IX CIEMAC
Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora
www.cidse.tec.ac.cr/ciemac

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Construcción de actividades didácticas de probabilidad en Entornos Virtuales de Aprendizaje

José Dionicio Zacarias Flores
BUAP, México
jzacarias@fcfm.buap.mx

Guillemina Sánchez López
BUAP, México
guillermina.sanchez@upaep.edu.mx

Bulmaro Juárez Hernández
BUAP, México
bjuarez@fcfm.buap.mx

Resumen: Se describe una propuesta innovadora en la construcción de lecciones didácticas para el aprendizaje de la probabilidad a nivel medio superior, bajo la dirección rectora de una didáctica de la matemática específica soportada en un entorno virtual de aprendizaje.

Palabras clave: actividades didácticas, probabilidad, EVA.

Abstract: An innovative proposal to build didactic lessons to learn probability, in the senior high, under one specific didactic direction of teaching supported in a virtual learning environment.

Keywords: educational activities, probability, EVA.

1. Introducción

El papel que hoy en día juega la teoría de la probabilidad dentro de la sociedad es de vital importancia, ya que ante el creciente manejo de la información, la estadística permite realizar un tratamiento de tal información al convertirla en datos numéricos, pero la manera de valorar y confiar en las decisiones elegidas al efectuar el tratamiento de los datos, se logra mediante la valoración de cada una de las posibles alternativas utilizando métodos probabilísticos. Mas sin embargo, aunque pareciera claro lo que se debe hacer para confiar en la toma de decisiones, resulta que la teoría de probabilidad mide procesos o eventos de ocurrencia cuya característica común es la aleatoriedad concepto que de acuerdo a una amplia literatura, hay indicios de que existen obstáculos para alcanzar un aprendizaje significativo. Más aún, sin importar el nivel educativo, los alumnos presentan fuertes dificultades en el aprendizaje de los conceptos básicos de Probabilidad, tal y como lo señalan diversidad de trabajos de investigación relativos a la dificultad de aprendizaje de la Probabilidad. La razón del porqué de las dificultades es diversa. En particular, hay investigaciones que muestran la dificultad que presentan los estudiantes del nivel medio superior en el aprendizaje de la probabilidad y estadística, nivel en el que se centra principalmente este trabajo (Kahneman & Tversky, 1982; Nisbett et al, 1983; Konold, 1991; Ojeda, 1995; Sánchez, 1996; Serrano, Batanero, Ortiz, y Cañizares, 1998; Guisasola, y Barragués, 2002; Hirsch, y O'Donnell, 2001; Quiñonez, 2005; Díaz, 2007).

Pero también existen trabajos que destacan el potencial que tienen hoy en día la integración del uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Díaz, 2008; Orozco y Labrador, 2006; UNESCO, 2012).

Planteamiento del problema.

Ante lo ya expuesto, docentes e investigadores día con día proponen diversidad de maneras de enseñar probabilidad, para subsanar esta problemática; así, surge la pregunta de investigación que sustenta nuestro trabajo: *¿Será factible crear actividades didácticas de aprendizaje que puedan ser integradas en un entorno virtual de aprendizaje que promueva el aprendizaje deseado?*

2. Marco Teórico

Con el propósito de establecer una propuesta didáctica para dar una respuesta a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, en los estudiantes de nivel medio superior, así como la promoción de su aprendizaje, abordamos los elementos teóricos que sustentarán tal propuesta. El marco teórico sobre el cual se ha fundamentado el trabajo de investigación consta de tres componentes principales.

La primera componente, se compone de un *análisis y reflexión no exhaustiva respecto al significado y comprensión de los objetos matemáticos de la probabilidad*, así como una discusión acerca de la *transposición de un objeto matemático en un objeto de aprendizaje digital*.

Objetos Matemáticos (OM).

Existe una diversidad de trabajos que nos muestran el interés de los investigadores a precisar el concepto de representación de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Serrano, 1996; Duval, 1999; Godino 2002; Hitt, 2003; D'Amore, 2006), ya que son elementos esenciales para la comprensión de dichos objetos matemáticos, así como para la enseñanza y aprendizaje de los mismos. El supuesto de que las diferentes representaciones de los objetos matemáticos son elementos fundamentales para su comprensión y por tanto para su enseñanza y aprendizaje, ha llevado a que el interés de especialistas se enfoque en su estudio durante los últimos tiempos. Muchos investigadores han dedicado numerosos estudios a precisar el concepto de representación (Kaput, 1991; Castro y Castro, 1997;; Duval, 1999; Moreno, 1999; y D'Amore, 2006; entre otros), y a analizar el papel que desempeñan en el razonamiento de los estudiantes. Por lo que el entendimiento de las matemáticas requiere no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones. Así, en concordancia con Pluvinage, (1998), puede plantearse la pregunta: *¿Cómo puede el aprendizaje lograr que el estudiante no confunda un objeto matemático con alguna de sus representaciones y construya el "edificio" objeto-representaciones?* Respuesta a esta pregunta la da Raymond Duval en su obra Sémiosis et pensée humaine (1995), así como en su artículo de 1993. Da respuesta con ciertos elementos de respuesta precisos. La teoría de sistemas semióticos de representación, nos dice que *la aprehensión de un objeto matemático es una aprehensión conceptual* y *la actividad sobre los objetos matemáticos se da sólo por medio de las representaciones semióticas*. Por lo que Duval (1993, p. 176) dice: "Si se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis". De aquí *la importancia de la conexión entre registros de representación*. Duval (1999, p. 12) señala: "*Estas conexiones entre registros constituyen la estructura cognitiva por la que los estudiantes pueden reconocer el mismo objeto a través de sus diferentes representaciones*". Esto nos indica que la apropiación del objeto matemático se logrará, si se logra ilustrar el objeto en cada registro de representación semiótica que le sea posible realizar, y se logra la conversión entre ellos. Puesto que como él mismo afirma cada registro de representación semiótica, aporta ciertos aspectos cognitivos que no cubre otro registro, es decir, que *toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa* (Duval, 1988, p.185). En otras palabras, los registros se complementan (ver Fig. 1). Definiendo por conversión: "*la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.*" (Duval, 1988, p.176, p. 178) Y afirmando que para la aprehensión conceptual de los objetos es necesaria la coordinación de los diversos registros (Duval, 1988, pp. 176, 181, 185, 189).

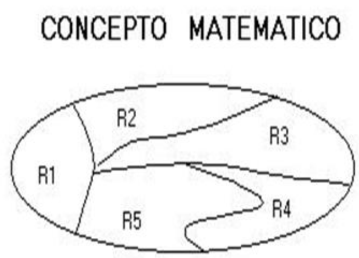

Figura 1. Para poder visualizar un concepto matemático es necesario reconocerlo en los diversos registros de representación semiótico (R1, R2,..) que le sean propios.

Ahora bien, *¿Cómo promover la articulación de los diferentes registros de representación semiótica asociados a un determinado concepto matemático?* Como lo sostiene Cuevas, la propuesta es seguir el mismo esquema que propone Piaget para la adquisición de un concepto, es decir, debemos de dar a este proceso la misma estructura propuesta por Piaget, y esto quiere decir proponer ejercicios que nos lleven en forma directa e inversa de un registro en el otro. En otras palabras, proponer problemas para resolverse dentro de un determinado registro cuyas operaciones tengan reflejo en el (los) otro(s) registro(s). Enseguida proponer las mismas acciones en el otro registro con el respectivo reflejo en el registro precedente. Incluso y de ser posible interactuar, de esta manera, con todos los registros de representación semiótica que le sean propios al concepto matemático. Aunque desde luego se tendría que discriminar previamente las variables visuales significativas en cada uno de los registros propuestos, para que al modificar alguna de ellas se tuviera el eco correspondiente en el o los registros semióticos asociados. Todo lo anterior se debe realizar con cuidado y seleccionando lo relevante del concepto que se pueda ilustrar en otro registro, puesto que evidentemente, no se tiene traslación en todos los registros de representación, ni mucho menos es posible trasladar todos los pasos de solución de un determinado problema en un cierto registro a otro registro (Cuevas, 2005).

Como acertadamente menciona Vergnaud, el problema de traslación de un sistema a otro, no es trivial; incluso menciona que, puede no ser posible trasladar los procesos internos de los diversos sistemas. Señalando por ejemplo, la dificultad de encontrar paralelismo entre las ideas de transformación, propiedades, etc. de un sistema de representación algebraico a un sistema de lenguaje natural o del mundo real (Vergnaud, 1987).

Por todo lo dicho antes, podemos concluir que de acuerdo a Duval, Pluvinage y Cuevas, alcanzar la comprensión de un concepto matemático, requiere conocerlo y representarlo en diversos registros semióticos realizados de manera apropiada, de tal manera que se den las conversiones correspondientes para alcanzar la aprehensión conceptual. La creación de representaciones, tratamientos y conversiones, generan lo que Duval menciona como *comprensión integradora*.

Y toma como elementos primarios tres grandes principios de la escuela activa: el primero nos dice que en la enseñanza es **primordial la *acción***. En el caso de la enseñanza de la matemática, la acción más que una acción física, ésta sería mental. El estudiante en la resolución de problemas específicos, se le *dosificarán gradualmente* hasta obtener el concepto deseado. Esto significa que ***los estudiantes siempre tratarán de resolver o solucionar los problemas.*** El segundo elemento afirma que en cada introducción de un concepto o una noción matemática, **se debe tratar de *partir de un problema colocado en un contexto de interés para el alumno***. Este problema puede conducir a otros ejercicios o sub-problemas cuyas soluciones forman una estructura coordinada, que lleva al estudiante a definir o demostrar el concepto matemático deseado. Es decisión del profesor elegir los conceptos apropiados. *En cualquier caso,* ***nunca, introducir un concepto a partir de su definición formal***. El tercer elemento es útil para apoyar al primero. Una vez resuelto el problema presentado, ***el alumno debe validar sus resultados, comprobando que tienen un sentido lógico, de acuerdo con el problema***.

Interpretando la acción (como lo mencionan Piaget, 1947; y Piaget y Inhelder, 1948) en el ámbito de las matemáticas, como el *resolver problemas*, de acuerdo al segundo principio debemos *proponer un buen problema*, *en un contexto apropiado para el estudiante, que le motive a enfrentar el problema* (como menciona Brousseau, 1986), y al buscar la manera de resolverlo, *el alumno sienta la necesidad* (Claparède, 1905) *del uso de la matemática para resolverlo*. Pero no basta la acción, es necesario que esta acción nos conduzca a una operación intelectual, es decir, a la acción interiorizada. La importancia de esto nos la muestra Aebli, en un análisis de la psicología de Jean Piaget.

> *en sus niveles superiores el pensamiento es, ante todo, un sistema de operaciones lógicas, físicas (espacio-temporales) y numéricas. La operación constituye el elemento activo del pensamiento. Asegura los progresos esenciales de la inteligencia, en oposición a la imagen que desempeña el papel de elemento relativamente estático que perfila instantáneas de las transformaciones operatorias (Aebli, 1958).*

Los elementos restantes que conforman la propuesta didáctica de Cuevas – Pluvinage se omiten pero se sugiere revisar el trabajo publicado.

Objetos de Aprendizaje (OA).

Con el propósito de aprovechar al máximo los contenidos digitales, en los recintos educativos, está formándose un nuevo concepto llamado objeto de aprendizaje (OA), tal término fue introducido por Wayne Hodgins en 1992 (2000), el cual se forma con un conjunto de características que le dan capacidad y funcionalidad a los sistemas de gestión de aprendizaje, principalmente en lo que respecta a la organización, reutilización y referencia de los recursos. No se cuenta con una única definición de lo que puede entenderse por objeto de aprendizaje y por lo general son muy amplias. Por lo que aquí adoptaremos la que por lo general es la más aceptada en diversidad de trabajos.

De acuerdo a IEEE, (*Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.*) un OA es:

"Un objeto es cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado en tecnología".

Haciendo una cuidadosa revisión de las definiciones anteriores, los elementos conceptuales que mejor describen la naturaleza de un OA son:

- Elemento, entidad o recurso digital o no digital.
- Puede ser usada o reutilizada o referenciada para el aprendizaje.
- Constituido por al menos tres componentes internos editables: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización (Chiappe, 2006).
- Soportado por la tecnología digital (por lo general).
- Son elementos para la instrucción, aprendizaje o enseñanza basada en computadora.

De modo gráfico un OA puede entenderse de acuerdo a la Fig. 2.

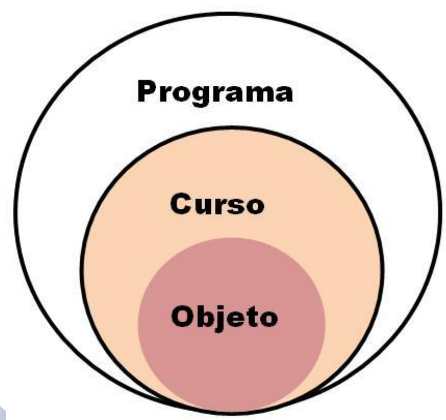

Figura 2. Objeto de Aprendizaje (OA).

¿Por qué hay que hacer material educativo como objetos? Hay diversas razones:

- Reusabilidad de los objetos abarata costos.
- Las características de un OA se heredan al utilizarlo para construir otro OA.
- El uso de OA reduce tiempos de creación de recursos.
- Su uso es accesible y flexible de contenidos apropiados.
- Se adaptan y son escalables al ser reutilizados.

- Se diseñan basados en competencias.
- Permiten interactividad entre los usuarios.
- Pueden ser actualizables y adaptables según las necesidades de los usuarios.

Concluyendo, un OA puede ser cualquier cosa que pueda ser utilizada como un instrumento de aprendizaje. Por mencionar algunos ejemplos, un OA es un archivo de texto o una imagen en forma digital, un video, un audio, etc. Si se tienen varios OA, estos pueden juntarse y formar un tópico del programa de un curso, y con estos tópicos formar todo un curso.

No debe confundirse entre un OA y un OI (objeto de información), ya que para construir un OA, utilizamos un OI y le agregamos un sustento teórico de conocimiento, lo cual permite desarrollar actividades de diseño instruccional requeridas para su construcción. De acuerdo a Chiappe (2006),

> "La figura 3 muestra la composición de un objeto de aprendizaje y las relaciones que se establecen entre sus elementos, según el modelo. Según este esquema, el diseñador instruccional debe centrar su atención en diseñar una actividad de aprendizaje central con características problémicas, la cual debe articular y dar sentido a los contenidos (objetos informativos). Dicha actividad de aprendizaje requiere de una previa formulación de objetivos de aprendizaje o competencias a lograr por el estudiante y podría estar acompañada por un esquema opcional de evaluación. De manera complementaria, deberá construir unos elementos llamados de "contextualización", los cuales han de permitir la correcta identificación del objeto de aprendizaje como un todo integrado por quien lo revisa e interactúa con él. Elementos tan sencillos como un título o un logo institucional o más complejos como textos introductorios, de bienvenida, referencias bibliográficas o aspectos metodológicos son considerados elementos de contextualización."

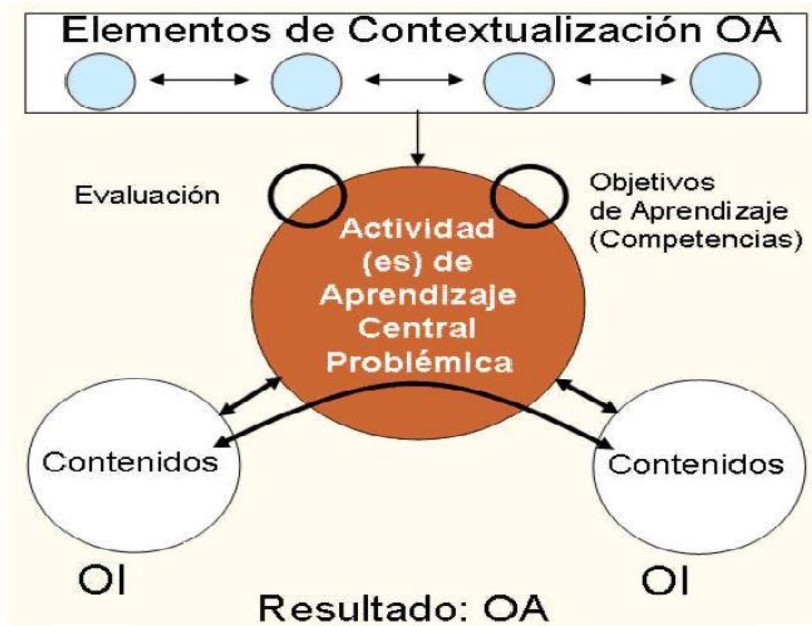

Figura 3. Construcción de objetos de aprendizaje con base en objetos informativos.

Nuevamente Chiappe (2006), nos dice la manera en que pueden integrarse varios OA para crear un nuevo OA más complejo o crear un AVA (Ambiente Virtual de Aprendizaje).

> "Para el efecto, el diseñador instruccional ha de centrarse en la formulación de un eje articulador a manera de situación problémica, la cual debe componer coherente y ordenadamente las actividades de cada objeto de aprendizaje utilizado. Este proceso, complejo por demás, se caracteriza por el manejo de elementos redundantes o por la modificación de aquellos que no se ajustan de manera explícita a los requerimientos instruccionales."

Esto puede mostrarse gráficamente en la figura 4.

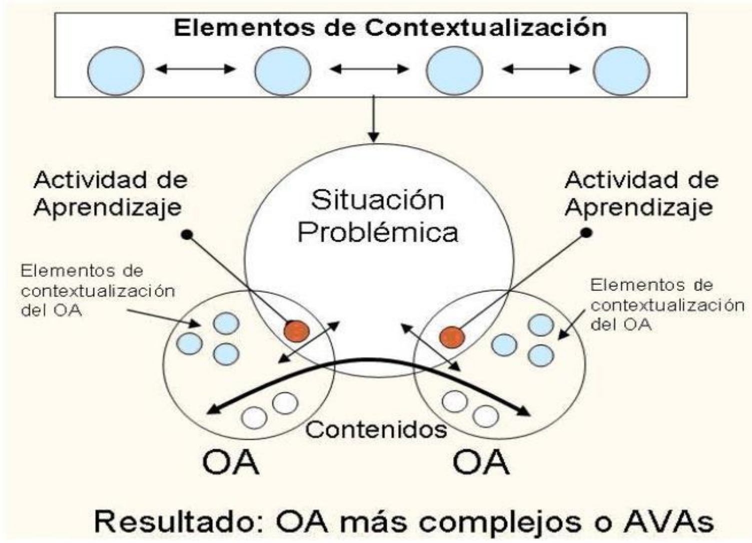

Figura 4. Construcción de Objetos de Aprendizaje complejos o AVAs con base en Objetos de Aprendizaje de menor complejidad.

Como un objeto matemático sólo puede aprenderse por medio de sus representaciones semióticas, estas representaciones serán las que debemos transponer como objetos digitales. Una alternativa en el uso de la tecnología en el proceso educativo es lo que conocemos como Ambientes Computacionales (AC), los cuales en la actualidad son muy aplicados en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Cuando se diseña y desarrolla un AC, la inclusión didáctica es imprescindible. Y debe tenerse un cambio de actitud, respecto a la relación profesor – alumno, pues a pesar de la independencia del alumno, el profesor sigue desempeñando un papel fundamental, pues es él, quien determina el diseño instruccional, así como las estrategias de aprendizaje a seguir por los estudiantes. En consecuencia, para aplicar la didáctica de Cuevas – Pluvinage, primeramente debemos realizar las transposiciones apropiadas, de cada representación semiótica del objeto matemático en estudio, en su respectiva representación digital por medio de los OA, y cada actividad a desarrollar debe basarse en algunos de los elementos didácticos ya mencionados, todo esto bajo una interfaz de uso dinámico de los OA.

La transposición de un objeto matemático en un objeto de aprendizaje computacional, significa desarrollar actividades didácticas para producir una mejor comprensión del mismo, en un ambiente virtual. Este objeto de aprendizaje digitalizado deberá cumplir especificaciones de etiquetado y reusabilidad. Asimismo este objeto certificado estará en un repositorio para formular la administración de cursos. Como un objeto matemático sólo puede aprenderse por medio de sus representaciones semióticas, estas representaciones serán las que debemos simular en los objetos digitales. En nuestro caso específico, de crear un ambiente virtual, que nos introduzca al estudio de la probabilidad, el trabajo a desarrollar es el de transformar un objeto matemático probabilístico en un objeto de aprendizaje. Por lo que para el proceso de desarrollo de objetos de aprendizaje, debemos iniciar con la elaboración de cierto código de programación (el cual es un OI), para después asociarlo a un dibujo o animación (otro OI) u otro conjunto de OIs bajo un diseño didáctico, para de esta manera convertir el objeto probabilístico en un objeto de aprendizaje.

Así, la transformación adecuada de los Objetos Probabilísticos en Objetos de Aprendizaje podría ser:

Objetos probabilísticos		Objetos de Aprendizaje
Experiencias aleatorias	→	**Simulación computacional**
(lanzamiento de monedas, lanzamiento de dados, extracción de cartas, extracción de urnas, carreras de autos, etc.)		(escenario con imágenes, código de programación, botones de control, cuadros de E/S, cuadros de graficación, etc.)
Evento	→	**Animación del evento**
(sale sol, sale un 6, sale un As, sale bola blanca, gana auto 9, etc.)		Se muestra el resultado.
Espacio Muestral	→	**Animación interactiva.**
({a,s}, {1,2,3,4,5,6}, {las 52 cartas}, {No. Bolas, blancas, No. Bolas negras}, {carros del 1 al 10}, etc.)		Se muestra la representación por medio de simulación de objetos gráficos.
Def. clásica de Probabilidad	→	**Se calcula el cociente de modo interactivo**
$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$		Y la aproximación se da en diversas representaciones

Donde todos estos objetos, tienen que estar involucrados en una o varias situaciones didácticas, de acuerdo a los objetivos planteados y a los elementos que integran la didáctica. Es decir, primeramente debe plantearse una situación problémica real, que involucre al azar (por ejemplo, “si lanzamos un dado, ¿que número saldrá y con qué probabilidad?”). Continuando, de modo consecutivo con más actividades que conforman el experimento (iniciando con un problema sencillo, gradualmente se va aumentando la complejidad de ellos), hasta alcanzar el objetivo planeado. Después se trabaja con las operaciones inversas (por ejemplo, “si sabemos que P{A} = 3/6. ¿A qué número o números del dado se refiere el resultado numérico?”).

Entornos Virtuales de Aprendizaje.

Podemos encontrar diversidad de definiciones de lo que es un entorno virtual de aprendizaje (EVA), pero puede entenderse como un escenario donde se desarrollen condiciones favorables para la promoción de la enseñanza y aprendizaje, formado por un conjunto de información convertido en conocimiento y medios de comunicación, permitiendo la interactividad entre: estudiante - estudiante, estudiante - profesor, estudiante - sistema.

En la figura 5. Se muestran integrantes involucrados en un EVA.

Figura 5. Integrantes relacionados en un entorno virtual de aprendizaje.

- **Alumno** es el que aprende, desarrolla competencias, y genera habilidades, siendo el actor principal en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- **Profesor** es quien determina qué se aprenderá y supervisa el aprendizaje del alumno, debido a que es el especialista de la materia.
- **Currículo** es lo que se va a aprender, cuyo contenido es conforme a un plan de estudios oficial de una institución educativa.
- **Pedagogo** es quien da el soporte instruccional didáctico para promover un aprendizaje significativo.
- **Programador** es quien efectúa la transposición de los objetos matemáticos a objetos de aprendizaje, permitiéndole al estudiante una interactividad con calidad en el EVA.
- **Administrador** es el responsable de que todo el contenido y recursos digitales del EVA estén a disposición de los usuarios (profesor y alumno), así como el vigilar que la conectividad no falle.

Cabe hacer mención que se requiere de un servicio eficiente de conectividad físico tanto para los que ofrecen el servicio de aprendizaje usualmente ofrecido por instituciones educativas (infraestructura de redes) como para los que accedan al mismo en este caso los estudiantes (una computadora conectada a Internet).

Por otra parte, según Martínez (2006), los indicadores a considerar en un entorno virtual son:

- Un elemento clave son los *materiales didácticos* que pueden estar realizados en diferentes formatos para ser utilizados por los estudiantes.
- La *acción*, la cual es supervisada o dirigida por el profesor.
- Establecer un sistema de evaluación continua.
- Existencia de una Biblioteca Virtual.
- Encuentros de Carácter Presencial entre alumnos y con el profesor.
- Espacio de debates que puede ser por medio del chat, foro, videochat o blog.

Podemos terminar la exposición de esta parte concluyendo que en un entorno virtual de aprendizaje, el estudiante es el elemento principal y siempre debe estar activo, en matemáticas activo significa siempre buscar resolver problemas de matemáticas, el profesor es quien apoya el proceso de construcción del conocimiento, aunque el estudiante es quien tiene la responsabilidad de cumplir con su aprendizaje. Tal entorno debe ser interactivo, independiente de plataformas, flexible, intuitivo y amigable, que de acuerdo a Mestre, Fonseca y Valdés (2007), es el espacio en donde se crean las condiciones para que el individuo se apropie de nuevos conocimientos, de nuevas experiencias, de nuevos elementos que le generen procesos de análisis, reflexión y apropiación.

3. Marco metodológico

Para aprender probabilidad existen muchas alternativas como: llevar un curso, recurrir a libros, buscar asesorías, etc., pero para darle respuesta a nuestra pregunta de investigación, nosotros buscamos aprovechar el potencial que tiene la tecnología digital en nuestros días, por lo que diseñamos y desarrollamos lecciones didácticas interactivas bajo un entorno virtual de aprendizaje siguiendo la didáctica elegida, dicho proceso se describirá a continuación.

Nuestra propuesta se presenta a través de la construcción de lecciones didácticas de probabilidad para estudiantes de nivel medio superior en la que se busca una innovación en el proceso de enseñanza - aprendizaje mediante el uso de un entorno virtual de aprendizaje, para promover el aprendizaje de la probabilidad. A continuación, mostraremos a grandes rasgos cómo se realizaron. Al empezar un curso de probabilidad, en el nivel medio superior, los alumnos inician el aprendizaje teniendo ciertos conocimientos de matemáticas, junto con ideas intuitivas del azar, algunas correctas, otras incorrectas, que a veces usan para la construcción de los nuevos conceptos. Estos nuevos conceptos junto con los anteriores se convierten a su vez en conocimientos previos para los siguientes. Esta relación podemos verla en el siguiente mapa descriptivo (figura 6).

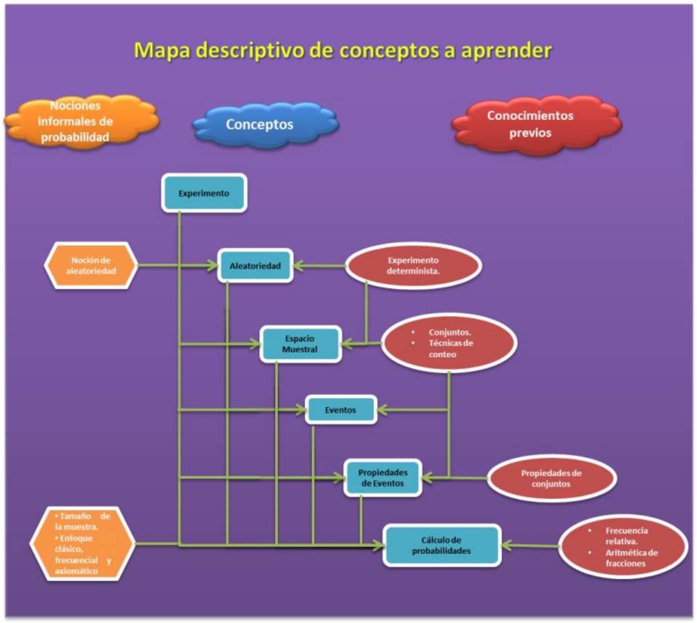

Figura 6. Conceptos a aprender y la relación con sus conocimientos previos.

En esta propuesta, toda lección de aprendizaje en probabilidad se comienza proponiendo un problema de probabilidad basado en un contexto real relacionado a nuestra vida cotidiana, con la finalidad de que sea entendible por los estudiantes y despierte un interés en ellos, cuya característica principal es involucrar al azar. Una vez establecido el problema, se identifica el modelo matemático más apropiado para utilizar la teoría de probabilidad realizando primero una subdivisión del problema en subproblemas como lo aconseja la didáctica utilizada, lo que nos permitirá ir trabajando e intuyendo los elementos probabilísticos a aprender por medio de la experimentación. Una vez finalizado este proceso la integración de las respuestas obtenidas le dará solución al problema original. Durante este procedimiento se irá aprendiendo el uso de la nueva notación matemática relacionada a los nuevos conceptos.

El trabajo del alumno debe iniciarse por identificar el experimento, seguido por una serie de preguntas o actividades, que para contestarlas, el estudiante puede, si lo necesita, recurrir a un simulador que hace uso de herramientas probabilísticas adecuadas a cada problema. Posteriormente calcula la probabilidad de los eventos establecidos en cada situación mediante la estimación empírica e interpretará de forma contextual para que tenga sentido con la situación inicial planteada. Consideramos que la evaluación es parte importante del proceso de aprendizaje por lo que siempre debe ir a la par con la enseñanza, por esta razón, la propuesta es que conforme el alumno va trabajando, conozca de manera inmediata si lo que va realizando es correcto o no. En caso de que cometa algún error, se le señala el probable tipo de error, y se le proporciona la ayuda adecuada todas las veces que sea necesario para que intente nuevamente responder, y así continúe construyendo su propio conocimiento. Atendiendo a la didáctica, nunca se le proporcionarán las respuestas. Cabe aclarar que la evaluación que se va dando es solo con fines informativos, tanto para el estudiante como para el profesor, por lo que no debe entenderse como una evaluación en el sentido estricto que se da en un curso normal.

Aspectos a considerarse en el desarrollo de las lecciones.

Con el objetivo de mostrar un plan de acción a seguir, se presentan los siguientes aspectos a tomarse en cuenta para la realización de las lecciones, supervisados por la didáctica adoptada:

1. **CONCEPTO:** Elegimos primero el concepto o conceptos a trabajar.
2. **SITUACIÓN DIDÁCTICA**: Debido a que se pretende que el alumno siempre esté en acción por medio de solución de problemas (primer elemento), se proponen problemas de la vida cotidiana que involucren los conceptos a desarrollar y que despierten interés en los alumnos (segundo elemento) para abordarlos.
3. **PROCESO DE TRABAJO:** Se plantean pasos a seguir donde cada uno de ellos sea parte de la solución, esto es, se pretende dividir el problema en varios subproblemas que sean más simples de resolver. Al momento de finalizar de responder todos los subproblemas, integramos respuestas e ideas alcanzadas para conformar la respuesta del problema original (cuarto elemento). Una vez contestado el problema, se propone otro, con mayor dificultad, y nuevamente se repite el ciclo de trabajo. Esto debe continuarse hasta que el alumno interiorice el concepto (quinto elemento).
4. **PROCESO DE EVALUACIÓN**: El tercer elemento nos sugiere que el alumno pueda validar sus resultados, comprobando que tiene sentido lógico de acuerdo al problema planteado. Por lo que se debe contemplar una forma de validación, que le permita al alumno identificar los errores que cometa, pero también proveerle de una ayuda específica de acuerdo al error cometido.

5. **OPERACIÓN INVERSA:** Cuando sea posible se incluirán actividades o preguntas que proporcionen la operación inversa (sexto elemento).
6. **REPRESENTACIONES:** Una vez que se trabaja el problema por medio de una representación, se analiza si es viable usar otra representación y cómo puede ser aplicada durante la lección (octavo elemento). Posteriormente se busca establecer una transición entre ellas (noveno elemento).
7. **ERRORES:** En las actividades propuestas en cada paso del proceso de trabajo, por lo general se cometerán errores, la tarea entonces será identificarlos y proponer ayudas específicas a los tipos de errores que se cometan, pretendiendo que la propuesta los acote a sólo los más frecuentes.
8. **AYUDA:** Se generan ayudas específicas para los errores más comunes que pueden cometer los alumnos para orientarlos a llegar a la respuesta correcta, más nunca dársela (segundo elemento).
9. **PROBLEMA POSTERIOR:** Se desea que cada problema pueda servir como base para la construcción de un concepto más complejo (décimo elemento).

Atendiendo a la planeación se inicia el desarrollo, creando por el momento 3 lecciones del nivel básico que utilizan instrumentos probabilísticos tradicionales, dejando a futuro la inclusión de un nivel intermedio formado por problemas de mayor complejidad y dificultad. El objetivo de cualquier lección de probabilidad es conseguir que el estudiante sea capaz de medir las posibilidades de ocurrencia de cada uno de los posibles eventos relacionados al experimento aleatorio en estudio. Por la dificultad del razonamiento y con la idea de que el aprendizaje siga un buen ritmo, cada lección se propone dividirla en dos partes. En la primera parte, se trabajan los conceptos de manera más conductista para facilitar el inicio del aprendizaje, en la segunda parte los conceptos a aprender se trabajan de forma más constructiva, dando lugar a que el estudiante experimente y observe antes de intentar resolver los problemas a los que se enfrenta.

Las partes en que se componen las lecciones se describen a continuación:

Primera parte:

En esta primera parte se trabajan los conceptos de experimento, experimento aleatorio, espacio muestral, evento, y propiedades de eventos, así como entender y manejar la notación matemática correspondiente. Es necesario que el alumno posea ciertos conocimientos previos, algunos de ellos son:

• Definición y notación de conjuntos.
• Unión de conjuntos.
• Complemento de conjuntos.
• Intersección de conjuntos.
• Diferencia de conjuntos.
• Conjunto vacío.
• Par ordenado.

Al concluir cada lección, los alumnos obtienen diversas competencias como son:

- Aprender a interactuar con un sistema computacional.
- Retroalimentar sus ideas.
- Valorar su aprovechamiento como un reconocimiento a sus capacidades.
- Reforzar sus conocimientos previos.
- Desarrollar su habilidad de comprensión.
- Adquirir responsabilidad de trabajo individual.

Segunda Parte:

La segunda parte de las lecciones incluye el concepto de probabilidad frecuencial, junto con algunas de sus propiedades, su estimación mediante el uso de frecuencia relativa, y la comprensión de variabilidad, además de buscar disminuir los sesgos más comunes:

- *Sesgo determinista.*
- *Insensibilidad al tamaño de la muestra*

Como se desea que el alumno tenga la oportunidad de experimentar y observar lo que ocurre esta parte se desarrolla a través de bloques de repetición del experimento, con la intención de que el alumno se dé cuenta que en repeticiones pequeñas los comportamientos de los resultados son muy distintos, por lo que los resultados pueden no ser los correctos debido a la variabilidad de los mismos. En cambio en repeticiones más grandes, se espera que los alumnos observen que los resultados empiezan a mostrar algún patrón de regularidad frecuencial. Los conceptos se trabajan de manera continua en cada uno de los bloques para que se analicen constantemente, con la intención de que queden mejor comprendidos. Entre los beneficios que se adquieren al concluir la lección, además de los adquiridos en la primera parte, están: aproximación empírica, interpretación y toma de decisiones, así como el reforzamiento de los conocimientos previos y desarrollo de la capacidad de observación y análisis.

Una vez que se tiene el contenido, planeación y desarrollo a seguir de las lecciones, el siguiente paso es crear una interfaz supervisada por la didáctica en uso, buscando que pueda ser adaptable a cualquier lección con la posibilidad de ser ajustada según las propias necesidades de cada una. Después de varias propuestas para su implementación, la interfaz está dividida en siete áreas como se muestran en las figuras 7 y 8:

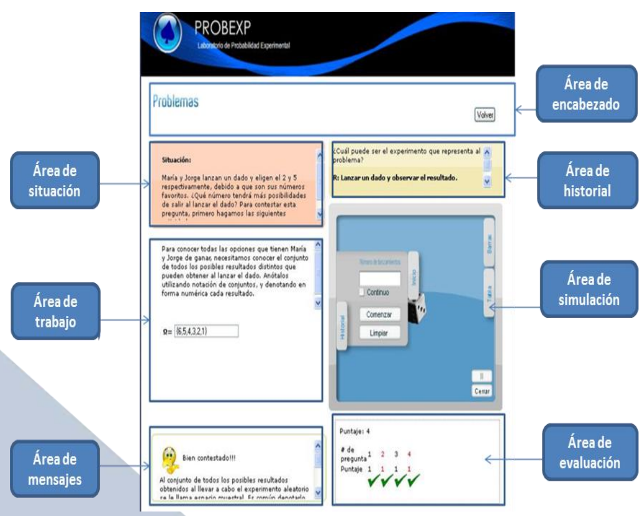

Figura 7. Interfaz primera parte.

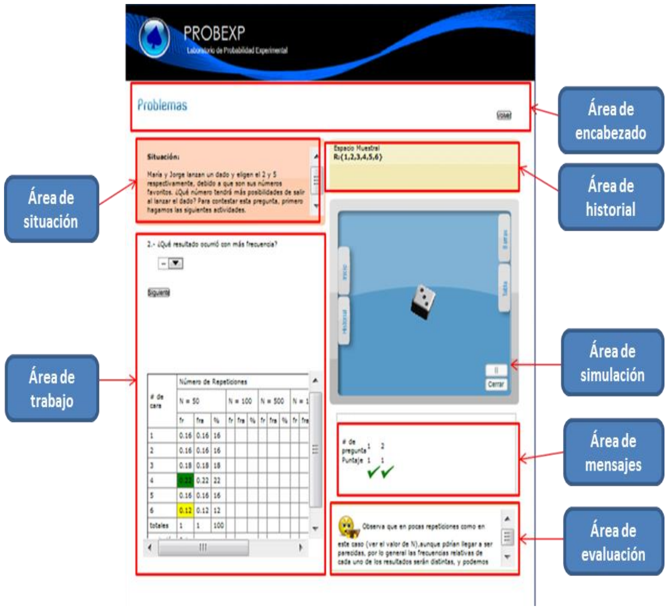

Figura 8. Interfaz segunda parte.

Aplicación de las lecciones desarrolladas.

Como este proyecto contempla que los estudiantes de las preparatorias de la BUAP sean los primeros favorecidos, recurrimos a ellos para probar nuestras lecciones. Una vez preparadas las lecciones y un pre-test, nos entrevistamos con los profesores de la academia de matemáticas, de la Preparatoria Lic. Benito Juárez García, perteneciente a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, con el interés de solicitar que permitieran que pudiera ser probado por estudiantes de la preparatoria. Se trabajó en dos de los laboratorios de cómputo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, perteneciente a la misma universidad. Desde el momento en que llegaron se formaron 2 grupos de estudiantes y fueron distribuidos en los laboratorios previamente preparados. El tiempo promedio para realizar una lección completa fluctúa entre 50 y 60 minutos, a esto le sumamos 20 a 30 minutos por la aplicación del pre-test. De manera breve se les instruyó de la parte operativa para trabajar en el EVA, igualmente se les explicó el propósito de su colaboración y comenzaron a trabajar. El pre-test se aplicó en línea, y cabe mencionar que el test fue diseñado de tal manera que ninguna pregunta quedara sin resolver. De acuerdo a lo planeado, al terminar el examen de diagnóstico, de manera inmediata se les cargaron en línea las lecciones de aprendizaje previstas; en un laboratorio la lección basada en dados y en el otro la lección basada en monedas.

4. Análisis de resultados

El pre-test arrojó la siguiente información. La mayor deficiencia que presentan los estudiantes está en conceptos de conjuntos, principalmente en notación y en producto cartesiano, siguiendo después las operaciones aritméticas de fracciones. Desafortunadamente, sabemos que estas deficiencias tienen mucho peso para la comprensión de los conceptos elementales de un primer curso de probabilidad, por lo que cabría esperar que su desempeño en cuestión de aprendizaje en un curso tradicional de probabilidad fuera deplorable.

Respecto a las dos lecciones que se aplicaron podemos resumir el análisis en los siguientes resultados.

Conclusiones respecto a la lección basada en dados.

Podemos decir de manera general que la aplicación de esta lección reflejó un buen desempeño de parte de la mayoría de los estudiantes que participaron, pues a pesar de que el pre-test nos mostraba que teníamos a un grupo de alumnos de ninguna manera diferente a cualquier otro grupo que va a iniciar un primer curso de probabilidad, es decir, con muchas deficiencias en conocimientos previos de matemáticas, principalmente conjuntos y aritmética de fracciones, los resultados rebasaron nuestras expectativas, pues la mayor parte de ellos consiguió no sólo pasar el puntaje mínimo establecido en la lección, sino acercarse al puntaje máximo. Consideramos que varias de las razones que incidieron a favor de un aprendizaje significativo en los alumnos, fueron: la retroalimentación que proporciona el sistema, el ponerlos a trabajar preguntas y problemas en los que de manera frecuente debían hacer uso de los mismos conceptos, la ayuda y evaluación continua que les da el EVA, así como el iniciar el aprendizaje con preguntas sencillas y gradualmente fueron aumentando de complejidad. Igualmente cabe destacar, la facilidad con que los estudiantes interactuaron con la interfaz, a tal grado de que las intervenciones de ayuda fueron escasas.

Conclusiones respecto a la lección basada en monedas.

De acuerdo al análisis estadístico efectuado, se vio que al aumentar la complejidad del problema, aumentaron las dificultades para contestar correctamente, aun así podemos decir que el aprovechamiento en general nuevamente fue aceptable, tomando en consideración que la notación a manejar se les complicó durante una buena parte de la lección, sin embargo, la hicieron suya y eso ayudó a mejorar su puntaje final. Esto también nos permite afirmar que se dio una mejora en sus conocimientos previos.

5. Conclusiones y recomendaciones

Finalizamos haciendo ver que el grupo de estudiantes que nos apoyó probando las lecciones desarrolladas no fue un grupo excepcional, más bien fue un grupo normal del nivel medio superior, al menos de preparatorias de la propia universidad. Llegaron con fuertes deficiencias en los conocimientos que son fundamentales para iniciar un primer curso de probabilidad como son conjuntos y aritmética de fracciones, así como notación en producto cartesiano. Con esto como antecedente podía preverse un mal desempeño de parte de los alumnos, pero por lo mostrado en nuestros análisis estadísticos, la mayoría logró hacer un buen papel con la única ayuda que le proporcionó el sistema. Desde que las lecciones empezaron a ser probadas por estudiantes del nivel medio superior primero de manera aislada, y en esta ocasión con un grupo de alumnos de primero, segundo y tercer año, tal vez no muy numeroso de nuestras preparatorias, pero fueron los estudiantes que pudieron prestarnos, siempre tuvimos la confianza de que no solo lograrían alcanzar el puntaje mínimo de las lecciones, sino que una mayoría debería estar más cerca del puntaje máximo. Esta primera evaluación nos hace ver de manera más formal que no vamos por un rumbo equivocado en nuestra propuesta didáctica. Es decir, este tipo de lecciones pueden ser una buena alternativa para promover el aprendizaje de la probabilidad a nivel medio superior. Los resultados nos muestran que en cada lección es necesario reforzar el aprendizaje de los conceptos que más dificultades han presentado, además de considerar dividir las lecciones en más partes para evitar la desviación de nuestro objetivo que es el que aprendan.

6. Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques, 7, 2, P. 33- 115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). Argentina.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Luis Rico Romero (coord.) Editores: Horsori: Universidad de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.

Chiappe, A. (2006). "Modelo de Diseño Instruccional basado en objetos de aprendizaje (MDIBOA): Aspectos relevantes." Universidad de La Sabana, Área de Informática para la docencia. Recuperado el 6 de junio de 2009, de http://oas.unisabana.edu.co/files/MDIBOA.pdf

Claparede, E. (1905)- "Esquisse d'une theorie biologique du sommeil", Arch. De Psychol., IV, Nos. 15-16, February-March, 1905.

Cuevas, C. A. (2005). Curso Seminario de Didáctica de las Matemáticas. Publicación interna del Cinvestav IPN.

Díaz, C. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian reasoning. International Electronic Journal of Mathematics Education, 2 (3), 128-148. Recuperado el 1 de marzo de 2009, de http://www.iejme.com/032007/d2.pdf

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). 177-196.

Díaz, F. (2008). Educación y nuevas tecnologías de la información y la comunicación: ¿hacia un paradigma educativo innovador?. Revista Sinéctica, 39. Recuperado el 10 de marzo de 2012 de: http://portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinextica/Revista/fridadb

Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: L'Articulation de dux registres, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg France.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática Educativa II. Université Louis Pasteur de Strasbourg, France Ed. Hitt F., 1998. Editorial Iberoamericana, 173-201.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuel, Peter lang, Suisse.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Congnitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. p.p 3-26. Memorias pmena xxi México.

Guisasola, J. y Barragués. J. I. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de Universidad en la resolución de problemas de Probabilidad. ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 20 (2), 285-302. Recuperado el 24 de febrero de 2009, de http://84.88.10.30/index.php/Ensenanza/article/viewArticle/21812/0

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, 237-284.

Hirsch, L. S., & O´Donnell, A. M. (2001). Representativeness in Statistical Reasoning identifying and Assessing Misconceptions. Journal of Statistics Education, 9 (2). Recuperado el 25 de Noviembre de 2009, de http://www.amstat.org/publications/jse/v9n2/hirsch.html

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2).

Kahneman & Tversky, 1982; State of the Art of Teaching Probability at Secondary Level. In B. Phillips (Ed.*), Papers on Statistical Education presented at ICME-8.* Australia: Swinburne University of Technology.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (139-156). Dordrecht: Kluwer.

Martínez, R. (2006). Indicadores cibernéticos: ¿Nuevas propuestas para medir la información en el entorno digital? *ACIMED 14* (4).

Mestre, U., Fonseca, J.J. y Valdés, P.R. (2007). Entornos virtuales de enseñanza aprendizaje. Ciudad de Las Tunas: Editorial Universitaria.

Moreno, L. (1999). On representations and Situated Tools. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Cuernavaca, Morelos, México.

Nisbett, R., Krantz, D., Jepson, C., & Kunda, Z. (1983).*The Use of Statistical Heuristics in Everyday Inductive Reasoning*. Psychological Review, 90 (4), pp. 339-363.

Ojeda, A.M. 1995. Dificultades de los alumnos respecto a la probabilidad condicional. UNO, revista Didáctica de las Matemáticas, No. 5 año II, España.

Orozco M. C. y Labrador M. E. (2006). La tecnología digital en educación: implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Theoria, 15, 002 Recuperado el 07 de Octubre de 2010 de: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=29915209

Piaget, Jean (1947). The psychology of intelligence. London: Routledge.

Piaget, J. & inhelder, B. & Szeminska, A. (1948). La géometrie spontanée de l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. En F. Hitt (Ed.), Editorial Iberoamérica. México, 1-15.

Quiñonez, C. (2005). "Desarrollo de la Educación en México (1994-2000)". Fundación para la cultura de Maestro, 19-28.

Sánchez, E. (1996a). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*,. México: Grupo Ed. Iberoaméricana. 389-404. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., y Cañizares, M.J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 22, 7-25.

UNESCO- ICDE. (1998). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. La educación superior en el siglo XXI. Recuperado el 26 de mayo de 2012 de: http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001163/116345s.pdf

Vergnaud, G. (1987). Conclusion; Problems of Representation in theTeaching and Learning of Mathematics. Ed. by C. Janvier. Lawrence Erbaum Associates, Canada.