APRENDER A DEMOSTRAR:
REFLEXIONES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Malva Alberto; Juan Pablo Puppo; Gabriela Roldán
Facultad Regional Santa Fe - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
Facultad Ciencias Económicas - Universidad Nacional del Litoral- Argentina
mtoso@frsf.utn.edu.ar

Niveles Secundario y Terciario
Palabras claves: habilidades; demostrar; justificar; teoremas

Resumen

En los últimos años hemos observado un creciente interés en la educación matemática por la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. En numerosos documentos consultados del Ministerio de Educación y en diversos trabajos presentados en Congresos nos encontramos con claros mensajes sobre la necesidad de la argumentación, la demostración, la justificación; allí se citan expresamente la investigación de la validez de generalizaciones, el uso y explicación del valor del contraejemplo para rebatir generalizaciones e hipótesis, la utilización e interpretación correctas de los términos tales como: "si....entonces", "y", "o", "suficiente", "necesario", "causa de", "si y sólo si...". La enumeración continúa con la elaboración de proposiciones condicionales distinguiendo hipótesis de conclusiones, diferenciación entre razonamientos inductivos y deductivos, realización de demostraciones matemáticas sencillas, etc. Este interés parece justificado por los procesos de validación que son propios del quehacer matemático y por el bajo nivel que muestran nuestros estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones. En este taller compartiremos actividades favorecedoras para internalizar habilidades para demostrar, validar, justificar, explicar, argumentar, mostrar; nos acercaremos a las demostraciones contextualizadas desde la lógica y los sistemas formales; incluiremos además ejemplos justificados desde la práctica de la educación matemática impartida en nuestras aulas tales como pruebas por implicaciones directas, por contra recíproco y por el absurdo; propondremos ejemplos sencillos para ser iniciados en la educación secundaria y complejizados en la formación superior con el objetivo de favorecer una inclusión efectiva y eficaz de la demostración en la educación matemática de los jóvenes.

1. Justificación

Es nuestra intención fundamentar la necesidad de introducir desde los primeros cursos de matemática aquellos conceptos y procedimientos que favorezcan en los estudiantes el logro de las habilidades para demostrar, mostrar, probar, argumentar, validar.

En los últimos años hemos observado un creciente interés en la educación matemática por la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Este interés parece justificado por los procesos de validación que son propios del quehacer matemático y por el bajo nivel que muestran nuestros estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones. En este taller compartiremos actividades referidas a vocablos tan emparentados como demostrar, validar, justificar, explicar, argumentar, mostrar; nos acercaremos a algunas demostraciones desde la lógica y los sistemas formales; incluiremos ejemplos que utilizamos en nuestra propia práctica docente y que comprenden pruebas por implicaciones directas, por contra recíproco y por el absurdo; propondremos ejemplos sencillos para ser iniciados en la educación secundaria y complejizados en la formación superior con el objetivo de favorecer una inclusión efectiva y eficaz de la demostración en la educación matemática de los jóvenes. Queremos compartir una propuesta sobre cómo iniciar a los estudiantes en el intento por demostrar; queremos señalar caminos y tendencias sobre cómo favorecer la internalización de la habilidad cognitiva que estamos requiriendo en los alumnos universitarios sobre los porqués, sobre la necesidad de justificar procedimientos, mostrar deducciones, argumentar hechos y precisar razonamientos matemáticos.

Tenemos en la historia de la enseñanza de la Matemática fuertes debates y escuelas que han marcado rumbos respecto del uso didáctico de la demostración desde temprana edad. Son bien conocidos por los docentes del profesorado los acalorados debates en décadas pasadas sobre la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por ejemplo, además de la enseñanza de la geometría y de la lógica, de las estructuras algebraicas y la teoría de conjuntos, por citar sólo algunos. Ya en la década del 60, autores como Burton, W., Kimball, R., Wing, W., (1969, p. 507) señalan que "los estudiantes comprenderán mejor la naturaleza de la demostración matemática si este concepto es desarrollado en forma lenta, desde temprana edad y elaborado a partir de aquello que al alumno le resulta familiar". Los mismos autores dicen que los contenidos disciplinares de la lógica matemática brindan elementos para adquirir un pensamiento crítico y eficaz, más preciso y científico y dan herramientas para argumentar situaciones diversas, evitando las ambigüedades. Los razonamientos matemáticos enfatizan algunos elementos del análisis de tipo lógico que son necesarios para comprender el lenguaje de la matemática y la estructura propia de sus demostraciones.

Más recientemente, en la década de los 90, los Contenidos Básicos Comunes para el Tercer Ciclo de la Educación General Básica y los de la Educación Polimodal, indican la necesidad de rescatar el uso y explicación del valor del contraejemplo para rebatir generalizaciones e hipótesis, la utilización e interpretación correctas de los términos relacionales tales como: "si ... entonces", "y", "o", "suficiente", "necesario", "algunos", "todos", "no correlacionado con", "causa de", "si y sólo si...". La enumeración continúa con la elaboración de proposiciones condicionales distinguiendo hipótesis de conclusiones, discriminación entre razonamientos inductivos y deductivos, realización de demostraciones matemáticas sencillas, etc.

En la educación secundaria no se ha avanzado demasiado en cómo fundamentar la verdad de ciertas afirmaciones. En muchos casos, percibimos en los alumnos de nivel medio la tendencia por argumentar sólo las proposiciones falsas mediante el uso de contra ejemplos. Mientras que si la afirmación es verdadera, se justifica porque es una definición dada o un teorema enunciado en clases (que pocas veces es demostrado). Acciones reiteradas en este sentido crean una concepción parcial y hasta errónea acerca del rol de la demostración como actividad matemática.

Con respecto al cómo hacerlo o desde qué momento hacerlo, contamos con aproximaciones a la respuesta y son las que queremos compartir.

2. Resultados desalentadores

Hemos encontrado en nuestra práctica docente en el aula graves dificultades para demostrar todo tipo de teoremas o propiedad, incluso después de haber cursado la materia. Las siguientes demostraciones fueron pedidas en los exámenes de los últimos dos años para alumnos universitarios que finalizaron el cursado del primer cuatrimestre, en distintas cátedras.

"Para a, b $\in$ N y d = mcd (a, b). Demuestra que d es único". Ninguno de los 18 alumnos que rindió el examen dio una respuesta correcta y sólo 3 de ellos obtuvieron una aproximación. Similarmente ocurrió con la siguiente: "Si p, q son números primos, demuestra que p divide a q si y sólo si p = q". En este caso, 2 alumnos fundamentaron adecuadamente; 5 alumnos obtuvieron una aproximación a lo pedido y 11 no respondieron.

"Sea A una matriz de orden nxn, demuestra que $(AA^t)^t = AA^t$ ". O similarmente "Sea A una matriz de orden nxn, demuestra que $(A+A^t)^t = A + A^t$. Sólo un 10 % de los alumnos realizó correctamente estas demostraciones. Un 50 % de los alumnos dio ejemplos numéricos como argumento para la validez y el 15 % realizó un procedimiento aplicando propiedades pero partiendo de la tesis. Un 12 % aproximadamente demuestra la propiedad para el caso particular de una matriz de 2x2 y el resto de los alumnos no respondió.

"Sean A, B y C matrices de orden nxn. Si AB = AC y A tiene inversa, entonces B = C". Muy frecuentemente encontramos justificaciones del tipo: como B = C, si se multiplica ambos lados de la igualdad por A se obtiene AB = AC; lo que nos da la pauta de la falta de identificación de la hipótesis y la tesis que tiene implícita la proposición.

Hemos encontrado que el 90% de los alumnos que rindieron un examen dijo que la implicación "Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente" es verdadera, justificándola con la validez del teorema "Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$", considerando la implicación directa y su recíproca como equivalentes. La aplicación correcta del teorema es un buen ejercicio para analizar condiciones necesarias y/o suficientes.

Numerosos son los ejemplos que justifican nuestra preocupación sobre las carencias y vacancias que encontramos en la habilidad para demostrar. El inicio temprano y el ejercicio continuado de la demostración se tornan imprescindibles.

3. Propuestas de trabajo para el Taller

Las siguientes son actividades que serán socializadas durante el taller. En algunos casos, la escogencia tiene su fundamento en los resultados logrados durante el trabajo áulico; otras actividades fueron diseñadas con intencionalidad, esperando a priori, mejores desempeños; otras están contextualizadas para reforzar la habilidad para demostrar en distintos niveles y con contenidos diversos.

Las enseñanzas de este maestro siguen muy vigentes: Santaló, L. (1997) dice que hay ciertos conocimientos de lógica que deben usarse con frecuencia para que vayan siendo asimilados como parte natural del lenguaje y del pensar cotidianos, más que como conceptos adquiridos a través de un aprendizaje especial. Veamos el caso de las proposiciones lógicamente equivalentes o de los condicionales equivalentes, los que pretendimos descubra el alumno mediante el diseño e implementación de una adecuada secuencia didáctica. Para que el alumno asuma la situación como un compromiso personal pensamos ejemplos de uso corriente o del lenguaje diario, referentes a casos concretos donde debe debatir e intercambiar ideas con sus compañeros, tutores o profesores. Se presenta la siguiente situación con el objetivo de identificar y encontrar formas equivalentes para expresar *implicaciones o condicionales*:

Por ejemplo: ¿Por qué se detiene un auto? La participación de los alumnos es muy rica y tiene una significación social compartida: Un auto se detiene por diversos motivos. Por ejemplo, porque pasa un perro, un peatón, es decir no sólo cuando el semáforo tiene la señal en rojo. Frente a estas respuestas de los alumnos, la intervención del docente se produce pidiendo al alumno una respuesta a lo siguiente: ¿Es suficiente que el semáforo esté en rojo para que los autos se detengan? En general, los alumnos justifican, por su razonamiento anterior, que el auto se puede detener porque el semáforo tenga la señal en rojo pero también puede hacerlo por otros motivos, como por ejemplo los ya mencionados. Afirman que la condición es suficiente pero no necesaria. Descubren entonces que las afirmaciones A y B no son equivalentes.

Afirmación A: *"Los autos se detienen si el semáforo tiene la señal en rojo"*

Afirmación B: *"Los autos se detienen sólo si el semáforo tiene la señal en rojo"*

Se propone inmediatamente la discusión de una nueva oración disparadora. En el lenguaje comercial se utilizan frases como por ejemplo:

"Si el consumidor paga con tarjeta de crédito entonces el precio aumenta en un 2%".

"El consumidor paga con tarjeta de crédito sólo sí el precio aumenta en un 2%".

¿Tienen los mismos valores de verdad?

En general, la participación de los alumnos en el razonamiento de estas y otras situaciones cotidianas resultó abundante y exitosa. Podríamos decir, entonces, que los ejemplos que se propusieron son variables a tener en cuenta, pues permitieron la evolución del conocimiento. Se cierra el debate final con la reflexión del docente sobre lo realizado en las actividades presentadas, e institucionalizando el contenido emergente en la secuencia. El condicional o implicación tiene numerosas formas de ser expresado. Comprender su significado cuando resulta verdadero es muy importante.

Podemos afirmar que las oraciones "Los autos se detienen si el semáforo tiene la señal en rojo" y "Los autos se detienen sólo si el semáforo tiene la señal en rojo" no poseen el mismo valor de verdad. Si llamamos p: "El semáforo tiene la señal en rojo", y q: "Los autos se detienen"; las afirmaciones se pueden traducir como $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, respectivamente. Sus valores de verdad difieren cuando p es falsa y q es verdadera. Los autos pueden detenerse cuando pasa un peatón por ejemplo. Por lo tanto que el semáforo tenga la señal en rojo es condición suficiente para que los autos se detengan pero no, necesaria. Para finalizar esta secuencia, se proponen actividades de revisión, de refuerzo y de aplicación del tema en distintos contextos y representaciones, problemas y ejercicios de autoevaluación. Ejercicios como el siguiente pueden ser trabajados en otros cursos como parte de la secuencia:

Problema Nº1: I) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifica.

1.1) $n = 2$ sólo si $n^2 + 3n - 10 = 0$

1.2) $n = 2$ si $n^2 + 3n - 10 = 0$

1.3) $n = 2$ es necesario para que $n^2 + 3n - 10 = 0$

1.4) si $n^2 + 3n - 10 = 0$ entonces $n = 2$

1.5) si $n^2 + 3n - 10 = 0$ entonces ($n = 2$ y $n = -5$)

1.6) si $n^2 + 3n - 10 = 0$ entonces ($n = 2$ o $n = -5$)

1.7) $n^2 + 3n - 10 = 0$ si y solo si ($n = 2$ o $n = -5$)

1.8) $n^2 + 3n - 10 = 0$ si y solo si ($n = 2$ y $n = -5$)

Para debatir en el taller:

II) ¿Será cierto que n (n+1) es divisible por 2 para todo n?

III) ¿Será cierto que $n^2 - 9$ es divisible por n -3 para todo n?

Obtener formas equivalentes, trabajando con los condicionales directos, recíprocos, contrarios y contra recíprocos, se pueden implementar en distintos momentos de la educación polimodal. Probar los verdaderos y refutar los falsos es una actividad para los docentes del taller:

Problema Nº2: a) Escribe los contra recíprocos para cada uno de los enunciados dados (todas las variables son números naturales):

a1) Si $a > b$ y a y b son cuadrados perfectos consecutivos entonces $a - b$ es impar.

a2) Si a^2 es par entonces a es par.

b) Indica si las proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica las respuestas

b1) Si $7 \leq 5$ entonces $7 < 5 \ \vee \ 7 = 5$.

b2) $\forall$ a, b, $\in$ **R**, $a \leq b$ entonces $a < b$.

b3) $\forall$ a, b, $\in$ **R**, $|a| = |b|$ entonces $a = b$.

b4) $\forall$ x, b, $\in$ **R**, $b \neq 0$, si "b divide a x" entonces "b divide a kx", $\forall$ k$\in$ **Z.**

c) Considera la siguiente expresión: "Todos los enteros múltiplos de 9 son múltiplos de 3". Podemos afirmar que la negación de la proposición dada es equivalente a (puede haber más de una correcta):

c1) Todos los enteros múltiplos de 9 no son múltiplos de 3.

c2) Todos los enteros múltiplos de 3 son múltiplos de 9.

c3) Algunos enteros múltiplos de 9 no son múltiplos de 3.

c4) Algunos enteros no son múltiplos de 9 ni son múltiplos de 3

c5) Todos los enteros múltiplos de 3 son múltiplos de 9.

c6) Existen enteros que son múltiplos de 3 y no son múltiplos de 9.

c7) Algunos enteros son múltiplos de 9 y no son múltiplos de 3.

c8) Existen enteros que no son múltiplos de 3 ni de 9.

El siguiente problema es una simplificación o acercamiento muy elemental a un *modelo axiomático*. Modelos similares pueden ser creados por el propio docente. Más adelante volveremos con nuevos ejemplos sobre modelos axiomáticos.

Problema Nº3: Sea A = {*, &} un alfabeto y las siguientes reglas que definen las expresiones bien formadas que serán las palabras de nuestro vocabulario:

i) * es una expresión bien formada.

ii) Si X es una expresión bien formada, &X y *X también lo son.

iii) X es una expresión bien formada sí y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

Para cada una de las siguientes expresiones, decide si son o no expresiones bien formadas y en caso de serlo mostrar las reglas aplicadas para obtenerlas:

1) * 2) ***& 3) & 4) &&&& 5) &&* 6) &&*& 7) &*&&* 8)***

Presentamos a continuación otros modelos, más o menos complejos, pero fácilmente adaptables a distintos grupos de alumnos y cursos. Como dijimos, algunos de ellos fueron usados durante nuestras clases con alumnos y son socializados en este taller; otros son propuestos a los docentes como disparadores y generadores de sus propios ejemplos. En cada uno se ponen en juego distintas habilidades básicas para demostrar, mostrar, justificar, validar, elaborar, argumentar.

A modo de revisión: Una importante aplicación de las reglas de inferencia se encuentra cuando en Matemática necesitamos demostrar teoremas. Un teorema es básicamente una implicación del tipo $H \Rightarrow T$, donde H se denomina hipótesis (conjunción de premisas) y T es la tesis (conclusión). En todo teorema $H \Rightarrow T$ se requiere que el condicional sea tautológico. No es intención de este trabajo, dar marcos de referencia teóricos sobre la formulación y justificación de los teoremas. Mostraremos varios métodos que pueden ser usados para justificar que $H \Rightarrow T$ es una tautología.

La metodología a usar en el taller será la siguiente: presentaremos el método de demostración que usaremos, haremos explícitos los axiomas; pediremos las propiedades o teoremas que los docentes irán demostrando y luego socializaremos las demostraciones. Una síntesis es (o puede ser) la siguiente:

Método directo: Cuando queremos demostrar la implicación $H \Rightarrow T$ partimos de la suposición de que H es verdadero y utilizando las reglas de inferencia, leyes de la lógica, axiomas, definiciones o teoremas, concluimos que T es verdadera. Una primera aproximación, consiste en definir un sistema axiomático simple, y luego, a partir de dichos axiomas probaremos algunos teoremas.

Ejemplo 1: Sea B un subconjunto de los números reales ($B \subseteq \Re$) donde se cumplen los siguientes axiomas:

A_1: $3 \in B$ A_2: $x \in B \Rightarrow 2x + 1 \in B$ A_3: $x, y \in B \Rightarrow x + y \in B$

Teorema 1: $7 \in B \Rightarrow 18 \in B$; es decir Hipótesis: $7 \in B$ Tesis: $18 \in B$

Demostración:

1) $7 \in B$ por hipótesis

2) $2 . 7 + 1 = 15 \in B$ de 1) y A_2

3) $15 \in B \wedge 3 \in B$ conjunción de 2) y A_1

4) $15 + 3 = 18 \in B$ de 3) y A_3. Luego $7 \in B \Rightarrow 18 \in B$, como queríamos demostrar.

Veamos ahora, cómo a partir de los tres axiomas y del Teorema 1 podemos deducir otras proposiciones:

Teorema 2: $2 \in B \Rightarrow 23 \in B$; es decir Hipótesis: $2 \in B$ Tesis: $23 \in B$

Demostración:

1) $2 \in B$	por hipótesis
2) $2 . 2 + 1 = 5 \in B$	de 1) y A_2
3) $3 \in B$	por A_1
4) $2 . 3 + 1 = 7 \in B$	de 3) y A_2
5) $18 \in B$	por 4) y Teorema 1
6) $5 \in B \wedge 18 \in B$	conjunción de 2) y 5)
7) $5 + 18 = 23 \in B$	de 6) y $A_{3.}$ Luego $2 \in B \Rightarrow 23 \in B$

Veamos otros ejemplos que constituyen un buen ejercicio para comenzar con pruebas formales:

Ejemplo 2: La aritmética es muy rica en propiedades que permiten consolidar la habilidad para demostrar. Veamos el siguiente:

Teorema 3: Si m y n son enteros positivos, tales que m es un factor de n, y n es un factor de m, entonces son iguales, es decir, m = n.

Estamos nuevamente en presencia de una propiedad de la forma $p \Rightarrow q$ donde p es: m y n son enteros positivos, tales que m es un factor de n, y n es un factor de m y q es: m = n.

Demostración: Sean m, n enteros positivos, tales que m es un factor de n y n es un factor de m. Dado que m es un factor de n, se sigue que $m \leq n$. Por ser n un factor de m, resulta $n \leq m$. De donde m = n.

Uno de los contenidos conceptuales previstos para el nivel secundario que muestra el espíritu de la demostración en matemática es el de logaritmos. No pretendemos abordar una cuestión sobre la implementación de tal o cual secuencia didáctica, sino poner énfasis en la demostración. Nuestro objetivo es analizar si ciertas afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando las verdaderas por el método directo y justificando las falsas mediante algún contraejemplo. Asumimos que el logaritmo en base b (donde b es un número positivo distinto de 1) de un número positivo a es el número c, si y sólo si b elevado al exponente c da como resultado a. En símbolos: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$ donde $a, b \in \Re^+$, $b \neq 1$, $c \in \Re$

Ejemplo 3: El logaritmo en base b de un producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos en la misma base b de cada uno de ellos: $\log_b (X \cdot Y) = \log_b X + \log_b Y$

Demostración:

Sea $\log_b X = x$; esto significa, por definición de logaritmo, que $b^x = X$.

Sea $\log_b Y = y$; esto significa, por definición de logaritmo, que $b^y = Y$.

$\log_b (X . Y) = \log_b (b^x . b^y) = \log_b b^{x+y} = x + y = \log_{bb} X + \log_{bb} Y$

Todas las igualdades correctamente justificadas permiten revisar y recordar otras definiciones y propiedades ya trabajadas. Análogamente se pueden proponer demostraciones similares por el método directo tales como:

$\log_b (X : Y) = \log_b X - \log_b Y$; $\log_b X^n = n \log_b X$

Es interesante además, mostrar formas alternativas para estas propiedades:

Demostración Alternativa 1: Sea $\log_b X = x$; esto significa que $b^x = X$.

$\text{Log}_b X^n = \log_b (b^x)^n = \log_b b^{n.x} = nx = n \log_b X$

Demostración Alternativa 2 (para $n \in N$):

$\text{Log}_b X^n = \log_b (X.X\ldots X) = \log_b X + \log_b X + \ldots + \log_b X = n \log_b X$

Ejemplo 4: Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta:

a) $\log_b b = 1$, para todo número real b.

b) $\log_b a^0 = 0$, para todo número a real positivo, y para todo número b real positivo distinto de uno.

c) $\log_b (a.b) = \log_b a + 1$, para todo número a real positivo, y para todo número b real positivo distinto de uno.

d) $\log \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{n}(\log a - \log b)$, para cualesquiera números a y b reales positivos y cualquier número natural n.

e) $\log_b (1/5) + \log_b 5 = 0$, para todo número b real positivo distinto de 1.

f) Si $\log_x y = z$, entonces $x^y = z$.

g) $\log_c (a.\ b) = \log_c (a + b)$, para cualesquiera números a, b y c reales positivos y c distinto de uno.

h) $\log_a (b.c)^n = n (\log_a b + \log_a c)$, para cualesquiera números a,b y c reales positivos y a distinto de uno.

i) $\log_3 3x = 1 + \log_3 x$, para todo número x real positivo.

Insistimos en que este tema puede ser ideal para ensayar el método directo de demostración, ya que se pueden demostrar varias propiedades conociendo solamente la definición y unas pocas propiedades. Esto nos permite mostrar como podemos amalgamar definiciones y teoremas para probar nuevos teoremas, al mismo tiempo que los alumnos van descubriendo qué es una definición, qué es un teorema y cómo se valida o refuta una afirmación.

Método por contraposición: Para probar la implicación $H \Rightarrow T$, probamos el contra recíproco $\neg T \Rightarrow \neg H$. Es decir, tomamos $\neg T$ como válida, luego debemos deducir $\neg H$. Este método consiste en suponer que la conclusión es falsa y analizar los valores de verdad de las proposiciones que componen las premisas. En el análisis debemos trabajar bajo la suposición de que las premisas son verdaderas; hasta que resultan todas verdaderas o hasta que una de ellas (premisa) resulte forzosamente falsa. Si alguna premisa es falsa, el razonamiento es válido.

Ejemplo 5: Seguiremos trabajando con el sistema axiomático planteado en el Ejemplo 1 previo y continuaremos demostrando teoremas válidos en ese sistema axiomático:

Teorema 4: $19 \notin B \Rightarrow 8 \notin B$; es decir   Hipótesis: $19 \notin B$ Tesis: $8 \notin B$

Demostración: Suponemos, por Contraposición, que la tesis no se cumple:

1) $8 \in B$

2) $8 + 8 = 16 \in B$ de 1 y A_3

3) $16 \in B \wedge 3 \in B$ conjunción de 2 y A_1

4) $16 + 3 = 19 \in B$ de 3 y A_3. Esto contradice la hipótesis. Luego $19 \notin B \Rightarrow 8 \notin B$

Teorema 5: $(2x - 4) \notin B \Rightarrow x \notin B \vee (-8) \notin B$

Suponemos que la tesis no se cumple:

1) $x \in B \wedge (-8) \in B$

2) $(2x + 1) \in B \wedge (-8) \in B$ de 1 y A_2

3) $2x + 1 + (-8) = (2x - 7) \in B$ de 2 y A_3

4) $(2x - 7) \in B \wedge 3 \in B$ de 3 y A_1

5) $2x - 7 + 3 = (2x - 4) \in B$ de 4 y A_3. Esto contradice la hipótesis.

Veamos ahora el siguiente Teorema 6:

Ejemplo 6: Si n^2 es par, entonces n es par.

La proposición es de la forma $p \Rightarrow q$ donde p es: n^2 es par, y q es: n es par. Utilizando la equivalencia anterior, probaremos el Teorema 5: "Si n no es par entonces n^2 no es par", es decir, usaremos el condicional equivalente $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Si n no es par entonces n es impar. Es decir: $n = 2m + 1$, para algún entero m y elevando al cuadrado,
$n^2 = (2m + 1)^2$, de donde $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$ y finalmente $n^2 = 2 (2m^2 + 2m) + 1$. De donde n^2 es impar, es decir no es par. Lo que completa la prueba.

Método por Reducción al Absurdo. En símbolos, para probar que $p \Rightarrow q$ probamos que $(p \wedge \neg q) \Rightarrow F_0$

Revisamos que nuestros docentes-alumnos que las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $(p \wedge \neg q) \Rightarrow F_0)$ son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 7: Si queremos demostrar, por ejemplo, que si un triángulo T es equilátero entonces es isósceles, podemos considerar: p: el triángulo T es equilátero y q: el triángulo T es isósceles

Luego, en lugar de probar que $p \Rightarrow q$, probaremos que $(p \wedge \neg q) \Rightarrow F_0$. Así, suponemos que la conclusión q es falsa, esto es, que T no es isósceles, y por lo tanto no tiene dos lados iguales. Pero por hipótesis, T es equilátero y por lo tanto tiene tres lados iguales, y entonces tiene también dos lados iguales; con lo cual hemos llegado a una contradicción: T no tiene dos lados iguales y T tiene (al menos) dos lados iguales (tiene tres). Concluimos luego que si T es equilátero entonces es isósceles.

Finalmente invitamos a probar este teorema utilizando más de un método: Sea a un número entero. a^2 es divisible por 3 si y solo si a es divisible por 3.

4. Reflexiones

Durante muchos años la enseñanza de la matemática se centró en sus aspectos deductivos. Décadas más tarde se desechó el método axiomático y las demostraciones y pruebas formales desaparecieron de los libros de texto, dando lugar exclusivamente al método heurístico, la experimentación, el descubrimiento, la analogía y la comparación con el propósito de guiar al estudiante para que pueda descubrir por sí mismo los procedimientos y los principios que debe aprender. Éstos, y otros métodos pueden convivir en verdadera armonía y todos constituyen importantes entradas al conocimiento. Polya, G. (1954, Vol 1, p. vi), citado en Burton, W (1969, p. 525) nos dice "la matemática en proceso de elaboración se parece a cualquier otro conocimiento humano en elaboración ... el resultado de la labor creadora de los matemáticos consiste en razonamientos deductivos, en demostraciones; pero las demostraciones se descubren por medio del razonamiento plausible, de las conjeturas. Si se quiere que el aprendizaje de la matemática refleje en alguna medida el carácter inventivo que ésta posee debe haber lugar en él para las conjeturas y las inferencias plausibles". Creemos que es una tarea imperiosa recuperar los distintos métodos de la demostración desde la formación inicial del profesorado y que en la educación secundaria, deben además, rescatarse aquellas propiedades y teoremas que pueden ser argumentados por los estudiantes.

5. Referencias bibliográficas

Burton, W.; Kimball, R.; Wing, R. (1969): *"Hacia un pensamiento eficaz".* Ediciones Troquel. B. Aires.

Polya, G. (1966): "*Matemática y razonamiento Plausible".* Madrid. Tecnos.

Santaló, L. A. (1997): *"Matemática para no matemáticos"*. En Parra, C; Saiz, I. (comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Capítulo I. Buenos Aires. Editorial Paidós.

En Internet:http://www.cimm.ucr.ac.cr/ (consulta en línea realizada en marzo de 2007)

Godino, J.; Recio, A. (2001) "Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática". Investigación Didáctica. Revista electrónica: Enseñanza de las Ciencias, 19, p 405-414.