Conexiones entre la geometría sintética y la geometría analítica: Un estudio en el contexto de la Educación Básica en el Perú

Cecilia Gaita Iparraguirre y Francisco Ugarte Guerra
cgaita@pucp.edu.pe y fugarte@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú/IREM-PUCP

Resumen

En este artículo se presentan algunos resultados de investigaciones en donde se analiza la forma en la que se organizan actualmente algunos tópicos fundamentales de matemáticas en la Educación Básica, en particular aquellos relacionados con el álgebra, la geometría y la geometría analítica. Se darán también algunas recomendaciones para su reorganización y tratamiento.

Palabras clave: geometría analítica, geometría sintética. lugar geométrico, conexiones matemáticas.

Introducción

Desde hace varias décadas, el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se desarrollan en contextos con intencionalidad didáctica ha formado parte de la agenda de investigación de grupos de matemáticos, educadores y psicólogos. Sin embargo, es recién desde hace alrededor de treinta años, que se plantea un estudio científico de los fenómenos relacionados con un proceso de instrucción matemática. Como resultado de ello, se han propuesto varias teorías que pretenden explicar distintos aspectos de este fenómeno tan complejo que es aprender matemáticas.

Las teorías desarrolladas por distintos grupos de investigadores fijan su atención en diversos focos. Por ejemplo, algunas estudian el proceso de transformación que sufren los objetos matemáticos con una intencionalidad didáctica y en la forma en la que éstos se organizan en los currículos; otras se centran en estudiar las construcciones mentales que se llevan a cabo al aprender determinados tópicos matemáticos; mientras que algunas otras posturas teóricas buscan establecer el efecto que tiene en los aprendizajes el usar algún instrumento tecnológico.

Sin embargo, sea cual sea el foco de atención elegido, el fin último es que estas investigaciones tengan un efecto en la reorganización de los conocimientos matemáticos en los planes de estudios de los distintos niveles educativos y en la forma de abordarlos.

A continuación se describirán resultados de una investigación de Didáctica de la Matemática que plantea reorganizar la enseñanza de la geometría analítica a partir de la geometría sin coordenadas y del álgebra.

Sobre el álgebra, la geometría y la geometría analítica

Uno de los temas fundamentales en todos los currículos de matemáticas es la geometría, pero también lo es el álgebra; y, desconectado de todo lo anterior, en los últimos años de la secundaria y en los primeros años de las carreras universitarias aparece la geometría analítica.

En el DCN (2009) se señala que una de las tres componentes del área de matemáticas presente en todos los niveles de la Educación Básica es la de Geometría y Medición, además de la de Números, Relaciones y Operaciones; y Estadística.

En la Educación Primaria, los conocimientos que se espera alcancen los alumnos se describen en términos de objetivos de aprendizaje; a continuación se detallan los que corresponden a Geometría y Medición, en los tres ciclos de la educación primaria.

Tabla 1: La Geometría en la Educación Primaria en el Perú

Ciclo III de la EB	**Ciclo IV de la EB**	**Ciclo V de la EB**
• Resuelve situaciones cotidianas que requieran de la medición y comparación de atributos mensurables de objetos y eventos, y las comunica utilizando lenguaje matemático.	• Resuelve y formula problemas con perseverancia y actitud exploratoria, cuya solución requiera de las relaciones entre los elementos de polígonos regulares y sus medidas: áreas y perímetros, e interpreta sus resultados y los comunica utilizando lenguaje matemático.	• Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de la transformación de figuras geométricas en el plano, argumentando con seguridad, los procesos empleados y comunicándolos en lenguaje matemático.
• Resuelve problemas, con autonomía y seguridad, cuya solución requiera de relaciones de posición y desplazamiento de objetos en el plano.	• Interpreta y valora la transformación de figuras geométricas en distintos aspectos del arte y el diseño.	• Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de relaciones métricas y geométricas en la circunferencia, círculo, prisma recto y poliedro; argumentando con seguridad, los procesos empleados en su solución, y comunicándolos en lenguaje matemático.

En este nivel educativo, se propone tratar a las figuras geométricas, basándose en la aplicación de transformaciones en el plano, en particular de la simetría respecto de un eje y de la traslación. Se enfatiza también en que se comprendan los atributos mensurables de los objetos, así como en el empleo de unidades, sistemas y procesos de medida, y la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiadas para obtener medidas. En todos los casos, se usan relaciones métricas previamente establecidas con las que se realizan cálculos.

Notemos que sólo en sexto grado, cuyos contenidos se describen en la siguiente tabla, se señala el uso de instrumentos de dibujo para la construcción de ángulos sin embargo, esto se refiere sólo al uso del transportador, no se hace referencia a la construcción de figuras haciendo uso de regla y compás para resolver los problemas.

Tabla 2: Capacidades y conocimientos de Geometría en el sexto grado de la Educación Primaria en el Perú

Capacidades	**Conocimientos**
• Mide y construye ángulos utilizando instrumentos de dibujo geométrico.	• Ángulos.
• Interpreta la rotación a 90º y 180º de figuras, estableciendo sus coordenadas de posición.	• Rotación de 90º y 180º de figuras geométricas.
• Resuelve problemas que implican la traslación y rotación de figuras.	• Traslación y rotación de figuras geométricas.

• Interpreta y mide la superficie de polígonos.	• Área de polígonos regulares simples y compuestos.
• Resuelve problemas sobre polígonos.	• Circunferencia y círculo.
• Interpreta y compara circunferencias de diferentes radios.	• Área lateral y total de prismas rectos.
• Calcula y estima el área de un círculo por composición de figuras.	• Área lateral y total de poliedros regulares.
• Resuelve problemas que implican el cálculo de la circunferencia y del área del círculo.	• Volumen de sólidos en unidades arbitrarias de medida.
• Identifica elementos en el prisma recto y en el poliedro.	
• Resuelve problemas que implican el cálculo del área lateral y total de un prisma recto y de poliedros.	
• Mide y compara el volumen de sólidos en unidades arbitrarias de medida.	

En relación a la componente Geometría y Medición, en los dos últimos ciclos considerados en la Educación Secundaria, se plantean los siguientes objetivos

Tabla 3: La Geometría en la Educación Secundaria en Perú

Ciclo VI de la EB	Ciclo VII de la EB
Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de Geometría analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

Se puede observar que en la secundaria el tratamiento de la Geometría y Medición se centra en analizar las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros. No se observa que se trabajen técnicas de construcciones con regla y compás en este nivel. Por otro lado, se plantea comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales.

Sin embargo, pese a que las transformaciones geométricas pueden estudiarse desde el álgebra, no se plantea hacerlo de esa forma. Es más, en este mismo ciclo pero en otra componente, la de Números, relaciones y funciones, se plantea introducir el álgebra a través del estudio de expresiones algebraicas y de las operaciones que se definen entre ellas, sin ninguna conexión con los conceptos geométricos estudiados previamente.

Respecto a los conocimientos geométricos específicos involucrados, a continuación se describen los que se consideran en el último ciclo de este nivel pues es allí donde está previsto un mayor tiempo para su estudio.

Tabla 4: Conocimientos de Geometría del cuarto grado de Secundaria en Perú

Geometría plana	**Geometría analítica**
• Semejanza de triángulos y Lema de Tales. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras. Área de regiones formadas por una circunferencia inscrita o circunscrita en un polígono. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. • Geometría del espacio. Área de la superficie de la esfera. Volumen de la esfera. Área lateral y volumen de un tronco de prisma.	• Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Ecuaciones de la recta: punto-pendiente, ordenada en el origen y ecuación general. Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares. Ángulo entre dos rectas.

Se presentan primero los conocimientos asociados a la geometría plana, sin coordenadas, que requiere del empleo de relaciones entre los diferentes elementos de cada figura, luego se presentan sólidos geométricos tales como la esfera y el prisma y, finalmente, se consideran conocimientos de geometría analítica.

Las dos geometrías, la geometría sin coordenadas y la geometría analítica, se presentan de manera independiente, abordando problemas de distinta naturaleza. Por un lado, se realizan cálculos de longitudes de segmentos, áreas y distancias, utilizando los teoremas o resultados dados o demostrados previamente y por otro, se determinan ecuaciones de rectas, se calculan ángulos y distancias, empleando para ello las expresiones analíticas dadas con anterioridad.

No se observa el tratamiento de problemas en contexto de geometría plana que puedan ser resueltos de manera más eficiente con técnicas de geometría analítica.

Se puede concluir entonces que durante la Educación Básica, el énfasis está puesto en la geometría euclidiana que aborda propiedades relativas a tamaños, distancias, ángulos, áreas y volúmenes, que conducen por lo tanto a la medición de magnitudes. Mientras que, solamente en el último ciclo se trabajan algunos temas de geometría con coordenadas. Así, no se muestra ninguna conexión entre las geometrías sintética y analítica.

La organización de los temas en campos del conocimiento aislado uno de otro responde a querer estudiar a profundidad cada tópico. Sin embargo, esta división del conocimiento en campos disjuntos resulta artificial cuando se estudia la evolución de la matemática.

Consideramos que es necesario que un profesor de matemáticas pueda establecer conexiones entre distintos tópicos matemáticos. Esto puede hacerse a través del estudio de los resultados obtenidos por investigadores del campo de conocimiento Didáctica de la Matemática. También puede conseguirse a través de la revisión de textos de distintas épocas en los cuales se pueden encontrar problemas que, con una transformación adecuada, podrían emplearse en las aulas.

Sobre lo que se plantea hacer en este trabajo

Planteamos la pregunta de si es posible establecer conexiones entre el álgebra, la geometría sin coordenadas y la geometría analítica.

Para responder esa pregunta, seguiremos los siguientes pasos:

a) Describiremos de qué manera se conectan algunos tópicos de geometría con el álgebra.

b) Haremos un estudio del papel que cumplía la geometría sintética en la época previa a la Matemática Moderna con la intención de rescatar sus potencialidades para el desarrollo de un pensamiento matemático.

c) Identificaremos situaciones en contexto geométricos para las que la geometría analítica proveerá herramientas de solución más potentes, de modo que éstas puedan ser incorporadas en la Educación Básica.

Sobre las estructuras algebraicas y la geometría

El tema de reflexión propuesto se remonta a los años sesenta cuando se introdujeron modificaciones en los programas de secundaria, respondiendo al movimiento denominado Matemáticas Modernas, según refiere Thom (en Piaget, Choquet, Dieudonné y Thom, 1986, p.116). Antes de las reformas en los currículos de matemáticas propuestos por este movimiento, la geometría ocupaba un lugar importante en los planes de estudio de la primaria, secundaria y en la educación superior. Se consideraba el estudio de las construcciones exactas con regla y compás y también la presentación axiomática desarrollada por Euclides.

Luego, basándose en la consigna de que la introducción temprana a las estructuras generales traería como consecuencia una economía del pensamiento, se introdujeron nuevos temas en los programas de la Educación Básica entre los que destacaron la Teoría elemental de conjuntos, el desarrollo de nociones algebraicas y el estudio de algunas funciones elementales como la función logaritmo y exponencial, considerados conocimientos elementales previos al cálculo. Estas modificaciones se hicieron a cambio de suprimir la geometría euclidiana tradicional.

Sobre los argumentos que se dieron en su momento para eliminar la geometría euclidiana tradicional, Thom señala que los trabajos sobre los Fundamentos de Geometría de Hilbert pusieron de manifiesto que el pretendido rigor de los Elementos de Euclides no era tal, pues estaba mezclado con un empleo abundante de la intuición.

De esta manera, se justificaba el reemplazar la geometría euclidiana tradicional por el álgebra a partir de la definición del espacio cartesiano como un espacio vectorial de dimensión dos, con una forma bilineal definida positiva. A partir de ello, se podía iniciar a los alumnos en el conocimiento de las estructuras fundamentales. Sin embargo, en la actualidad en la escuela tampoco se estudian estructuras algebraicas a partir de los objetos geométricos.

Debido a la gran influencia que tuvo esta corriente, la geometría sintética quedó fuera de los planes de estudio de matemática en todos los niveles (Piaget et al, 1986), esto es, se dejaron de lado las construcciones con regla y compás. Así, la geometría que se abordaba en la escuela mostraba a la geometría euclidiana como el estudio del grupo ortogonal sobre un espacio. Actualmente, todavía se pueden encontrar indicios de esta situación ya que en todo programa de geometría en la educación primaria y secundaria están presentes las transformaciones en el plano.

Félix Klein, a través del programa de Erlangen (1872) tuvo el mérito de distinguir entre las distintas geometrías que hasta ese entonces se habían desarrollado al margen de una concepción unificadora, según

Alsina y Trillas (1992). Así, Klein planteo identificar dos elementos fundamentales:

- Un espacio E: que puede ser cualquier conjunto no vacío, por ejemplo un conjunto finito de elementos, la recta $\mathbb{R}$, el espacio $\mathbb{R}^3$.
- Un grupo $G(E)$ de transformaciones de dicho espacio que como mínimo contiene a la identidad y está contenido en el grupo de todas las posibles biyecciones de E en E.

Con el par $[E, G(E)]$ se podrían clasificar las figuras, o subconjuntos no vacíos de E, de acuerdo con las transformaciones de $G(E)$ y según el siguiente criterio:

Dos figuras F y F' de E son equivalentes, y se escribe $F \sim F'$ si, y sólo si, existe una transformación T en $G(E)$ que transforme F en F', es decir $T(F) = F'$.

Con las exigencias dadas, se puede verificar que la relación $\sim$ es de equivalencia. El ser una relación de equivalencia facilita una clasificación de las figuras del espacio: en cada clase de figuras aparecen unas figuras dadas y todas las obtenidas a partir de éstas mediante las transformaciones consideradas.

Sobre un mismo espacio pueden considerarse diferentes grupos de transformaciones, dando lugar con ello a diferentes geometrías: existen tantas geometrías como posibles subgrupos del grupo de biyecciones del espacio en sí mismo. Así, se concibe a la geometría como el estudio de las propiedades invariantes de ciertas relaciones generalizadas de equivalencia, de modo que una geometría se distingue de otra por el grupo de transformaciones características.

De esta manera, la geometría se definió haciendo uso de estructuras algebraicas y de objetos del álgebra lineal.

Para el caso particular de las geometrías de $\mathbb{R}^3$, atendiendo a la definición dada por Klein en la que una geometría está determinada por el conjunto de invariantes se han considerado las siguientes geometrías:

Tabla 5: Clasificación de las geometrías según invariantes

Geometría	**Transformaciones**	**Invariantes**
Equiforme	Semejanzas	Ángulos, paralelismo, razones dobles
Euclidiana	Isometrías	Distancias, ángulos, paralelismo, razones dobles
Afín	Afinidades	Paralelismo, razones dobles
Proyectiva	Proyectividades	Razones dobles

Según esto, en la Geometría Euclidiana las transformaciones consideradas son las isometrías o movimientos rígidos. En estas transformaciones las distancias, ángulos, ortogonalidad y paralelismo se preservan; no pasa lo mismo con la posición.

Sobre el papel de la geometría sintética

El éxito histórico de los Elementos es que la geometría euclidiana, en el sentido de geometría sintética, "constituyó el primer ejemplo de transcripción de un proceso espacial bi o tridimensional al lenguaje unidimensional de la escritura" (Piaget et al, 1986, p.124). Así, constituyó un proceso explícito de cambio de registro de representación. Se tiene entonces que la función primordial del lenguaje geométrico es la de describir los procesos espacio temporales que nos rodean; la geometría es un intermediario natural, y tal vez insustituible, entre el lenguaje habitual y el lenguaje formalizado de las matemáticas, lenguaje en el que el objeto se ha reducido al símbolo y el grupo de equivalencias a la identidad del símbolo consigo mismo. Desde este punto de vista, podríamos decir que el estadio del pensamiento geométrico es algo imposible de suprimir en el desarrollo normal de la actividad racional del hombre.

Además, existen problemas clásicos de geometría con una amplia gama de dificultades que podrían abordarse en la educación básica y superior, pero no sucede lo mismo con el álgebra, donde los problemas propuestos en el nivel básico o en los primeros cursos de universidad, son simples ejercicios donde se aplica alguna regla de cálculo conocida o donde se emplea un teorema en el que basta reemplazar un valor o donde se deben emplear argumentos de álgebra teórica, que están muy por encima de la capacidad promedio de los alumnos. La tendencia de sustituir la geometría por el álgebra es muy negativa y debe revertirse.

Vagn Lundsgaard Hansen (en Mammana, 1998) menciona que en muchos países las construcciones con regla y compás han desaparecido de los sílabos a pesar que muchas veces puede resultar una muy buena forma de aproximarse a una situación dada; incluso, en algunos casos estas construcciones eran usadas para acrecentar el interés por las matemáticas de jóvenes talentosos.

Por lo tanto la exclusión de la geometría euclidiana de los currículos de matemáticas, a favor de la inclusión del álgebra, no fue la decisión más acertada. Por esa razón, se están realizando trabajos para revalorar la geometría sintética, ya que ella “hace referencia continuamente a una intuición subyacente, lo que le otorga un mayor significado que al álgebra” (Piaget et al 1986, p.119).

Las actividades de construcciones de figuras concretas con regla y compás harán que emerjan formas abstractas así como sus propiedades.

Es necesario buscar los medios para reintegrar los valores de esta geometría al mundo de la geometría moderna. En particular, muchos problemas sobre construcciones geométricas deberían ser trasladados al lenguaje matemático moderno y deberían enfocarse desde nuevas perspectivas, de modo que puedan volver a despertar el interés. La inclusión de distintos programas de geometría dinámica, desarrollados en los últimos años, será una herramienta fundamental para ello.

Sobre las conexiones que pueden establecerse entre la geometría sintética y la analítica

De otro lado, Vagn Lunsgaard Hansen (en Mammana, 1998) señala que los métodos propios de la geometría analítica están presentes en los currículos de secundaria de muchos países; sin embargo, el tratamiento que se da a temas como las cónicas es superficial y sin aplicaciones, lo que podría ocasionar que este tema desaparezca del currículo.

Planteamos que es posible conectar estas dos preocupaciones: la recuperación de los problemas de construcciones con regla y compás, y su conexión con la geometría analítica. Esto tendría como consecuencia la reorganización de la Geometría en la secundaria, de modo que se recuperen las construcciones con regla y compás y luego se hagan las conexiones respectivas con la Geometría Analítica.

Para hacerlo, se requiere identificar problemas en contextos geométricos cuya solución sea compleja o imposible de realizar utilizando los métodos propios de la geometría sintética pero que, con los procedimientos propios de la geometría analítica, presenten un tratamiento trivial.

Del estudio del desarrollo de la geometría analítica se tiene que un hito importante lo constituye el trabajo de Descartes y Fermat en el siglo 17, vinculando geometría y álgebra, a través de la geometría analítica. El método de solución de este campo de conocimiento se caracteriza por sustituir las figuras por números o incógnitas, entre las que se deben establecer relaciones que deriven en un sistema de ecuaciones que luego deberá resolverse, (Descartes, 1954).

Una de las principales razones por las que evolucionaron las técnicas de la geometría analítica fue la búsqueda por parte de Descartes y Fermat de generalización del problema de Pappus. Este problema sobre lugares geométricos fue redactado en un contexto de geometría sintética pero, para su generalización, fueron necesarias técnicas propias de la geometría analítica. Así, el papel de los problemas de lugar geométrico fue fundamental en la emergencia de la geometría analítica.

Se propone rescatar problemas de lugares geométricos que en un primer momento tengan como solución rectas y circunferencias pero que luego, con una modificación adecuada de las variables, tengan como solución lugares geométricos más complejos. De esta manera, se justificará la emergencia de la geometría analítica y sus procedimientos.

Conclusiones

Del estudio del Diseño Curricular Nacional, se observa que en los primeros ciclos de la Educación Básica se trabaja con formas geométricas planas, especialmente polígonos y circunferencias, se identifican sus elementos y se presentan algunos atributos que se pueden obtener a partir de la medición, tales como áreas y perímetros. En el VI ciclo, además del estudio de otros objetos geométricos como rectas, sus posiciones relativas, ángulos y algunos elementos de la geometría espacial, se introduce el álgebra como un lenguaje que permite generalizar resultados de la aritmética, con sus propias reglas, las que se estudian de manera aislada y descontextualizada. En el VII ciclo, se amplía el estudio de los objetos geométricos tridimensionales, se establecen relaciones entre triángulos (de semejanza y congruencia) y se introducen las razones trigonométricas y relaciones entre ellas. Simultáneamente, se presentan elementos en un contexto de geometría analítica plana, sin que se justifique su aparición.

La presentación de estos tópicos se hace sin establecer conexiones entre ellos, pese a que en muchos casos, se emplean los mismos términos aunque con significados diferentes y a que en el desarrollo de estos conceptos sí existieron relaciones.

En particular, la noción de lugar geométrico y los problemas asociados a ella pueden ser empleados para establecer conexiones entre la geometría sin coordenadas, la geometría analítica y el álgebra.

Referencias

Alsina, C. & Trillas, E. (1992). *Lecciones de álgebra y geometría.* Sexta edición. Editorial Gustavo Gili S.A.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*; translated from french and latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. Dover Publications, Inc. New York.

Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2009). Ministerio de Educación del Perú.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas.* Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. [155 páginas; 2,6 MB] (Recuperable en, `http://www.ugr.es/local/jgodino/`)

Mammana, C. y Villani, V. (Eds.) (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the* 21^{st} *Century.* An ICMI Study. Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J., Choquet, G. Dieudonné, J. & Thom, R. (1986). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Alianza Editorial, Madrid.