Creación de problemas en la docencia e investigación

Uldarico Malaspina Jurado y Estela Vallejo Vargas
umalasp@pucp.edu.pe y e.vallejo@pucp.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú/IREM-PUCP

Resumen

En el presente artículo se exponen reflexiones sobre la creación de problemas como parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y como parte de la tarea de investigación en educación matemática. Las reflexiones son basadas en experiencias desarrolladas con profesores en formación y en ejercicio en talleres realizados en el Perú y en varios países latinoamericanos, así como en las experiencias de asesoría de tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Se hacen propuestas de estrategias para estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas en los profesores de matemáticas, a partir de episodios en clases. Se destaca la importancia de estimular la capacidad de formular preguntas y de justificar las afirmaciones que se hacen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: creación de problemas, resolución de problemas, episodios en clases, formulación de preguntas, justificaciones.

Importancia de la creación de problemas

Es clara la importancia de resolver problemas como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; sin embargo se pone poco énfasis en la creación de problemas. Ciertamente, los problemas tienen que haberse creado antes para poder resolverlos, pero la creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, ni considerar que los problemas a trabajar en clases deben ser únicamente aquellos que figuran en los libros o en internet. Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor conoce la realidad específica en su aula, el entorno sociocultural y las motivaciones de sus alumnos y es un desafío profesional para él, tanto crear secuencias de actividades y problemas adecuados para esa realidad, como estimular a sus alumnos no solo a resolver problemas, sino a "ir más allá": a crear sus propios problemas.

Los docentes debemos estimular lo más posible la creatividad de nuestros alumnos en el aprendizaje de las matemáticas y si bien es cierto que ésta se manifiesta "reactivamente" cuando ellos resuelven ingeniosamente problemas que les proponemos, estamos dejando de lado la creatividad "proactiva" si no los estimulamos a que ellos creen sus propios problemas de matemáticas. La realidad es rica en situaciones que permiten crear problemas, lo cual conlleva el identificarlos y el saber plantearse preguntas, que son capacidades fundamentales a desarrollar en nuestros alumnos, más aún en una perspectiva de "aprendizajes para la vida" y "en el día a día", que actualmente enfatiza el Ministerio de Educación del Perú. Crear problemas de matemáticas a partir de situaciones reales, contribuirá a tener una mirada más analítica de la realidad, que será útil no solo en el campo de las matemáticas.

Siendo tan importante que nuestros alumnos aprendan matemáticas no solo resolviendo sino también creando problemas, es esencial que los docentes desarrollemos la capacidad de crear problemas de matemáticas, para poder orientar adecuadamente el desarrollo de tal capacidad en nuestros alumnos.

En diversos trabajos de investigadores en educación matemática encontramos expresiones que destacan la importancia de la creación de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, ya en 1989 el National Council of Teachers of Mathematicas (NCTM) recomendaba a los profesores brindar oportunidades para que los estudiantes piensen matemáticamente y desarrollen sus conocimientos mediante la creación de problemas. Textualmente, decía: "los estudiantes deben tener algunas experiencias reconociendo y formulando sus propios problemas, actividad que es el corazón del hacer matemáticas" (p. 138). Recomendaba también que a los estudiantes se les dé oportunidades de formular problemas a partir de una situación dada y de crear nuevos problemas modificando las condiciones de un problema dado. (NCTM, 1991, p. 95).

Según Malaspina (2011)

> La actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes. (p. 236)

Más recientemente, Bonotto (2013) nos dice:

> El proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática, que adecuadamente implementada en actividades de clase, tiene el potencial de llegar más allá de las limitaciones de los problemas verbales, por lo menos como son típicamente tratados. Impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental. (p. 53)

A continuación resumimos las razones didácticas e investigativas que considera Malaspina (2013a) en relación a la importancia de la creación de problemas:

► Razones didácticas
• En la enseñanza (creación de problemas por los profesores)
Contribuye a:

a) Proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alumnos y a los contextos en los que viven.

b) Crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante.

c) Proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos, que contribuyan a aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas.

d) Proponer problemas y actividades que respondan a las orientaciones generales que suelen darse en los diseños curriculares y documentos complementarios desde los organismos centralizados de educación.

e) Llenar el vacío que hay en la mayoría de textos de matemáticas, sobre todo en los de nivel escolar.

f) Tener problemas adecuados para aplicar las teorías sobre educación matemática, fuertemente apoyadas en la resolución de problemas.

g) Mejorar la calidad de las evaluaciones.

h) Consolidar la formación matemática de los profesores.

• En el aprendizaje (creación de problemas por los alumnos)
Contribuye a:

a) Desarrollar la creatividad.

b) Motivar más el estudio.

c) Fortalecer las capacidades de resolver problemas, de formular(se) preguntas, de identificar problemas y de investigar.

d) Ver aspectos matemáticos en el medio que los rodea.

e) Establecer conexiones entre la matemática y otros campos del conocimiento.

f) Ampliar la visión de las matemáticas.

g) Adquirir una formación matemática más sólida (son experiencias que van más allá de lo operativo y de los problemas tipo).

h) Fortalecer la autoestima del alumno.

► Razones investigativas
Contribuye a:

a) Estimular la capacidad de formularse preguntas (esencial en la investigación).

b) Estimular la capacidad de identificar problemas y formular modelos matemáticos.

c) Estimular y desarrollar la creatividad.

d) Aplicar y continuar investigaciones sobre educación matemática basadas en la resolución y creación de problemas.

Problemas y creación de problemas

Para precisar lo que entendemos por crear problemas, seguiremos la posición adoptada en Malaspina (2013a):

La creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema

- a partir de un problema dado (**variación** de un problema); o
- a partir de una situación (**elaboración** de un problema).

La situación puede ser dada, o configurada como parte de la elaboración del problema. En el primer caso es una situación tal como se presenta en la realidad; y en el segundo es una situación imaginada, adecuadamente presentada.

Para desarrollar esta perspectiva sobre la creación de problemas, es importante precisar los elementos fundamentales que percibimos en los problemas:

Información

Requerimientos

Contexto

Entorno matemático

La información está constituida por los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.

El requerimiento es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.

En cuanto al contexto: suele llamarse "problema contextualizado" a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana; sin embargo, consideraremos que el contexto también puede ser formal o estrictamente matemático. En ese sentido, podemos afirmar que en un problema, el contexto puede ser intra matemático o extra matemático. En el primer caso, como su nombre lo indica, el problema se circunscribe a lo matemático (por ejemplo, hallar el dominio de una función, graficar una ecuación de dos variables y hallar los factores primos de un número natural, son problemas que tienen contexto intra matemático). En el segundo caso, el problema está más vinculado a una situación real.

El elemento entorno matemático se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Ciertamente esto es relativo, pues depende del camino que se siga para resolver el problema. En el marco de la creación de problemas para el aprendizaje, el entorno matemático puede ser el punto de partida para la creación de nuevos problemas, como "el tema a tratar". En un marco más amplio, puede ocurrir que un problema no se resuelva, precisamente por no encontrar el entorno matemático adecuado (como ocurrió durante mucho tiempo con algunos problemas famosos; quizás el más conocido es el de la conjetura de Fermat), pero quien resuelve un problema o intenta resolverlo, se apoya en un conjunto de conceptos matemáticos al que llamaremos entorno matemático. Evidentemente, no habiendo una única manera de resolver un problema, el entorno matemático no tiene que ser único y la misma información, requerimiento y contexto puede llevar a problemas diferentes, al precisar el entorno matemático que se debe usar para resolverlo.

Con estas precisiones, podemos ahora explicitar mejor lo que entendemos por variación y elaboración de un problema.

Variación de un problema dado: *proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema dado.*

Ejemplos muy interesantes de éstos son los que resultan de plantear generalizaciones a partir de un problema dado.

Elaboración de un problema: *proceso según el cual se construye un nuevo problema, a partir de una situación (dada, o configurada por el autor),*

- *cuyo contexto se origina en tal situación*
- *cuya información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación;*
- *y cuyo requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, que están implícitas en el enunciado, dentro de un cierto entorno matemático.*

La creación de problemas genera una dinámica matemática acompañada de lo didáctico, cuyas fronteras son difíciles de predecir, pues ya sea por variación o por elaboración, surgen preguntas cuyas respuestas pueden requerir un entorno matemático que va más allá de lo inicialmente considerado. Esto es interesante desde el punto de vista didáctico, porque permite ampliar la visión que suele tenerse de las matemáticas, como algo estático y acabado. Los docentes involucrados en la creación de problemas de matemáticas que sean más adecuados a los entornos sociales y regionales de sus alumnos, a sus motivaciones y a sus dudas, pueden convertir un problema difícil de resolver -haciendo variaciones adecuadas de él - en varios problemas más sencillos, con dificultad gradual, que finalmente conduzcan a la solución de tal problema y en el camino permita experiencias valiosas de aprendizaje. Una pregunta o una interpretación errada de un concepto pueden ser puntos de partida para crear un problema- porvariación de otro o por elaboración- cuya solución contribuya a aclarar dudas. Elaborar problemas con entorno extra matemático, tomando aspectos de la realidad cercana a los estudiantes, aportará a que tanto los que crean los problemas como los que los resuelvan tengan miradas más reflexivas de la realidad y encuentren las matemáticas que hay en ella.

Ejemplos

Presentaremos tres ejemplos de creación de problemas, mostrados en la conferencia ofrecida por Malaspina (2013a) en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, en Montevideo.

1) De ***elaboración*** de un problema:
Situación:
Se tiene un alambre flexible de 20 cm de longitud.

Problema creado:
Determinar el mayor número de cuadrados, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

Información: Longitud del alambre.

Requerimiento: El mayor número de cuadrados con lados de longitud entera que se pueden formar.

Contexto: Extra matemático.

Entorno matemático: Geometría, cuadrados, perímetro; división entera.

2) De ***variación*** de un problema:

Problema:
Determinar el mayor número de cuadrados con lados de

longitud entera que se puede formar con un alambre de 20 **cm de longitud**.

Problema creado
Determinar el mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 **cm de longitud**.

Información: Longitud del alambre. (No modificada)

Requerimiento: El mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud. (Modificado)

Contexto: Extra matemático. (No modificado)

Entorno matemático: Geometría, triángulos, perímetro, relaciones entre longitudes de los lados de un triángulo; división entera. (Modificado)

3) De ***variación*** de un problema:

Problema:
Determinar el mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 **cm de longitud.**

Problema creado:
Examinar si un alambre de 36 **cm de longitud se puede cortar en** 4 **trozos de longitudes enteras diferentes, de modo que cada longitud en cm sea un número primo.**

Información: Longitud de un alambre (Modificado)

Requerimiento: Expresar 36 como suma de 4 números primos diferentes (Modificado)

Contexto: Extra matemático. (No modificado)

Entorno matemático: Teoría de números. Conjetura de Goldbach (Modificado)

Es interesante notar que el entorno matemático ha sido drásticamente modificado, pues se ha pasado de la geometría a la teoría de números. Ciertamente es natural crear nuevos problemas haciendo variaciones a éste; no solo cambiando la información (diversas longitudes del alambre), sino planteando una situación general (alambre de longitud entera n y examinar si se puede cortar en p trozos cuyas longitudes son números primos), lo que lleva a considerar diversos casos y demostraciones que van mucho más allá de las matemáticas de la educación secundaria, pues ya forman parte de un tema que sigue siendo motivo de investigación de grandes matemáticos, como es la conjetura de Goldbach (todo número par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos).

Estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas

Consideramos muy importante desarrollar esta capacidad en los alumnos de todos los niveles educativos, desde la educación inicial hasta los niveles de posgrado. Esto conlleva que los profesores desarrollemos tal capacidad, combinando adecuadamente lo matemático y lo didáctico, de modo que la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático correspondan al nivel educativo y tengan el grado de dificultad adecuado para que sea motivador y ayude al aprendizaje. En ese sentido, nuestra propuesta es que, como parte de la formación de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio, se realicen talleres en los que se trabaje, individual y grupalmente, creando problemas de matemáticas.

Como lo hicimos en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Malaspina, 2013b) y en varios otros cursos cortos con profesores en ejercicio, o como parte de un curso de matemáticas para futuros profesores de educación inicial y primaria, proponemos que se empiece a crear problemas de matemáticas haciendo variaciones a un problema dado, presentado en el marco de un episodio en clase. La idea del episodio en clase es ubicar el problema en un contexto didáctico, considerando reacciones de alumnos ante el problema propuesto y pedir al participante en el taller que - en un trabajo inicialmente individual y luego grupal - analice el episodio y cree dos problemas variando el problema dado:

- Uno, con el propósito de orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a llegar a una solución correcta del mismo. A tal problema lo denominamos "*problema pre*".

- Otro, cuya solución se facilite por haber resuelto correctamente el problema dado en el episodio descrito; un problema con el propósito de retar a los alumnos a ir más allá de una solución correcta del problema dado. A tal problema lo denominamos "*problema pos*".

Cabe aclarar que los problemas que se creen pueden tener varias partes de dificultad gradual. Esto es particularmente útil en el problema pre.

La creación de los problemas pos, contribuirá a ampliar el panorama de las matemáticas, por ejemplo haciendo generalizaciones y buscando modelos matemáticos relacionados con el contexto del problema del episodio. Por otra parte, un problema pre, el problema del episodio y un problema pos, constituirán una secuencia de problemas, relacionados entre sí, con tres niveles de dificultad.

Ejemplo
Considere el siguiente episodio en clase:

En el grupo de estudios de matemáticas, el profesor propone el siguiente problema a los alumnos:

En la tienda ALFA, la primera semana de julio ofrecían todos sus productos sin descuento; la segunda semana, con un descuento del 20%; y la tercera semana, con un descuento adicional del 15%, lo cual anunciaron como GRAN DESCUENTO DEL 20% + 15% EN TODOS NUESTROS PRODUCTOS.

Examinar si es verdad que la tercera semana de julio la tienda ALFA ofreció sus productos con el 35% de descuento, respecto a los precios de la primera semana.

Después de unos minutos:

- La mayoría dice que sí, que es verdad.
- Juan y Carla dicen que no, que el descuento de la tercera semana fue menos del 35%
- María dice que el descuento de la tercera semana fue del 68%

Algunos *problemas pre* propuestos por los profesores:

Problema pre *1* (Trabajo individual)

Rosa compra una blusa que tiene precio de 100 nuevos soles, pero con un descuento del 20% por remate de saldos y un descuento adicional del 10% por tener tarjeta de la tienda. ¿Qué porcentaje de descuento tuvo finalmente María en la compra de la blusa?

La idea manifestada por la autora del problema fue considerar un precio cuyos porcentajes fueran muy fáciles de calcular, para que los alumnos concentren su atención en el descuento total. Es claro que hizo modificación cuantitativa en la información y que el contexto (extra matemático) lo ha presentado de manera distinta, manteniendo la idea fundamental del problema del episodio.

Problema pre *2* (Trabajo individual)

En un remate de saldos de temporada, una tienda durante una semana hace el descuento del 50% en todos sus productos textiles y la siguiente semana hace un descuento adicional del 50%. ¿Cuál es el porcentaje de descuento total que hace durante la segunda semana?

La idea manifestada por el autor del problema fue llamar la atención de los alumnos para que no obtengan el descuento total como una simple suma de porcentajes, porque no resulta intuitivo que en la segunda semana el descuento total sea del 100%. También se ha hecho una modificación cuantitativa en la información.

Problema pre *3* (Trabajo grupal.)

(La autora del problema pre *1* integró este grupo)

Rosa compra una blusa que tiene precio de 100 nuevos soles, pero con un descuento del 20% por remate de saldos y un descuento adicional del 10% por tener tarjeta de la tienda.

a) *¿Cuánto paga María por la blusa si la compra en la segunda semana?*

b) *El precio que paga en la segunda semana, ¿qué porcentaje es del precio de la blusa sin descuentos?*

c) *¿Cuál es el porcentaje total de descuento de la blusa en la segunda semana?*

La idea manifestada por el grupo fue que este problema ayudaría a distinguir más claramente entre lo que se paga y el descuento, que parece ser la confusión que tiene la alumna María en el episodio presentado, pues aparentemente hizo bien sus operaciones, pero no distinguió entre lo que paga (el 68% del precio inicial) y el descuento total (que es el 32%, que se obtiene de la resta 100 - 68). Se han hecho modificaciones cuantitativas en la información y se ha ampliado el requerimiento.

En cuanto a los problemas pos, la mayoría de los que presentaron fueron similares al del problema del episodio, con otros precios y en algún caso, considerando tres descuentos sucesivos; es decir, fundamentalmente con variaciones cuantitativas en la información.

A continuación algunos problemas pos que no son del tipo que acabamos de describir:

Problema pos *1* (Trabajo grupal)

Pedro y Juan compraron un terno cada uno. Pedro lo compró con un descuento del 20% más otro descuento adicional de 20% y Juan lo compró con un descuento del 30% más otro descuento adicional de 10%. ¿Cuál de ellos obtuvo un mayor descuento?

Los integrantes del grupo manifestaron que con este problema se reforzaría la comprensión de que el descuento total no es una simple suma. La modificación de la información no es solo cuantitativa. Se añade información que lleva a la comparación de resultados para satisfacer el requerimiento también modificado.

Problema pos *2* (Trabajo grupal)

En una tienda, si se compra con una tarjeta para hacer el pago luego de 30 días de efectuada la compra, el precio se recarga en un 10% y si el pago es entre los días 31 y 35 posteriores al día de la compra, *se hace un recargo adicional de 5%. Si Juan hizo una compra con este sistema el día 20 de agosto y pagó el día 23 de setiembre ¿qué porcentaje de recargo pagó?*

Los integrantes del grupo manifestaron que habiendo entendido que para los descuentos acumulados no se hace una simple suma, también lo deberían extender para los casos de recargos. Esencialmente es una modificación cuantitativa y cualitativa de la información.

Otros problemas pos (Propuestos por el autor)

3. Si la tienda BETA hace un descuento de fin de temporada del p%, más otro adicional del q%, ¿cuál es el descuento total, en porcentaje, respecto al precio sin descuento?

4. Si Juan recibió en el 2012 un aumento del p% respecto a su sueldo del 2011; y en el 2013 ha recibido un aumento del q% respecto a su sueldo del 2012 ¿Cuál es el porcentaje de aumento total respecto a su sueldo del 2011?

5. Sara recibió en el 2013 un aumento del 25% respecto a su sueldo del 2012. ¿Qué porcentaje de aumento debe recibir en el 2014, respecto a su sueldo del 2013, para que el porcentaje de aumento total respecto del sueldo del 2012 sea del 35%?

Como puede verse, en el problema 3 la variación que se hace al problema es modificar la información, al considerar porcentajes cualesquiera de descuentos acumulados; es decir, se está haciendo una generalización y la respuesta requiere no solo comprensión sino manipulación algebraica. Más aún, para la secundaria o las matemáticas básicas de la educación superior, puede usarse para visualizar la aplicación de la composición de funciones; en este caso, de dos funciones lineales, que es también una lineal:

Descuento del p%:
Precio inicial $x \to$ nuevo precio: $(1-\frac{p}{100})x = f(x)$
Descuento del q%:
Precio inicial $w \to$ nuevo precio: $(1-\frac{q}{100})w = g(w)$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{Descuento del p\%}"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \underset{\text{(Nuevo precio)}}{f(x) = \left(1-\frac{p}{100}\right)x = w} \arrow[d, "\text{descuento del q\%}"] \\
& \underset{\text{(Precio final, con los descuentos acumulados)}}{g(w) = \left(1-\frac{q}{100}\right)\left(\left(1-\frac{p}{100}\right)x\right) = g(f(x))}
\end{tikzcd}$$

Como

$$(1-\frac{q}{100})(1-\frac{p}{100})x = (1-\frac{p+q-\frac{pq}{100}}{100})x$$

el descuento total es

$$(p+q-\frac{pq}{100})\%.$$

Es fácil ver que para el problema del episodio mostrado, $p = 20$ y $q = 15$. Haciendo el reemplazo correspondiente, se obtiene que el descuento total es del 32%.

Ciertamente, no se trata de obtener una fórmula para memorizarla, sino de ilustrar la generalización y usarla para sacar algunas conclusiones. Por ejemplo, de la conmutatividad de la adición y de la multiplicación, podemos concluir que el descuento acumulado total será el mismo indiferentemente del orden en que se apliquen los descuentos; es decir, si es el p% ó el q% de descuento que se aplica primero.

El problema *4* presenta también una situación general, similar a la del problema *3*. Hay una modificación de la información que conlleva una modificación natural en el requerimiento, al considerar aumentos y no descuentos.

El problema *5* presenta modificaciones cuantitativas, cualitativas y relacionales en la información, pues las cifras son diferentes, se trata de aumentos y no de descuentos; y se conoce el porcentaje de aumento inicial y el del aumento total acumulado. El requerimiento también está siendo modificado, pues se pide determinar uno de los porcentajes de aumentos acumulados.

Si x es el sueldo en el 2012 (obviamente diferente de cero),por el aumento del 25% asignado, el 2013 el sueldo será de $1,25x$. Como en el 2014, según el requerimiento del problema, el sueldo debe ser $1,35x$, al considerar un aumento del q% para el 2014, respecto al sueldo del 2013, debe cumplirse que

$$(1+q)1,25x = 1,35x$$

de donde $q = 0,08$ lo cual significa que el aumento requerido es del 8%. Notar que la respuesta no depende del monto del sueldo recibido en el 2012.

Experiencias de creación de problemas en tesis de alumnos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

En esta sección mostramos ejemplos de problemas creados con alumnos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, como parte del trabajo de investigación en el desarrollo de sus tesis para su graduación.Hemos seleccionado algunos de los problemas creados por cinco tesistas, asesorados por el profesor Uldarico Malaspina, que fueron aplicados en sus respectivas experiencias de investigación. Los tres primeros problemas fueron aplicados en la (i) Educación Secundaria; mientras que los otros dos fueron aplicados en la (ii) Educación Superior.

Específicamente, en el apartado (i), presentamos los problemas 1 y 3, que fueron trabajados con alumnos de primer grado de secundaria, y el problema 2 que fue trabajado con alumnos de cuarto grado de secundaria. Por otro lado, en el apartado (ii), presentamos el problema 1, que fue trabajado con alumnos del primer ciclo de Ciencias Administrativas y Contables, y el problema 2 que fue trabajado con alumnos del primer ciclo de Arte y Diseño Gráfico Empresarial.

Las experiencias didácticas que resumimos a continuación nos muestran quelos investigadores que tengan un enfoque constructivista de la enseñanza de las matemáticas, encontrarán en la creación de problemas un medio importante para desarrollar investigaciones que enfaticen en el estudio razonado, creativo y constructivo de cualquier objeto matemático. Nuestra labor como profesores es desarrollar nuestra capacidad de crear problemas y así ser capaces de responder a las inquietudes y dudas de nuestros alumnos planteándoles nuevos problemas que los lleven a entender cuestiones que surgen en nuestras mismas clases y también puedan conducirlos a entender problemas más complejos. Al crear problemas adecuados podemos ir midiendo el nivel de la adquisición de diversos conocimientos matemáticos, los cuales pueden ser además graduados en su dificultad, de acuerdo al planteamiento que formulemos. Una manera interesante de desarrollar esta capacidad es la que proponemos en este artículo, que es seguir, por ejemplo, las estrategias de creación de problemas propuestas en secciones precedentes.

Muchas de las tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas están orientadas a presentar propuestas concretas de enseñanza de diversos tópicos de matemática, dentro de un marco teórico específico. La propuesta requiere de problemas originales con propósitos concretos y que se adecúen a un nivel determinado. Por ello, es importante para los investigadores conocer estrategias para la creación de problemas de matemáticas, que las implementen, las examinen y las mejoren, al tiempo que desarrollan esta habilidad.

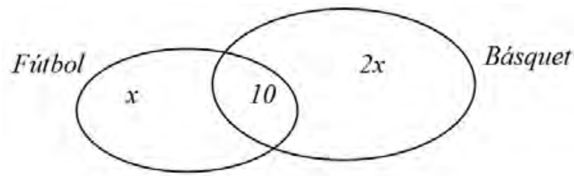
Es importante mencionar que las propuestas de enseñanza de las matemáticas contenidas en las tesis pueden ayudar directamente a los profesores en su ejercicio docente diario, pues son parte de investigaciones formales que les permitirá complementar sus conocimientos de matemática y de didáctica. Los trabajos dan ideas para mejorar o reemplazar ejercicios meramente repetitivos por problemas que requieren el uso de razonamientos y contienen propuestas concretas sobre los planteamientos hechos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú.

A continuación presentamos cinco problemas, que son parte de investigaciones realizadas sobre enseñanza de las matemáticas según lo detallado previamente.

i. Educación Secundaria

Problema 1

Juan preguntó a 40 alumnos si practican básquet o fútbol. Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.



Observando el gráfico,

a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste.

c) Resuelve el problema usando la ecuación.

Este problema fue creado en el marco de la **tesis** "*Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales*", **elaborada por** *Luz Milagros Azañero Távara*, con el **propósito** de examinar las dificultades que presentan los alumnos ante el requerimiento de pasar de un registro algebraico a un registro verbal.

Cómo se aplicó

Se aplicó a 29 estudiantes de Primer año de secundaria de un colegio parroquial de San Isidro, Lima, el 2012.

Algunas respuestas interesantes

[Alumno 1]
Para el ítem (a):

10 alumnos juegan fútbol y basquet. Pero los que practican solo basquet son el doble de los que practican solo fútbol, si son 40 alumnos ¿Cuantos practican solo fútbol

La representación verbal
corresponde a la
representación algebraica

Observemos que la estudiante escribió correctamente el enunciado del problema de acuerdo a la información con la que contaba en el respectivo registro algebraico. Notemos además, que el problema planteado por la alumna cuenta con los elementos básicos de todo problema (información, requerimiento, contexto y entorno matemático). La alumna ha realizado una adecuada conversión del registro algebraico al registro verbal, llegando a cumplir con el propósito de esta actividad.

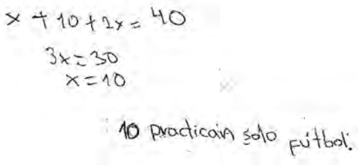
Para el ítem (b):

$$x+10+2x=40$$
$$3x=30$$
$$x=10$$

Correcto planteamiento

Observemos que la estudiante se excedió respecto al requerimiento específico de este ítem. Sin embargo, realizó un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

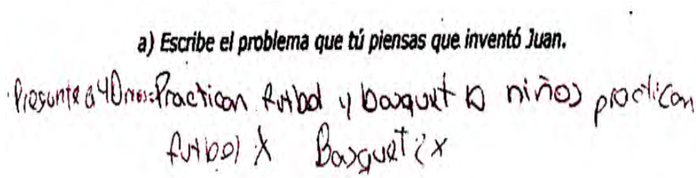
Para el ítem (c):



Solución correcta

Para el ítem (c), notemos que la estudiante resolvió correctamente el problema y respondió al requerimiento que ella misma estableció al crear su problema en el ítem (a).

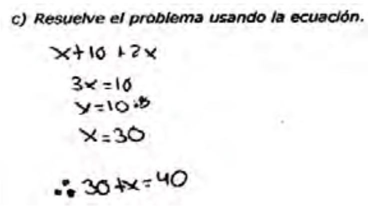
[Alumno 2]
Para el ítem (a):



Notemos que la estudiante escribió el enunciado del problema solo con los datos que se proporcionan en la representación algebraica dada. Sin embargo, no formuló algunas de las condiciones con precisión. Por ejemplo, la alumna escribió: "*futbol x; básquet 2x*". Observemos que era necesario que la alumna especifique que "x" es en realidad el número de alumnos que juegan solo futbol; mientras que "$2x$" es el número de alumnos que juegan *solo* básquet. Esto, porque los alumnos que *juegan futbol* y los alumnos que *juegan solo futbol* no necesariamente son el mismo conjunto. Esto mismo sucede con los alumnos que *juegan básquet* y los que *juegan solo básquet.*

Asimismo, la alumna no plantea requerimiento alguno, lo que deja incompleto el planteamiento de su problema.

Para el ítem (c):



Observe que la alumna no realiza un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Notemos que la estudiante, en la primera línea, no plantea una ecuación, sino una expresión algebraica "$x + 10 + 2x$", y que a continuación plantea la ecuación "$3x = 10$", sin que exista una conexión entre la primera y segunda línea que la alumna escribe. Observemos además que después de esto la estudiante realiza un procedimiento incorrecto, lo que demuestra que tiene dificultades al resolver ecuaciones lineales y también que no realizó un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Comentarios

Es típico, o por lo menos más frecuente, que nos presenten una situación problema y que a partir de ella nos pidan plantear una ecuación y la resolución de esta última para responder a algún requerimiento específico. Sin embargo, pensamos que el fin de este problema es salir de lo tradicional, y sacar a los estudiantes de su "zona de confort" para que demuestren otro tipo de razonamientos y habilidades. Observamos que la autora de la tesis ha pretendido explorar cómo realizan sus alumnos el tránsito del objeto matemático 'ecuación lineal' por distintos registros de representación semiótica, lo que constituye un reto para los estudiantes ya que es una tarea poco usual en las clases de matemáticas. Se pretende además que el alumno dé rienda suelta a su creatividad y proponga un texto para la representación dada. Esta actividad es un buen ejemplo de que alumnos de nivel escolar son capaces de crear sus propios problemas de matemáticas. Cabe mencionar que en este caso se ha empleado una de las formas de creación de problemas de matemática presentadas en una sección previa, en la que nos proporcionan una situación a partir de la cual se debe construir un problema.

Problema 2

a) ¿Es verdad que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ y &= 2x-3 \end{cases}$$

la solución es $(3;2)$? Justificar

b) Encontrar un sistema de ecuaciones que tenga como solución a $(3;2)$

c) Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza en un día 3 viajes en metropolitano y 2 viajes en tren eléctrico y se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (b).

Cabe aclarar que este problema ha sido creado en el contexto dado por los viajes de Alejandro a su trabajo, empleando cierto número de veces el Metropolitano y el tren eléctrico.

Este problema fue creado en el marco de la **tesis** "*Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas*", **elaborada por** *Rocío Figueroa Vera*, con el **propósito** de explorar en los alumnos la habilidad de crear problemas a partir de un registro algebraico (sistema de ecuaciones).

Cómo se aplicó

Se aplicó a 12 alumnos del cuarto año de educación secundaria de una Institución Educativa privada de Lima. Este problema fue trabajado en forma grupal, formándose 6 grupos de 2 integrantes cada grupo y los estudiantes tuvieron la opción de usar el software GeoGebra.

Algunas respuestas interesantes

Sobre los ítems (a) y (b):

La autora de la tesis nos comenta que sus alumnos trabajaron de forma ordenada y sin complicaciones., y que, en particular, para el caso del ítem (b) la mayoría de los grupos realizó procedimientos algebraicos y hasta mentales para llegar a un sistema de ecuaciones con la solución requerida. Sin embargo, algunos grupos se valieron del software GeoGebra para descubrir un sistema de ecuaciones, graficando dos rectas cuyo punto de intersección era el punto $(3; 2)$.

Algunas de las respuestas para el ítem (b) fueron:

$\begin{cases} x + y &= 5 \\ y &= 2x - 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y &= 5 \\ 2y + 5 &= 3x \end{cases}$

Sobre el ítem (c):

Cuatro de los seis grupos lograron pasar correctamente del registro algebraico encontrado en el ítem (b) a un enunciado verbal.

Los grupos que tenían como sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ \quad\; y &= 2x-4 \end{cases}$$

respondieron:

> *"Alejandro utiliza el tren eléctrico y el metropolitano para ir a trabajar. Se desea saber cuántos viajes realiza en cada uno, si el número total de viajes es 5 y el número de viajes en tren eléctrico es el doble del número de viajes en metropolitano, menos 4."*

Aquí uno de los grupos planteó la pregunta: ¿cuántos viajes en metropolitano y tren eléctrico realizó Alejandro?

El grupo que propuso el sistema

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$$

escribió un enunciado que no correspondía al sistema que había planteado, pero su propuesta implicaba un sistema de ecuaciones que conducía a la solución pedida.

Comentarios

De nuevo, vemos que se plantea un problema poco usual en lo referido a sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas. Lo más frecuente en los libros de texto de nivel escolar es encontrar ejercicios en los que se proporcionan sistemas de ecuaciones, o situaciones problema que involucra el planteamiento de un sistema de ecuaciones, y para los cuales se pide su solución. A diferencia de esto último, en la actividad planteada se propone un par ordenado específico que debe ser solución de algún sistema de ecuaciones; se pide a los alumnos que propongan un sistema de ecuaciones que tenga como solución el par ordenado dado, y que además formulen un problema en un contexto extra-matemático (con algunas ideas sugeridas), que tenga como solución el par ordenado dado.

Vemos que esta es otra forma original de incentivar en los alumnos la creación de problemas, a partir de una situación dada, y cómo esta forma de trabajar en matemática reta a los alumnos a desarrollar otras habilidades matemáticas.

Problema 3

1) Miguel plantea la siguiente conjetura:
   "Todo número natural tiene un número finito de divisores."
   Se te pide lo siguiente:

   a) Responde: ¿Es verdadera esta conjetura o puedes mejorarla?

   b) Justifica la conjetura dada por Miguel en el caso de que esta sea verdadera, o la conjetura mejorada.

2) Escribe dentro de los paréntesis **VERDADERO** ó **FALSO** según corresponda y **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.

   a) ¿El número 385 es múltiplo de 11? (___________)

   b) ¿El número $N = 21 \times 33$ es divisible por 7? (___________)

c) ¿El número 123 es múltiplo de 7? (__________)

c) Si sumas dos números cualesquiera divisibles por 4, ¿el resultado será SIEMPRE un número divisible por 4? (__________)

3) Completa los espacios en blanco usando alguna de las siguientes palabras: **NINGÚN**, **ALGÚN**, **TODO**, según corresponda. **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.

   a) "__________ número natural es múltiplo de sí mismo."
   b) "__________ natural es divisible por cero."
   c) "Cero es divisible por __________ número natural."
   d) "__________ divisor de 8 es divisor de 35."
   e) "El número 1 es divisible por __________ número natural."
   f) "__________ número par es también divisible por 3."
   g) "El número uno es divisor de __________ número natural."
   h) "Cero es múltiplo de __________ número natural."
   i) "__________ múltiplo de 5 es también múltiplo de 4."

Esta actividad (conjunto de problemas) fue creada en el marco de la **tesis** "*Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria*", **elaborada por** *Estela Vallejo Vargas*, con el **propósito** de verificar el progreso en la presentación de las justificaciones de alumnos de primer grado de secundaria sobre cuestiones relacionadas con la divisibilidad de números naturales.

Cómo se aplicó

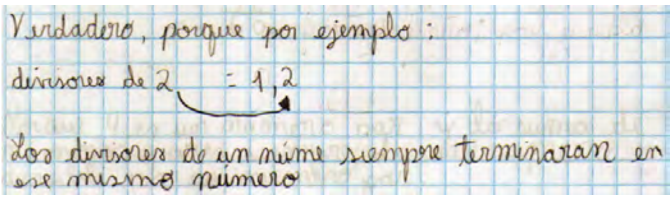
Se aplicó a 5 estudiantes del primer grado de secundaria de un colegio privado de Lima. Los estudiantes trabajaron esta actividad de manera individual.

Algunas respuestas interesantes

Para el ítem (1):

Este primer ítem fue creado con el propósito de que los alumnos, de manera individual, identifiquen que existe un caso para el cual no se cumple la conjetura dada por Miguel. En ese sentido, ellos debían precisar ("mejorar") esta conjetura, para luego justificarla. Es evidente que esta forma de trabajo en matemática no puede ser solicitada a un alumno que no ha sido previamente familiarizado en particular con la terminología empleada y, en general, con la forma de enseñanza de las matemáticas planteada por la autora de la tesis.

[Alumno 1]



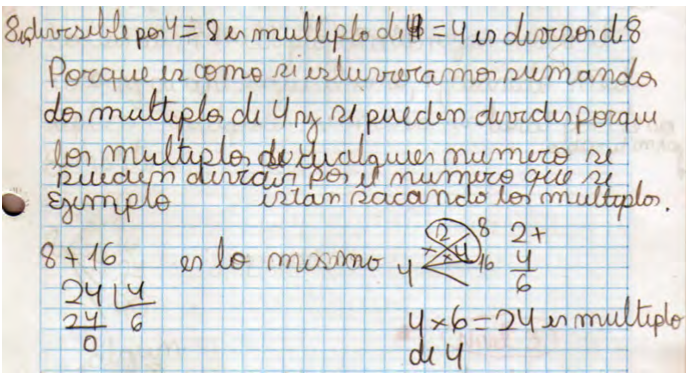
Por la respuesta que presenta ("Verdadero"), asumimos que el alumno considera que la conjetura de Miguel es verdadera. Podemos observar que la justificación que realiza con el propósito de demostrar la veracidad de esta conjetura se basa además en un ejemplo concreto, lo que según las consideraciones hechas por la autora, en su investigación, no es suficiente para que ésta sea considerada una demostración matemática. No obstante, la conclusión que el alumno hace al final de su respuesta, cuando escribe “Los divisores de un número siempre terminarán en ese mismo número”, nos hace pensar que las consideraciones hechas por el alumno son generales (“un”, haciendo referencia a un número cualquiera y “siempre", haciendo referencia a que se cumplirá en todos los casos). Esto nos hace pensar que el alumno justifica que todo número natural tiene un número finito de divisores porque considera que el conjunto de divisores siempre está acotado superiormente por el propio número.

Notemos que el estudiante no ha considerado el caso del número cero para la conjetura dada por Miguel, ya que el cero tiene infinitos divisores. En este sentido la conjetura de Miguel sí podía ser mejorada.

Para el ítem (2d):

Según la autora del problema, el propósito de este ítem es que el alumno presente una demostración matemática para este resultado, que es cierto.

[Alumno 2]



8 es divisible por $4 = 8$ es múltiplo de $4 = 4$ es divisor de 8 Porque es como si estuviéramos sumando dos múltiplos de 4 y se pueden dividir porque los múltiplos de cualquier número se pueden dividir por el número que se están sacando los múltiplos.
(Transcripción del texto presentado por el Alumno 2)

Observemos que el alumno empieza escribiendo:

"8 es divisible por $4 = 8$ es múltiplo de $4 = 4$ es divisor de 8"

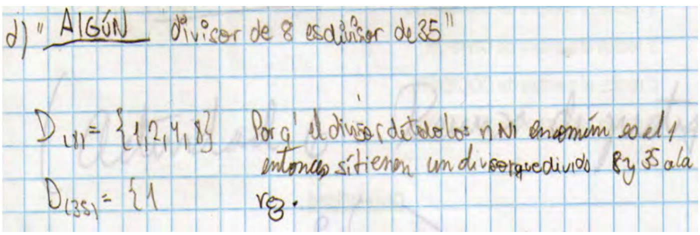
Vale la pena aclarar que el alumno toma en cuenta el trabajo realizado con la profesora (autora de la tesis), ya que emplea una de las equivalencias trabajadas con ella. Esta equivalencia establece que: "A es divisible por B equivale a decir que A es múltiplo de B, lo que equivale a su vez a decir que B es divisor de A. Donde A y B son números naturales, con B diferente de cero". De este modo notamos que el estudiante pretende justificar el resultado dado, basándose en la justificación de un resultado equivalente.

Aunque el estudiante no presenta una demostración matemática del resultado equivalente, puesto que su justificación se basa en un ejemplo, podemos observar que el alumno intenta hacer generalizaciones al decir "(...) porque los múltiplos de cualquier número se pueden dividir por el número (...)". Esto nos da indicios de que el alumno ha pensado originalmente en un caso general - el caso de los múltiplos de "N" y no de 4 en particular - y que para ayudar a hacer clara su justificación es que presenta un ejemplo concreto. Este ejemplo consiste en considerar dos múltiplos de 4 (8 y 16), los que ha obtenido al multiplicar a 4 por números naturales (2 y 4 respectivamente). El alumno parece darse cuenta de que cuando suma estos múltiplos de 4 (8 y 16), en el fondo lo que está haciendo es sumar los factores (2 y 4) con los que obtuvo los números originales, y luego multiplicar esta suma por 4, ya que 4 es un factor común. Así, como el resultado es un número que se obtiene al multiplicar 4 por un número natural(6), el resultado es también un múltiplo de 4.

Es importante destacar que esperar de los alumnos una demostración matemática para el resultado dado, parece ser un objetivo difícil de alcanzar, sobre todo tomando en cuenta que los estudiantes no estaban familiarizados con conocimientos sobre variables, lo que hubiese favorecido (desde el punto de vista de un matemático por ejemplo) la demostración del resultado. Sin embargo, pudimos explorar en las respuestas de los alumnos, y del Alumno 2 en particular, su capacidad de razonamiento analítico.

Para el ítem (3d):
Cabe mencionar que el propósito de todos los ítems del problema 3 (ítems 3a - 3i), tienen el objetivo que los estudiantes completen enunciados matemáticos incompletos para hacerlos proposiciones matemáticas verdaderas, mediante la precisión del uso de ciertos cuantificadores lógicos, y que además encuentren una manera de justificarlas.

[Alumno 3]



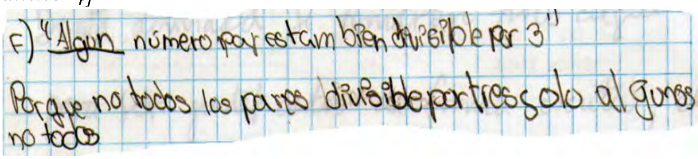
d) "ALGÚN divisor de 8 es divisor de 35"
D(8)={1,2,4,8}
D(35)={1
Porque el divisor de todos los n [queriendo decir números]
N [queriendo decir naturales] es el 1. Entonces sí tienen un divisor
que divide a 8 y 35 a la vez

(Transcripción del texto presentado por el Alumno 3)

Lo primero que observamos es, por ejemplo, que el alumno no termina de hallar los divisores del número 35. Creemos que no considera esto necesario ya que al haber encontrado el caso de un número que satisface la proposición que ha construido con el uso del cuantificador "algún", esto es suficiente para la demostración de su proposición.

Notemos además, que el alumno justifica que 1 es un divisor común para 8 y 35, ya que 1 es divisor de todos los números naturales.

Para el ítem (3f):
[Alumno 4]


F) "Algun número par es tambien divisible por 3"
Porque no todos los pares divisible por tres solo algunos no todos

f) "ALGÚN número par es también divisible por 3"
Porque no todos los pares divisibles por tres solo algunos no todos.

(Transcripción del texto presentado por el Alumno 4)

Observemos que para justificar esta proposición es suficiente mostrar el ejemplo de un número natural que satisfaga la proposición dada por el alumno (por ejemplo 6, ya que 6 es un número par y es también divisible por 3). Sin embargo, lo que sugiere el alumno con su respuesta es que existen números pares que son divisibles por 3 (cuando dice: "solo algunos"), mientras que otros tantos números pares no lo serán (cuando dice: "no todos").

Comentarios

Observamos que la habilidad de crear problemas, por la autora de la tesis, ha sido necesaria para el desarrollo de la investigación realizada, y que se complementa bien con el enfoque original que ella plantea para la enseñanza de las matemáticas del nivel escolar. Crear problemas con propósitos específicos como son el análisis de conjeturas, la precisión de enunciados matemáticos para hacerlos proposiciones verdaderas, la justificación de las proposiciones dadas y de las que se originaron con las modificaciones de los estudiantes, etc., ha obligado a la investigadora, según nos señala, a hacerse preguntas del tipo ¿cómo logro esto?, ¿qué problemas conviene plantear con este propósito?, ¿serán los alumnos capaces de responder a este requerimiento según el nivel al que pertenecen?, ¿existirá otra manera de pedir lo mismo?, etc. Esto nos muestra, además, que partir de un propósito de enseñanza para un nivel educativo específico y hacerse preguntas adecuadas, contribuyen al éxito en la tarea docente de crear problemas cuya solución contribuya al aprendizaje de las matemáticas.

En conclusión, esta forma no tradicional de enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica Regular, mediada por justificaciones, se ha servido también de la tarea necesaria e importante de la creación de problemas adecuados a este enfoque.

i) Educación Superior

Problema 1: "Porcentaje y función lineal"

Un supermercado vende el kilo de carne a S/. 17,00 y esta semana está haciendo una promoción en la venta de carne: si la compra es por más de 3 kilos, hace un descuento del 10% al importe total.

a) ¿Cuánto pagará Carlos si compra 2 kilos de carne?

b) ¿Cuánto pagará Julia si compra 5 kilos de carne?

c) Expresar la función pago según la cantidad de kilos de carne (x) que se compre.

d) Graficar la función hallada en c).

e) Determinar, en caso sea posible, la cantidad de kilos que fueron adquiridos por los clientes en cada uno de los siguientes casos:

   e1) Pagó S/. 45

   e2) Pagó S/. 60

   e3) Pagó S/. 49

Este problema fue creado en el marco de la *tesis* "*Propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de porcentajes a estudiantes de Administración y Sistemas* ", **elaborada por** *Judith Chávez Salinas*, con el **propósito** de identificar los problemas que podrían presentar alumnos universitarios con el manejo de las funciones lineales, relacionadas con porcentajes.

Cómo se aplicó

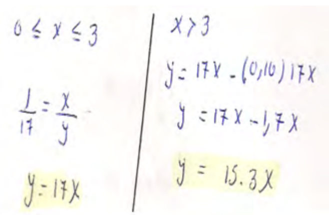
Se aplicó a 32 estudiantes del primer ciclo de la facultad de Ciencias Administrativas y Contables, carrera universitaria de Administración y Sistemas, de la Universidad Peruana Los Andes, de la ciudad de Huancayo.

El trabajo realizado se llevó a cabo en grupos de 3 o 4 estudiantes cada grupo.

Algunas respuestas interesantes

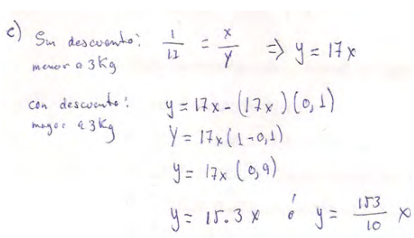
Para el ítem (c):

[Grupo 1]



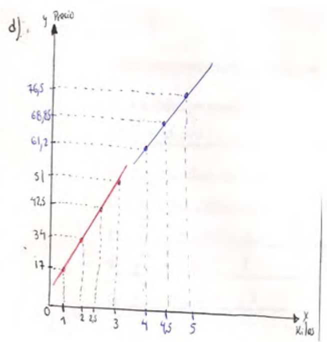
Grupo que especifica el dominio de la función y considera correctamente los dos casos

[Grupo 2]

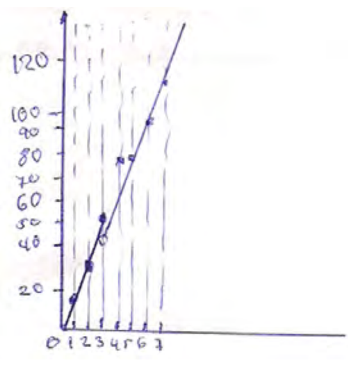


Grupo que considera correctamente los dos casos, pero no precisa el dominio de la función

Para el ítem (d):

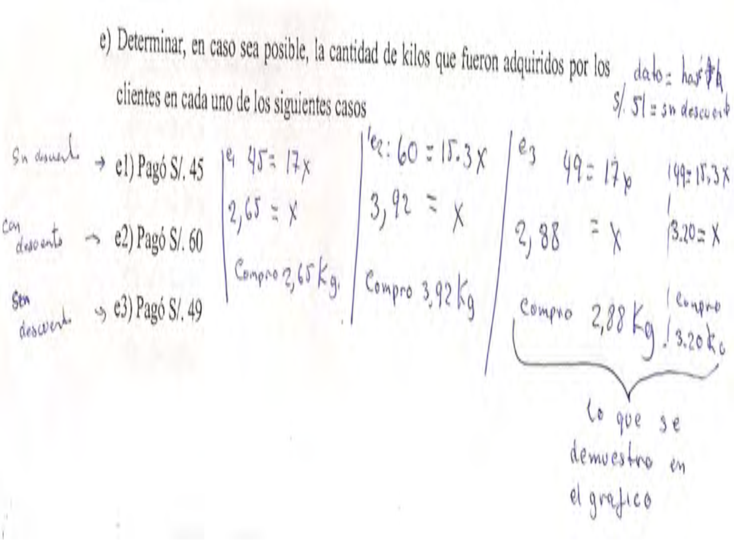


Un grupo trata de graficar ambas funciones en un solo plano, pero no tienen en cuenta los dominios de las funciones.



Este otro grupo es un poco más preciso y grafica ambas funciones teniendo en cuenta los dominios respectivos, pero las escalas utilizadas no son las más apropiadas ya que como se puede observar, el gráfico no es del todo exacto.

Para el ítem (e):



Notamos, de la respuesta anterior, que el grupo no tuvo mayor complicación para los ítems (e1) y (e2) y que el ítem (e3) ha sido trabajado considerando las dos alternativas de precio; esto último, al parecer, como consecuencia de lo que observaron en el gráfico.

Por otro lado, observamos en la siguiente respuesta cómo este otro grupo solo trabajó con una opción de precio. La autorade la tesis considera que se debe básicamente a que los integrantes del grupo no lograron esbozar el gráfico donde podían observar mejor esta situación.

e).

e1) S/. 45

$y = 17x$

$45 = 17x$

$2{,}65 = x$ $\therefore$ Compraría 2,65 Kg.

e2). S/. 60

$y = 15{,}3x$

$60 = 15{,}3x$

$3{,}92 = x$ $\therefore$ Compra 3,92 Kg

e3) S/ 49

$y = 17x$

$49 = 17x$

$2{,}88 = x$ $\therefore$ compraría 2,88 Kg.

Comentarios

Observamos que este problema cuenta con todos los elementos de un problema de matemática establecidos en una sección previa de este artículo. A diferencia de otros problemas, este problema no tiene como fin que los estudiantes creen sus propios problemas a partir de una situación dada. Es un problema creado con la iniciativa de la autora de la tesis y el propósito de esta actividad es que de manera gradual, a través de la secuencia de requerimientos que aquí se presenta, los estudiantes se enfoquen en el entorno matemático de funciones en un contexto extra-matemático.

Notamos que aunque el contexto del problema es sencillo, la secuencia de requerimientos que se origina a partir de éste permite que los estudiantes trabajen un tipo especial de funciones (funciones lineales por partes). Asimismo, reta a los estudiantes a presentar el gráfico y luego, gracias a la secuencia gradual de requerimientos, determinar los valores de la variable independiente que permiten cierto comportamiento en la variable dependiente.

Este problema presenta así una secuencia de requerimientos de dificultad gradual cuidadosamente elaborada con el fin que los estudiantes descubran aspectos importantes de las funciones lineales en contextos reales.

Cabe resaltar que la función lineal por tramos que resume la situación no es una función inyectiva y a esa particularidad se conduce al alumno en la secuencia que se presenta en el ítem e (ya que no se puede saber cuántos kilos de carne se compró si se pagó 49 soles).

Problema 2: "Construyendo un jardín"

Juan posee un terreno cuadrado y luego de recortarlo 2 m a cada lado, obtiene un jardín cuadrado cuya área no excede los 9 m^2.

Parte I: Trabajo individual

a) Emplea una variable x, e ilustra gráficamente la situación. Explica qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que has definido en (a), representa el área del terreno y el área del jardín.

   Área del terreno: ___________

   Área del jardín: ___________

c) Expresa algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del jardín no exceda los 9 m^2.

d) Encuentra dos posibles valores de la longitud de cada lado del terreno cuadrado.

e) Determina dos posibles valores que no puede tomar la variable definida en (a), según el contexto del problema.

f) Escribe la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

h) Encuentra todos los posibles valores de la longitud de cada lado del terreno cuadrado.

Parte II: Trabajo grupal
Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.
Entregar la hoja del trabajo individual con las soluciones que el grupo considera más adecuadas, para las partes f, g y h.

Parte III: Trabajo grupal
María tiene un terreno cuadrado de 6 metros por lado y quiere comprar dos franjas de terreno a sus vecinos, de modo que su terreno siga siendo cuadrado, pero de un área que no exceda los 64 m^2.

a) Emplear una variable x, e ilustrar gráficamente la situación. Explicar qué representa la variable.

b) Utilizando la variable definida en (a), representar el área del terreno ampliado.
Área del terreno ampliado: ___________

c) Expresar algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del terreno ampliado no exceda los 64 m^2.

d) Encontrar dos posibles valores de la longitud de cada lado del terreno cuadrado ampliado. ¿Cuáles son los dos correspondientes valores de la variable x?

e) Determinar dos valores que no puede tomar la variable x definida en (a), según el contexto del problema.

f) Escribir la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Graficar la función f y determinar gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

h) Encontrar todos los posibles valores del ancho de las franjas con las que se puede ampliar el terreno, según la condición dada.

Este problema fue creado en el marco de la **tesis** "*La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas*", **elaborada por** *Nixo Núñez Sánchez*, con el **propósito** de favorecer el aprendizaje de los procesos de resolución de una inecuación cuadrática correspondiente a un problema contextualizado cuando el trinomio cuadrático es factorizable en $\mathbb{R}$ y con desigualdad $\leq$.

Cómo se aplicó

Se aplicó a 26 estudiantes del primer ciclo de la escuela de Arte y Diseño Gráfico Empresarial de la Universidad Señor de Sipán del distrito de Pimentel de la provincia de Chiclayo, departamento de Lambayeque.

En la parte del trabajo grupal se formaron 8 grupos de 3 integrantes cada grupo, y se formó un único grupo de dos integrantes.

Algunas respuestas interesantes

Para el ítem (a):

Observamos a continuación el tipo de respuesta correcta que presentaron 15 de los 26 estudiantes a este ítem. En esta respuesta los estudiantes detallan la representación gráfica y explican qué representa la variable x.

e).
e1) S/. 45

$y = 17x$

$45 = 17x$

$2,65 = x$ $\therefore$ Compraría 2,65 Kg.

e2). S/. 60

$y = 15,3x$

$60 = 15,3x$

$3,92 = x$ $\therefore$ Compra 3,92 Kg

e3) S/ 49

$y = 17x$

$49 = 17x$

$2,88 = x$ $\therefore$ compraría 2,88 Kg.

Por otro lado, según nos comenta el autor de la tesis, los otros 11 estudiantes tuvieron dificultades para representar la variable x.

Ante esta situación, el profesor-investigador "devuelve el problema" a los alumnos planteando la siguiente pregunta: ¿Cuánto mide el terreno?

Esto les sirvió para representar el lado del terreno por una variable "x", lográndose determinar que la variable representaba la medida del terreno.

Para los ítems (b) y (c):
Según lo señalado por el autor de la tesis, los estudiantes resolvieron

estos ítems sin indicaciones específicas logrando representar algebraicamente el área del terreno y el área del jardín. Solo 2 de los 26 estudiantes no pudieron representar correctamente el área del jardín con la condición solicitada porque confundieron la relación de la desigualdad $\leq$ con $\geq$.

Para los ítems (d) y (e):
Como nos manifiesta el autor de la tesis, estas dos preguntas hicieron reflexionar a todos los estudiantes porque demoraron en seleccionar los valores para que "x" cumpla con las condiciones del problema. Después de realizar los cálculos correspondientes, 11 estudiantes determinaron los dos posibles valores solicitados, 12 estudiantes determinaron un solo valor y 3 alumnos cometieron errores en los cálculos.

Para los ítems (f), (g) y (h):
Los estudiantes tuvieron dificultades inicialmente para entender el ítem (f), pero posteriormente determinaron la expresión indicada. En los resultados se obtuvo que 24 alumnos identificaran la función cuadrática, solo 3 realizaron la gráfica correctamente y fue lo que les tomó más tiempo.

Por falta de tiempo, 18 alumnos no respondieron el ítem (h) y 8 lo graficaron incorrectamente, este ítem fue considerado para ser tratado de forma grupal.

Para la actividad grupal parte II:
Con los indicios de los trabajos individuales se pudo afianzar sus respuestas en los trabajos grupales donde se pudo coordinar respuestas y comunicar resultados. Los grupos graficaron correctamente la parábola con la determinación de su vértice y la intersección con el eje de abscisas, solo 2 grupos tuvieron errores al determinar el vértice. En la pregunta (h) existieron dificultades para determinar los valores de la longitud del terreno.

Para la actividad grupal parte III:
Todos los 9 grupos identificaron correctamente la función cuadrática $f(x) = (6 + x)^2 - 64$; 4 grupos realizaron la gráfica de esta función en un plano cartesiano correctamente; 4 cometieron errores al ubicar el vértice en el plano cartesiano, lo que influyó en la determinación de la intersección de la gráfica con el eje de abscisas; 1 grupo no logró responderlo.

Con respecto a la pregunta (h), se observaron mayores dificultades para identificar los valores del ancho de la franja. Ante esta situación, el profesor-investigador devuelve el problema a sus alumnos, frente a la dificultad que estos manifiestan para el desarrollo de la pregunta (h). Los estudiantes mencionaron por ejemplo: "*Profesor esta pregunta es similar a la pregunta del terreno y el jardín, en este caso, ¿cómo determino los valores de "x" que representa al ancho de las franja compradas?*"
El profesor-investigador sugirió que observaran el gráfico correspondiente a la pregunta (g) y a partir del intervalo identificado como respuesta de esta pregunta, deduzcan todos los valores de "x" que representa el ancho de las franjas.

Esta sugerencia sirvió para que determinaran algunos valores, que fueron específicamente números enteros, luego hubo discusión donde se observó bastante interacción entre los integrantes del grupo para corregir sus respuestas. Finalmente 5 grupos determinaron una cantidad limitada de valores para el ancho de la franja, no identificaron todos los valores correspondientes, 4 grupos no respondieron esta pregunta.

Comentarios

La secuencia de actividades en el problema presentado tiene una estructura especial ya que tiene un trabajo individual, y dos partes grupales. De estas dos últimas partes se considera una primera con el propósito de comunicar para luego discutir las respuestas de los estudiantes integrantes de cada grupo; en un segundo momento del trabajo grupal se tiene como fin desarrollar una nueva secuencia de requerimientos con el propósito de trabajar una situación similar a la presentada inicialmente cuya solución se facilita al haber resuelto adecuadamente la primera situación planteada.

De este modo, podemos observar que en la tesis se propone una secuencia didáctica con el claro propósito de analizar los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas como las involucradas en el problema presentado.

Referencias

Azañero Távara, M. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics.* 83 (1), 37 - 55.

Chávez Salinas, J. C. (2013). *Propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de porcentajes a estudiantes de Administración y Sistemas.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Figueroa Vera, R. E. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Malaspina, U. (2011). *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica.* Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG - Editorial Académica Española.

Malaspina, U. (2013a). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. Conferencia en *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* (pp. 117-128) MONTEVIDEO: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Recuperado de: http://www.cibem.org/home.php, http://www.cibem.org/paginas/img/resumenes.pdf

Malaspina, U. (2013b). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, No. 35, Set., pp. 135 - 143.
Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/35/archivo12.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM

Núñez Sánchez, N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Vallejo Vargas, E. A. (2012). *Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.