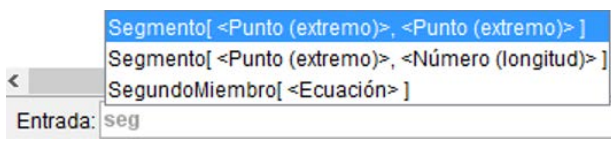
Cuando haya terminado, pulse la tecla "Enter" para poder ver su superficie.

También puede graficar los puntos de intersección del plano con los ejes, además las líneas que unen estos puntos, para ello calcule los puntos y los grafica escribiéndolos en la celda de entrada en GeoGebra.

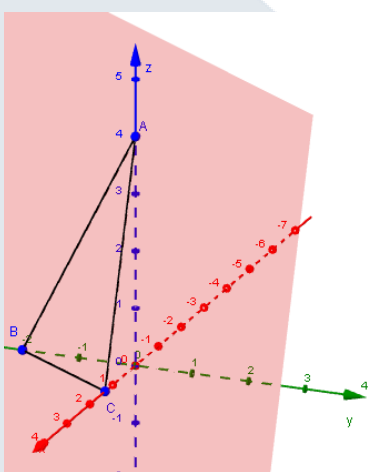
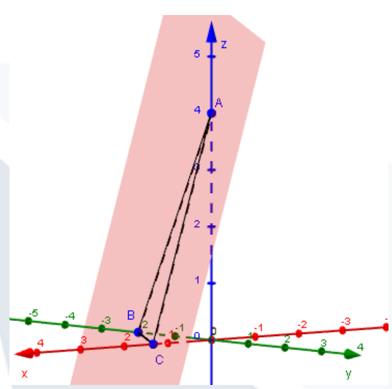
Estos puntos de intersección son $(0,0,4)$, $(0,-2,0)$ y $(\frac{4}{3},0,0)$. Es probable que el programa haya etiquetado sus puntos con "A,B y C".

Luego en la celda de entrada escriba la palabra "Segmento" y complete la guía para ingresar el segmento, usando la opción que indica de punto a punto:



Su entrada debe quedar de la siguiente manera:

Pulse la tecla "Enter" y agregue los otros dos segmentos (de B a C y de C a A).

Ejemplo 5

Considere el cilindro de ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

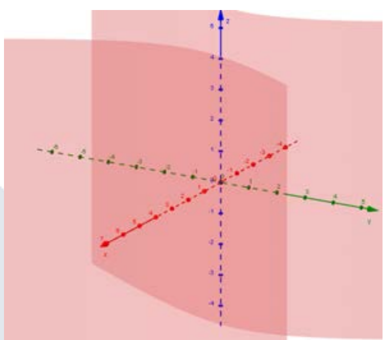
Realice la gráfica del cilindro en GeoGebra.

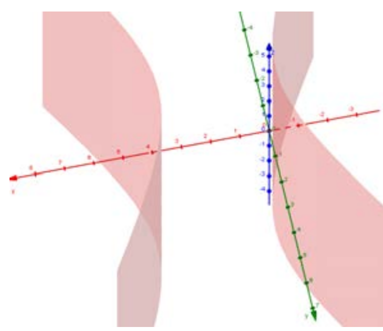
Solución

Primero se parametriza el cilindro

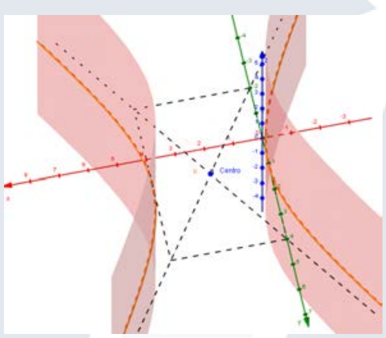
$$s(u,v):\begin{cases} x=2+2\sec u \\ y=1+3\tan u \\ z=v \end{cases} ; \qquad u\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right], v\in\mathbb{R}$$

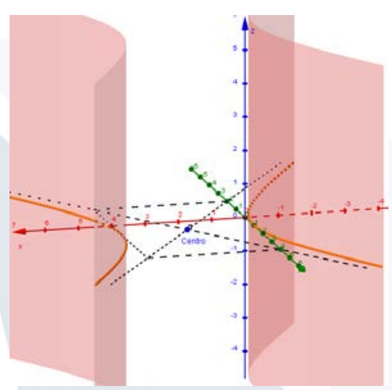
Ahora ingrese a GeoGebra la curva, su resultado debe verse de la siguiente manera:





Si se desea mejorar el dibujo, puede agregar algunas líneas punteadas para que indiquen el trazo de la curva directriz que genera al cilindro.





Ejercicios 0

Realice la gráfica en GeoGebra de los siguientes cilindros:

3 $\dfrac{(x+3)^2}{1}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

4 $(y-2)^2+(z-1)^2=4$

5 $=-(z-2)=(x-3)^2$

Segunda Sesión (2 horas)

A. **Graficación de superficies cuádricas**

Ejemplo 6

Considere el elipsoide de ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{1}=1$$

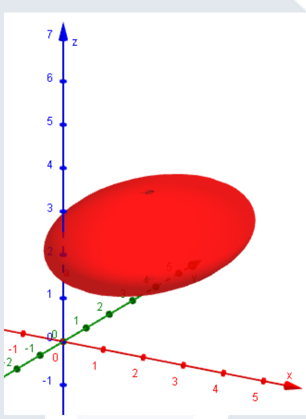
Realice la gráfica de la superficie en GeoGebra.

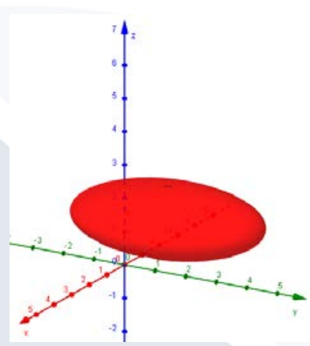
Solución

Primero se parametriza el elipsoide

$$s(u,v):\begin{cases} x=1-2\cos u\,\mathrm{sen}\,v \\ y=2-3\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v \quad ; \qquad u\in[0,2\pi]\,,v\in[0,\pi] \\ z=2-1\cos v \end{cases}$$

Ahora ingrese a GeoGebra la curva, su resultado debe verse de la siguiente manera:





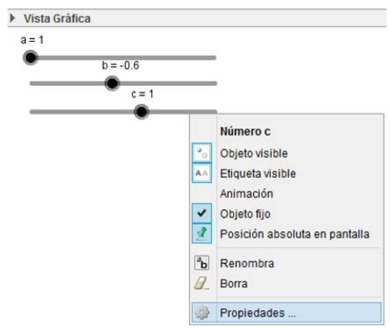
Ahora utilice deslizadores para hacer que cambie el centro del elipsoide y los valores en el denominador de cada fracción en la ecuación del elipsoide.

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

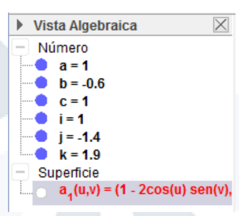
Los valores de i, j, k pueden variar entre un valor mínimo de -5 y máximo de 5. Y los valores de a, b, c pueden variar entre 0 y 5.

Construya los siguientes deslizadores:

Si desea cambiar algunas de las propiedades del deslizador, solo debe dar click derecho sobre la línea del deslizador y seleccionar "Propiedades":



Para ocultar o mostrar los objetos creados, puede utilizar la Vista Algebraica, debe dar click en el punto azul que aparece al lado izquierdo de cada objeto, si el punto está de color blanco el objeto está oculto. Oculte la superficie creada anteriormente.



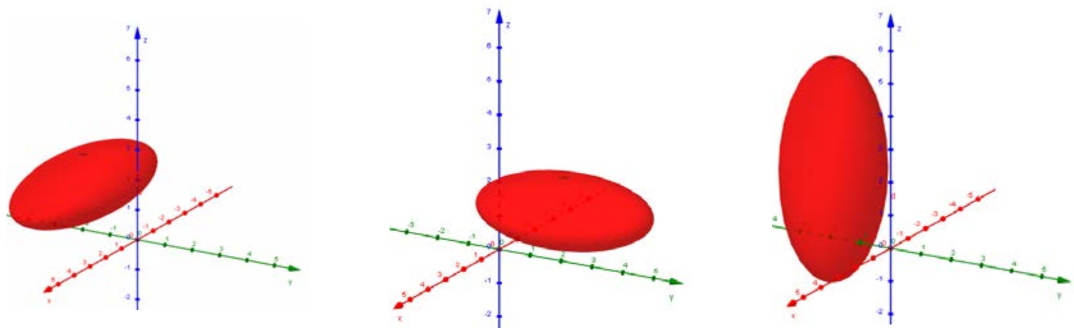
Ahora se creará un elipsoide que dependa de los deslizadores creados anteriormente, escriba la palabra "superficie" en la celda de entrada de GeoGebra, y complete con la sugerencia que le muestra el programa.

Cambie las entradas de la superficie de la siguiente manera:

```
Entrada: Superficie[i - a cos(u) sen(v), j - b sen(u) sen(v), k - c cos(v), u, 0, 2*pi, v, 0, pi]
```

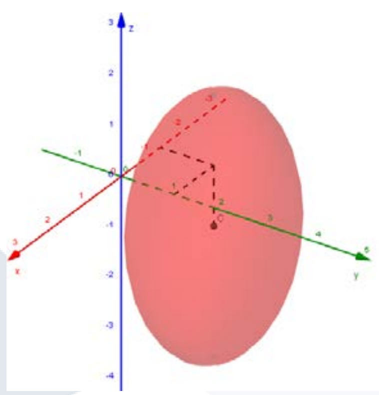
Lo que se muestra en azul, son los deslizadores creados anteriormente, y lo que aparece en gris son los parámetros de la superficie.

Cuando haya terminado, pulse la tecla "Enter" para poder ver su superficie. Puede girarla para tener diferentes vistas, y variar los deslizadores para obtener diferentes superficies.



Para graficar el centro de la superficie, y que este varíe conforme mueve los deslizadores, escriba en la celda de entrada: (i, j, k) y pulse la tecla "Enter", con esto se creará un punto el cual se mueve cada vez que varíe el deslizador.

Además puede agregar las líneas que indican la ubicación del centro, debe hacerlas de tal manera que dependan de los deslizadores i, j, k.



Ejercicios 3

Realice la gráfica en GeoGebra de las siguientes superficies cuádricas:

6 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{4}+z^2=1$

7 $(x+5)^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(z+2)^2}{4}=1$

8 $-(x+5)^2+\frac{y^2}{4}-\frac{(z+2)^2}{4}=1$

9 $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(z-1)^2}{3}=0$

10 $2-y=\frac{(x+5)^2}{2}+\frac{(z+2)^2}{1}$

11 $1-y=\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(z+2)^2}{1}$

B. **Trazas de superficies cuádricas**

Definición 1

Si S es una superficie en el espacio de ecuación $F(x,y,z)=0$, se llaman trazas de las superficie a las curvas:

a) $F(x,y,d)=0,\ z=d$

b) $F(x,d,z)=0,\ y=d$

c) $F(d,y,z)=0,\ x=d$

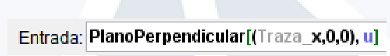
Se va a trabajar sobre el elipsoide creado el ejemplo 6.

Las trazas se harán dependiendo de un deslizador, para esto haga un deslizador que se llame $Traza_x$, con un valor mínimo de -7 y máximo de 7. Haga dos deslizadores más llamados $Traza_y$ y $Traza_z$ con las mismas características.

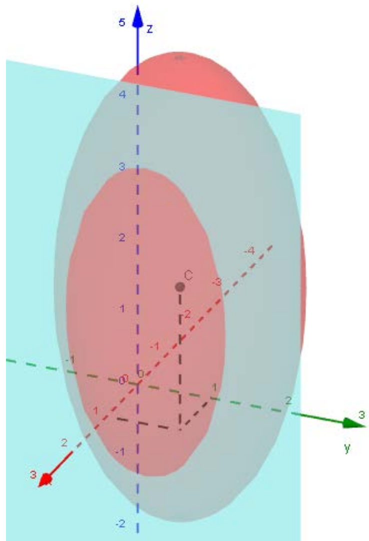
Además realice tres vectores, esto se realiza escribiendo en la celda de entrada: $Vector(1,0,0)$, y pulse la tecla “Enter”. Agregue los otros 2 vectores, que serían $Vector(0,1,0)$ y $Vector(0,0,1)$, de la misma manera.

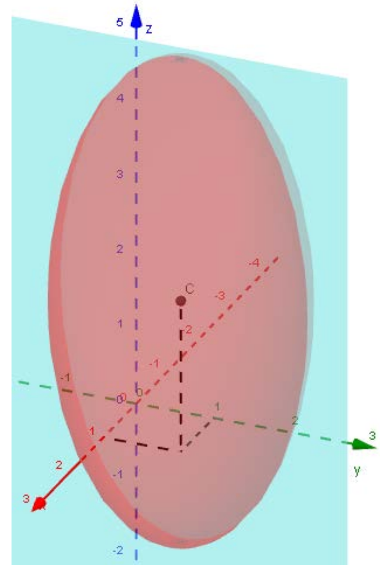
Traza paralela al plano $x=0$

Para dibujar el plano, escriba en la celda de entrada “plano”, de las opciones que le presenta GeoGebra escoja la última: “PlanoPerpendicular[<Punto>, <Vector>]” y complétala de la siguiente manera:



Ahora, mueva el parámetro y observe la forma en que se mueve el plano y la forma en que corta al elipsoide.





Seguidamente se calculará la curva de intersección de manera algebraica, para luego poder graficarla.

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1 \quad \cap \quad x=Traza_x$$

$$\begin{aligned}
\frac{(Traza_x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2} &= 1\\
\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2} &= 1-\frac{(Traza_x-i)^2}{a^2}\\
\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2} &= \frac{a^2-(Traza_x-i)^2}{a^2}\\
\frac{(y-j)^2}{b^2\frac{a^2-(Traza_x-i)^2}{a^2}}+\frac{(z-k)^2}{c^2\frac{a^2-(Traza_x-i)^2}{a^2}} &= 1\\
\frac{(y-j)^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(Traza_x-i)^2}\right)^2}+\frac{(z-k)^2}{\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-(Traza_x-i)^2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

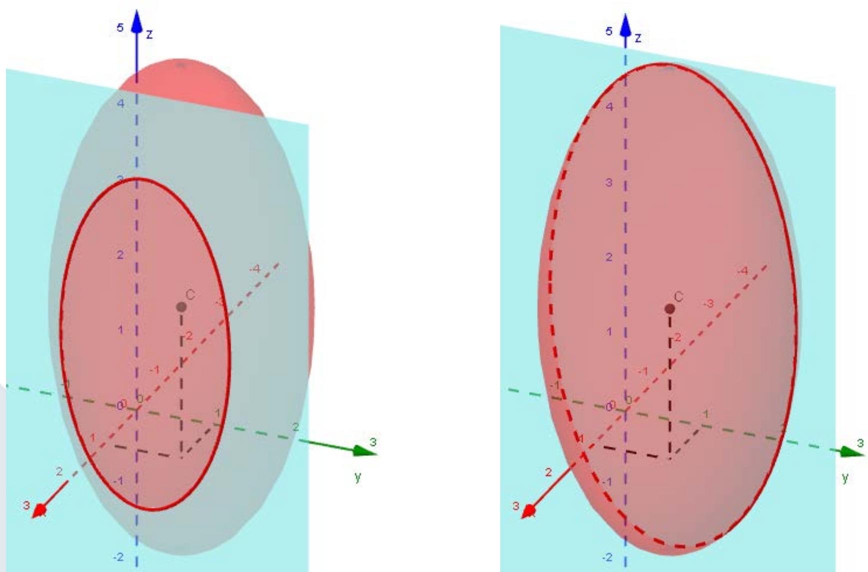
Con lo anterior se obtiene la ecuación de una elipse, y para graficarla en GeoGebra, se debe parametrizar:

$$c\left(t\right):\begin{cases} x = Traza_x \\ y = j + \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\left(Traza_x - i\right)^2}\right)\cos t \\ z = k + \left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-\left(Traza_x - i\right)^2}\right)\operatorname{sen} t \end{cases} ; \qquad t\in\left[0,2\pi\right]$$

Para dibujar la curva, escriba la palabra "Curva" en la celda de entrada y de las opciones que le presenta GeoGebra seleccione la opción que indica <Expresión> en tres ocasiones y complétala de la siguiente manera:

```
Entrada: Curva[Traza_x, j +(b / a)* sqrt(a² - (Traza_x - i)²)* cos(t), k + (c / a)* sqrt(a² - (Traza_x - i)²)* sen(t), t, 0, 2*pi]
```

Ahora, mueva el parámetro y observe la forma en que se mueve el plano y la curva.



Recuerde que para ocultar o mostrar los objetos creados, puede utilizar la Vista Algebraica, para ello debe dar click en el punto azul que aparece al lado izquierdo de cada objeto, si el punto está de color blanco el objeto está oculto.

Con esto, puede ocultar el plano y la curva de la traza paralela al plano $x = 0$ para poder observar el plano y la curva de la traza paralela al plano $y = 0$.

Traza paralela al plano $y = 0$

Para dibujar el plano, escriba en la celda de entrada:

```
Entrada: PlanoPerpendicular[(0,Traza_y,0), v]
```

Ahora se calculará la curva de intersección de manera algebraica, para luego poder graficarla.

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1 \quad \cap \quad y=Traza_y$$

$$\begin{aligned}
\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(Traza_y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2} &= 1\\
\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2} &= 1-\frac{(Traza_y-j)^2}{b^2}\\
\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2} &= \frac{b^2-(Traza_y-j)^2}{b^2}\\
\frac{(x-i)^2}{a^2\frac{b^2-(Traza_y-j)^2}{b^2}}+\frac{(z-k)^2}{c^2\frac{b^2-(Traza_y-j)^2}{b^2}} &= 1\\
\frac{(x-i)^2}{\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(Traza_y-j)^2}\right)^2}+\frac{(z-k)^2}{\left(\frac{c}{b}\sqrt{b^2-(Traza_y-j)^2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

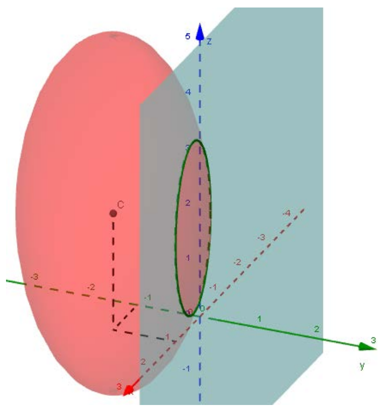
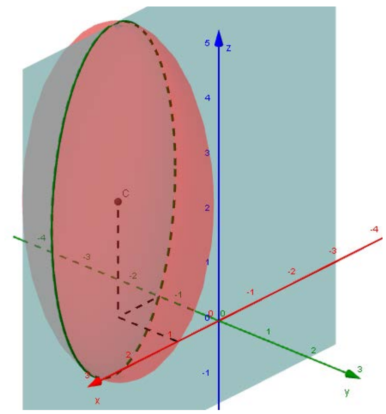
Con lo anterior se obtiene la ecuación de una elipse, y para graficarla en GeoGebra, se debe parametrizar.

$$c(t):\begin{cases} x=i+\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(Traza_y-j)^2}\right)\cos t\\ y=Traza_y \\ z=k+\left(\frac{c}{b}\sqrt{b^2-(Traza_y-j)^2}\right)\operatorname{sen} t\end{cases} \quad ; \qquad t\in[0,2\pi]$$

Para dibujar la curva, escriba en la celda de entrada:

```
Entrada: Curva[i + (a / b)* sqrt(b² - (Traza_y - j)²)* cos(t), Traza_y, k + (c / b)* sqrt(b² - (Traza_y - j)²)* sen(t), t, 0, 2*pi]
```

Ahora, mueva el parámetro y observe la forma en que se mueve el plano y la curva.

Traza paralela al plano $z = 0$

Para dibujar el plano, escriba en la celda de entrada:

Entrada: `PlanoPerpendicular[(0,0,Traza_z), w]`

Ahora se calculará la curva de intersección de manera algebraica, para luego poder graficarla.

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1 \quad \cap \quad z = Traza_z$$

$$\begin{aligned}
\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(Traza_z-k)^2}{c^2} &= 1\\
\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2} &= 1-\frac{(Traza_z-k)^2}{c^2}\\
\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2} &= \frac{c^2-(Traza_z-k)^2}{c^2}\\
\frac{(x-i)^2}{a^2\frac{c^2-(Traza_z-k)^2}{c^2}}+\frac{(y-j)^2}{b^2\frac{c^2-(Traza_z-k)^2}{c^2}} &= 1\\
\frac{(x-i)^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2-(Traza_z-k)^2}\right)^2}+\frac{(y-j)^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{c^2-(Traza_z-k)^2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

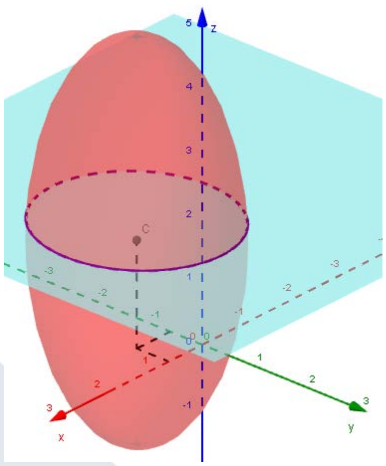
Con lo anterior se obtiene la ecuación de una elipse, y para graficarla en GeoGebra, se debe parametrizar.

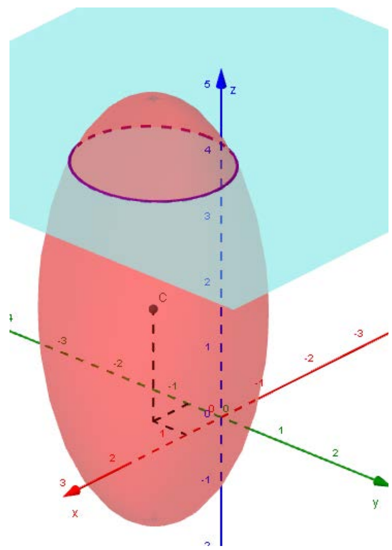
$$
c(t):\begin{cases}
x = i + \left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2-(Traza_z-k)^2}\right)\cos t \\
y = j + \left(\frac{b}{c}\sqrt{c^2-(Traza_z-k)^2}\right)\operatorname{sen} t \quad ; \qquad t\in[0,2\pi] \\
z = Traza_z
\end{cases}
$$

Para dibujar la curva, escriba en la celda de entrada:

```
Entrada: Curva[i + (a / c)* sqrt(c² - (Traza_z - k)²)* cos(t), j + (b / c)* sqrt(c² - (Traza_z - k)²)* sen(t), Traza_z, t, 0, 2*pi]
```

Ahora, mueva el parámetro y observe la forma en que se mueve el plano y la curva.





C. **Diseño y manipulación de objetos visibles**

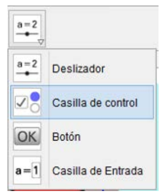
Todos los objetos creados pueden ser modificados en color, grosor e inclusive en ser visibles o invisibles. Basta con dar click derecho sobre el objeto, en la Vista Gráfica 2D o 3D o sobre su nombre en la Vista Algebraica, y seleccionar “Propiedades”.

Puede probar cambiando el color de la superficie, planos y curvas, y el grosor o estilo de línea en las curvas.

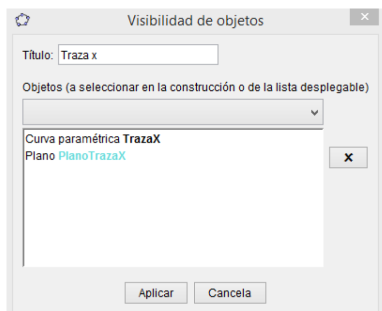
Para identificar mejor las curvas, cambie el nombre de estas, la primera la puede llamar $TrazaX$, para esto entre a “Propiedades” y cambie su nombre. Con las otras dos curvas puede hacer un cambio similar con $TrazaY$ y $TrazaZ$.

De la misma manera cambie los nombres de los planos por: $PlanoTrazaX$, $PlanoTrazaY$ y $PlanoTrazaZ$.

Para controlar si un objeto es visible o invisible, posicione el ratón sobre la Vista Gráfica 2D y seleccione del menú superior la “Casilla de control”:



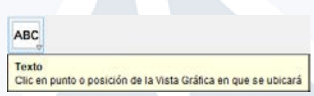
De click en la Vista Gráfica 2D donde desea colocar la casilla de control, y complete la información que se le solicita, la casilla se llamará $Traza\ x$, y en objetos debe seleccionar de la lista, los objetos que desee que sean visibles cuando la casilla de control este seleccionada. En este caso, seleccione: Curva paramétrica TrazaX y Plano PlanoTrazaX, luego seleccione “Aplicar”.



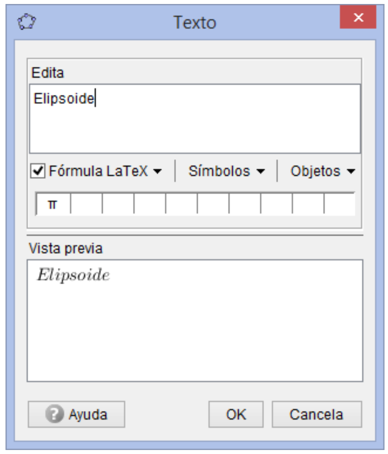
Debe crear dos casillas de control más, llamadas $Traza\ y$ y $Traza\ z$ para ocultar y mostrar el plano y la curva que corresponde a cada traza.

Puede probar marcando y desmarcando la casilla de control, para que observe como se muestra o no el plano y la curva de las trazas.

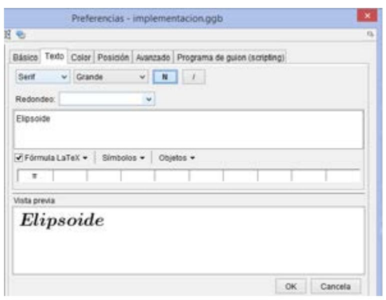
Ahora puede cerrar la Vista Algebraica, y ordenar a su gusto la Vista Gráfica 2D. Si desea escribir algún texto, posicione el ratón sobre la Vista Gráfica 2D, y seleccione del menú superior la herramienta de texto:

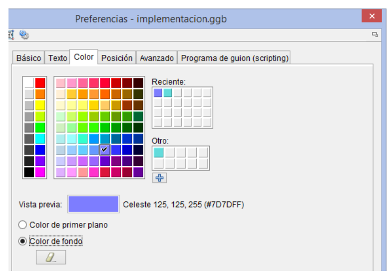


De click en la Vista Gráfica 2D donde desea colocar el texto, y complete la información que se le solicita:

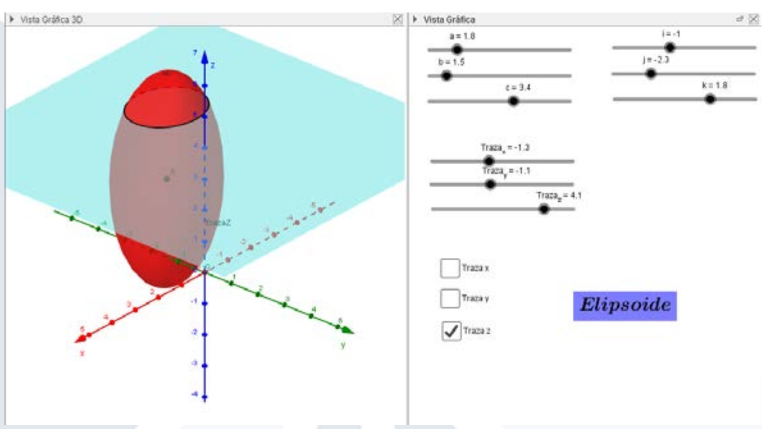


Para cambiar de tamaño, de color de fondo y texto, debe ingresar a las propiedades y modificarlo según su preferencia:





El trabajo realizado hasta este momento, debería verse similar a la siguiente imagen:



4. Parametrización de curvas y superficies

Curvas

A continuación se muestra la parametrización de algunas curvas en general:

1. Segmento de recta con extremos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$.

Su parametrización estaría dada por:

$$c(t):\begin{cases} x=a_1+t(b_1-a_1) \\ y=a_2+t(b_2-a_2) \\ z=a_3+t(b_3-a_3) \end{cases} ; \qquad t\in[0,1]$$

2. Círculo:

$$\begin{cases} (y-j)^2+(z-k)^2=r^2 \\ x=x_1 \end{cases}$$

Usando $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, su parametrización estaría dada por:

$$c(t):\begin{cases} x=x_1 \\ y=j+r\cos t \\ z=k+r\operatorname{sen} t \end{cases} ; \qquad t\in[0,2\pi]$$

3. Elipse:

$$\begin{cases} \dfrac{(y-j)^2}{b^2}+\dfrac{(z-k)^2}{c^2}=1 \\ x=x_1 \end{cases}$$

Usando $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, su parametrización estaría dada por:

$$c(t):\begin{cases} x=x_1 \\ y=j+b\cos t \\ z=k+c\operatorname{sen} t \end{cases} ; \qquad t\in[0,2\pi]$$

4. Hipérbola:

$$\begin{cases} \dfrac{(y-j)^2}{b^2} - \dfrac{(z-k)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_1 \end{cases}$$

Usando $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$, su parametrización estaría dada por:

$$c(t): \begin{cases} x = x_1 \\ y = j + b\sec t \\ z = k + c\tan t \end{cases} ; \qquad t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

5. Parábola:

$$\begin{cases} c(y-j) = (z-k)^2 \\ x = x_1 \end{cases}$$

Su parametrización estaría dada por:

$$c(t): \begin{cases} x = x_1 \\ y = \dfrac{(t-k)^2}{c} + j \\ z = t \end{cases} ; \qquad t \in \mathbb{R}$$

Superficies

A continuación se muestra la parametrización de algunas superficies en general:

1. Planos

Ecuación cartesiana:

$$ax + by + cz = d$$

Parametrización:

$$s(u,v): \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{d - au - bv}{c} \end{cases} ; \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

2. Cilindros

La parametrización de estas superficies varía dependiendo del tipo de curva directriz que las genere, estos son algunos de los casos:

a) Línea recta (este es un caso particular de plano).

Curva directriz en el plano XY :

$$ax + by = d$$

Parametrización:

$$s(u,v) : \begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{d - au}{b} \\ z = v \end{cases} ; \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

b) Círculo.

Curva directriz en el plano XY :

$$(x - i)^2 + (y - j)^2 = r^2$$

Parametrización:

$$s(u,v) : \begin{cases} x = i + r\cos u \\ y = j + r\,\text{sen}\, u \\ z = v \end{cases} ; \qquad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

c) Elipse.

Curva directriz en el plano XY :

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i+a\cos u \\ y=j+b\operatorname{sen} u \\ z=v \end{cases} ;\qquad u\in[0,2\pi],v\in\mathbb{R}$$

d) Hipérbola.

Curva directriz en el plano XY :

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}-\frac{(y-j)^2}{b^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i+a\sec u \\ y=j+b\tan u \\ z=v \end{cases} ;\qquad u\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],v\in\mathbb{R}$$

e) Parábola.

Curva directriz en el plano XY :

$$c(x-i)=(y-j)^2$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=\dfrac{(u-j)^2}{c}+i \\ y=u \\ z=v \end{cases} ;\qquad u\in\mathbb{R},v\in\mathbb{R}$$

3. Cuádricas

a) Elipsoide

Ecuación canónica:

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i-a\cos u\,\mathrm{sen}\,v \\ y=j-b\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v \\ z=k-c\cos v \end{cases}\;;\qquad u\in[0,2\pi],v\in[0,\pi]$$

b) Hiperboloide de una hoja

Ecuación canónica:

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}-\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i-a\cos u\cosh v \\ y=j-b\,\mathrm{sen}\,u\cosh v \\ z=k-c\,\mathrm{senh}\,v \end{cases}\;;\qquad u\in[0,2\pi],v\in\mathbb{R}$$

c) Hiperboloide de dos hojas

Ecuación canónica:

$$-\frac{(x-i)^2}{a^2}-\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

Parametrización hoja eje positivo:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i+a\,\mathrm{senh}\,u\cos v \\ y=j+b\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v \\ z=k+c\cosh u \end{cases} ;\qquad u\in[0,+\infty[\,, v\in[0,2\pi]$$

Parametrización hoja eje negativo:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i-a\,\mathrm{senh}\,u\cos v \\ y=j-b\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v \\ z=k-c\cosh u \end{cases} ;\qquad u\in[0,+\infty[\,, v\in[0,2\pi]$$

d) Cono elíptico

Ecuación canónica:

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}-\frac{(z-k)^2}{c^2}=0$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i+\dfrac{a}{c}\,\mathrm{senh}\,u\cos v \\ y=j+\dfrac{b}{c}\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v \\ z=k+\mathrm{senh}\,u \end{cases} ;\qquad u\in\mathbb{R}, v\in[0,2\pi]$$

e) Paraboloide elíptico

Ecuación canónica:

$$z-k=\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=\dfrac{(u-i)^2}{a^2}+\dfrac{(v-j)^2}{b^2}+k \end{cases} \quad ; \qquad u\in\mathbb{R}, v\in\mathbb{R}$$

f) Paraboloide hiperbólico

Ecuación canónica:

$$z-k=-\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=-\dfrac{(u-i)^2}{a^2}+\dfrac{(v-j)^2}{b^2}+k \end{cases} \quad ; \qquad u\in\mathbb{R}, v\in\mathbb{R}$$

5. Conclusión

La graficación de curvas y superficies tridimensionales, utilizando la pizarra tradicional, presenta dificultades, por diferentes razones: la habilidad del profesor para dibujar puede ser escasa o deficiente, captar el efecto tridimensional en una pizarra a veces es difícil de lograr, también se debe mencionar que el tiempo requerido para hacer un dibujo que logre el efecto deseado puede ser alto. Este tipo de dificultades se pueden evitar usando el software apropiado, por cuanto visualmente es más agradable, se ajusta más a la realidad del objeto que queremos representar y se puede rotar permitiendo observar diferentes vistas de la superficie.

En particular, el software GeoGebra, utilizado correctamente en cursos de cálculo en varias variables (aunque su uso puede extenderse a otras áreas de la matemática) puede ser de gran utilidad para los estudiantes, de esta manera ellos lograrán mediante las vistas, y propiedades de objetos tridimensionales determinar detalles que de otra forma tendrían que imaginar.

De esta manera, el uso de este software es beneficioso para estudiantes y profesores, permitiendo así el mejoramiento de la calidad de la educación mediante el uso de nuevas herramientas tecnológicas.

6. Referencias bibliográficas

Larson, R. & Edwards, B (2010). *Cálculo 2 de varias variables.* Ciudad de México, México: Mc Graw Hill.

Mora, W (2015). *Cálculo en varias variables.* Cartago, Costa Rica: Revista Digital: Matemática, Educación e Internet.

Geogebra (s.f.) *Manual de GeoGebra 5.0.* Recuperado de https://wiki.geogebra.org/es/Manual.

Geogebra (s.f.) *Tutoriales.* Recuperado de https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales.