UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL ESPACIO

Anido, Mercedes; Rubio Scola, Héctor E.
FCEIA - FCEE – CIUNR - Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
erubio@fceia.unr.edu.ar

Nivel terciario
Palabras Claves: Ingeniería Didáctica, vector, Comprensión flexible.

Resumen

En el contexto de un curso de un primer año de Álgebra y Geometría Analítica desarrollado en una facultad de ingeniería es importante y básico el concepto de distancia. Este se plantea a través de distintas situaciones: distancia entre dos puntos, distancia de un punto a una recta en el plano, distancia de un punto a un plano en el espacio, de distancia de un punto a una recta en el espacio y distancia entre recta alabeadas. En todos estos casos el concepto geométrico de distancia es esencial en la modelización matemática en distintas dimensiones de problemas, principalmente de optimización, para distintas aplicaciones tanto en las áreas de ingeniería como de la economía. En este trabajo nos centraremos en el concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio pensada como longitud, sin convenciones sobre signo.

El problema de obtención de la distancia de un punto a una recta en el espacio presenta aristas delicadas. Geométricamente ¿Cómo se construye? Y aunque se perciba la existencia de esa distancia geométrica en el espacio ¿Qué proceso analítico lleva a su cálculo? Precisamente el problema de didáctico investigación se centra en la construcción geométrica mental por los alumnos de la distancia geométrica y en la comprensión de la traducción analítica de esa construcción a una fórmula o proceso de obtención numérica

En este trabajo, se presentan, como producto de una Ingeniería Didáctica, distintos casos constituidos por propuestas de los alumnos a la solución del problema geométrico que plantea la obtención de la distancia de un punto a una recta en el espacio.

Introducción

En esta trabajo y como una nueva etapa de los análisis realizados en construcción del concepto de vector (Anido, Katz, Guzman, 2007) y su aplicación a la construcción de la Geometría Lineal del espacio, se presentan distintos casos constituidos por propuestas de los alumnos a la solución de un problema geométrico: la obtención de la distancia de un punto a una recta en el espacio.

En el contexto de un curso de un primer año de Álgebra y Geometría en una facultad de ingeniería es importante y básico el concepto de distancia. Este se plantea a través de distintas situaciones: distancia entre dos puntos, distancia de un punto a una recta en el plano, distancia de un punto a un plano en el espacio, de distancia de un punto a una recta en el espacio y de distancia entre recta alabeadas. En todos estos casos el concepto geométrico de distancia es esencial en la modelización matemática en distintas dimensiones de problemas, principalmente de optimización, para distintas aplicaciones tanto en las áreas de ingeniería como de la economía. En este trabajo nos centraremos en el concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio pensada como longitud, sin convenciones sobre signo.

El problema de obtención de la distancia de un punto a una recta en el espacio presenta aristas delicadas. Geométricamente ¿Cómo se construye? Y aunque se perciba la existencia de esa distancia ¿Como se materializa? Precisamente el problema de didáctico investigación se centra en la construcción geométrica mental por los

alumnos de la distancia geométrica y en la comprensión de su traducción analítica a una fórmula o proceso de obtención numérica.
Este problema tradicionalmente se ha considerado, como un tema en el que el profesor debe presentar una fórmula, como aplicación casi directa del producto vectorial, perdiéndose la enorme riqueza de situaciones adidácticas a la que el análisis geométrico del problema, por los mismos alumnos, puede llevar. Precisamente el objetivo del trabajo es el análisis de esas situaciones adidácticas que genera el problema. Situaciones adidácticas en el sentido de Brousseau, como juego de propuestas de solución imprevistas por el docente.

Metodología

Se trata de un estudio de casos realizado con la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) en un contexto de un primer curso normal (60 alumnos) de Álgebra y Geometría (primer cuatrimestre de primer año)

Análisis previos: fundamento teórico

En el marco de la Ingeniería Didáctica a la que dan lugar el aprendizaje de problemas de este tipo, interesa en la fase correspondiente a los "análisis previos", determinar en que concepción de la comprensión de problemas geométricos trabajaremos.

En una posición abierta a la integración de distintas corrientes teóricas, se considera que a esos estudios preliminares se pueden integrar algunos elementos teóricos de análisis propios de la propuesta denominada "Enseñanza para la Comprensión" como herramientas útiles para el enfoque de la actividad didáctica que genera el problema.
Esta propuesta se originó en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard y tiene como representantes principales a Howard Gardner, David Perkins y Vito Perrone. En ella, como su nombre lo indica, el papel central se encuentra en la comprensión, es decir la habilidad de pensar crítica y constructivamente para actuar con flexibilidad a partir de lo que se ha aprendido.
Es conveniente desarrollar la idea de la comprensión, pues ésta constituye el núcleo central de la propuesta desde una perspectiva pedagógica.
En la propuesta de la Enseñanza para la Comprensión se la entiende como la habilidad de pensar y actuar flexiblemente con lo que uno conoce. Es decir, que no se reduce únicamente al saber como sinónimo de conocimiento, sino que además implica la idea de poder hacer uso de él de manera variada.
Si un estudiante no puede ir más allá de un pensamiento y acción memorísticos, rutinarios, significa que hay falta de comprensión.
Para apreciar la comprensión de una persona hay que 1) solicitarle que haga algo para usar o poner en práctica la comprensión: explicar, resolver un problema, construir un argumento, armar un producto, 2) lo que los estudiantes hacen no sólo muestra su comprensión actual, sino que también es probable que logren mayores

avances al usar su comprensión como respuesta a un reto en particular y llegar a comprender mejor lo que se suponía comprendido.

En consecuencia, existe una identificación entre lo que es la comprensión y el Y lo que Perkins (2004) llama desempeño flexible. “Comprender un tópico quiere decir ni más ni menos que ser capaz de desempeñarse flexiblemente en relación con el tópico: explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria. Comprender es cuestión de ser capaz de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. La capacidad de desempeño flexible es la comprensión”.

Por otra parte desde la Escuela Francesa Brusseau, ya en 1986, define una situación didáctica como un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno o medio (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor, con el fin de permitir a los alumnos aprender, es decir construir o reconstruir, algún conocimiento y da paso a una nueva definición cuando expresa : “La concepción moderna de la enseñanza va a exigir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas por una elección sensata de “los problemas” que el propone. Estos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerlo actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por su propio movimiento. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que se produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe que el problema fue elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construir sin tener presente razones didácticas. Tal situación es llamada situación adidáctica”.Sintetiza esta idea cuando dice que una situación adidáctica es la situación matemática específica del conocimiento concreto que por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia en el alumno”.

Pensamos, siempre desde una posición propia, que en las “situaciones adidácticas”, que según Brusseau se debe provocar en alumno, se sumarian por la proposición de problemas adecuados, las capacidades de vinculación y extrapolación de conocimientos adquiridos, a otras formas de resolución en la búsqueda de la flexibilidad que interesa.

Otro tema a tener en cuenta en los análisis previos, está constituído por las competencias de los estudiantes para abordar el tema. En este caso los alumnos participantes de la experiencia son alumnos ingresantes a la universidad que ya en un segundo mes de clase han elaborado los conceptos básicos de la Geometría Lineal del plano y el espacio con un enfoque vectorial (Anido, Katz, Guzman, 2007) o sea conocen los espacios vectoriales de los segmentos orientados en un eje, en el plano y en el espacio y su correspondencia con los espacios vectoriales, que la consideración de las respectivas bases, generan en R^1, R^2, R^3. En relación a la temática propia de la Geometría Analítica, conocen las ecuaciones de la recta en el plano, la recta en el espacio y el plano en el espacio.

La concepción y el análisis a priori

Se presenta como selección del profesor el siguiente problema para ser resuelto en forma grupal con un espacio previsto a posteriori para el análisis y discusión de las distintas propuestas de solución

PROBLEMA: Dada la recta de ecuación

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 6t \\ z = 4 + 3t \qquad t \in \Re \end{cases}$$

y el punto P_1 (4, 5, 7) hallar la distancia del punto a la recta.

Los alumnos ya han deducido y aplicado además las fórmulas de distancia de un punto a una recta en el plano y distancia de un punto a un plano en el espacio.

Precisamente en este análisis a priori, sobre el impacto del problema, se prevé como obstáculos epistemológicos los conceptos de: distancia de un punto a una recta en el plano y de distancia de un punto a un plano en el espacio. En ambos casos la construcción geométrica intuitiva es fácil y la obtención de dos formulas análogas, a partir de los datos, implica; en el marco del concepto de generalización de Polya (1981), una generalización en la segunda de los procesos que llevaron a la obtención de la primera, Su obtención se basa en la proyección de un vector que une el punto dado (según el caso en el plano o espacio) con un punto cualquiera de la recta o plano, realizada sobre el vector normal a recta o plano. Estrategia que permite obtener analíticamente las fórmulas de inmediata aplicación.

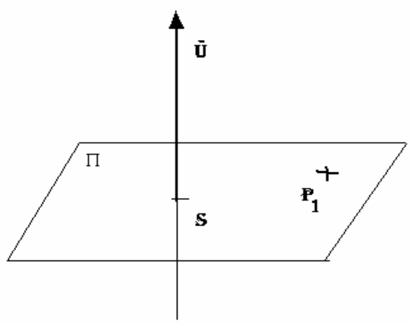
Desarollo y analisis a posteriori: las propuestas de los alumnos

Los alumnos trabajaron en grupos naturalmente constituidos. Las primeras experiencias infructuosas de intentos de aplicación de las fórmulas conocidas sobre distancia de un punta a una recta en el plano o de distancia de un punto a una recta en el espacio, mostraron que el obstáculo epistemológico previsto era acertado: querían extender un procedimiento a una situación problemática que no le proporcionaba los datos para hacerlo (no existe una ecuación de la recta en el espacio que generalice la forma de la ecuación de la recta en el plano), A pesar de esta primer dificultad no se amilanaron. Se observaron dibujos como figuras de análisis en otros grupos materializaciones de los elementos geométricos dados como datos: la recta con reglas o filo de la puerta o aristas del salón, la fijación de un punto en el espacio (punta de un dedo) y del segmento representativo de la distancia que buscaban obtener.

A esas primeras etapas de discusión intergrupos, siguió la elaboración de distintas propuestas presentadas como trabajo grupal. A continuación se transcriben con las representaciones realizadas por los alumnos.

CASO 1

Consideramos el vector dirección de la recta dada, y vamos a determinar el plano π perpendicular a la recta que contenga a P_1. Encontraremos la intersección S de la recta dada con el plano y el modulo del vector $\overline{SP_1}$ es la distancia pedida.



$\overline{u} = (2, 6, 3) \rightarrow \pi)\ 2x + 6y + 3z + d = 0$

Como queremos que contenga al punto $P_1(4, 5, 7)$ reemplazamos

2. 4 + 6. 5 + 3. 7 +d = 0 → d = -59

La ecuación del plano que contenga a (4, 5, 7) será → 2 x + 6 y + 3 z - 50 = 0

Buscamos ahora la intersección entre la recta y el plano , resolviendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 + 2t & (1) \\ y = 2 + 6t & (2) \\ z = 4 + 3t & (3) \\ 2x + 6y + 3z - 59 & (4) \end{cases}$$

Remplazando (1), (2) y (3) en (4) obtenemos: 2 (3+2t) + 6 (2+6t) + 3 (4+3t) - 50 = 0

Despejamos el parámetro “t”: $t = \dfrac{29}{49}$

Y reemplazando ahora t en (1), (2) y (3) obtenemos el punto S

$$\begin{cases} x = 3 + 2\dfrac{29}{49} = \dfrac{205}{49} \\ y = 2 + 6\dfrac{29}{49} = \dfrac{272}{49} \\ z = 4 + 3\dfrac{29}{49} = \dfrac{283}{49} \end{cases}$$

Luego $S \cap \pi = (\dfrac{205}{49}, \dfrac{272}{49}, \dfrac{283}{49})$

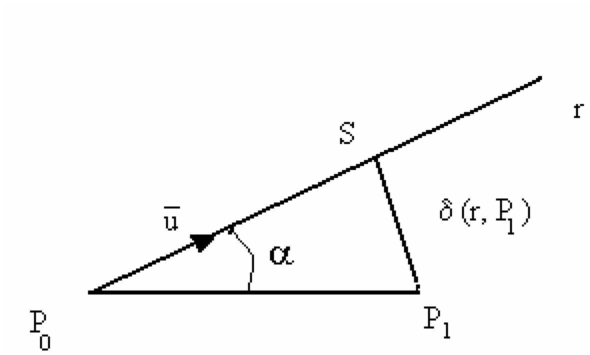
El modulo del vector con origen en el punto intersección de (al que llamamos S) y extremo en el punto P_1 nos dará la distancia buscada

$$\delta(rP_1) = \left|\overline{SP_1}\right| = \sqrt{\left(4 - \frac{205}{49}\right)^2 + \left(5 - \frac{272}{49}\right)^2 \left(7 - \frac{283}{49}\right)^2} \cong 1{,}355..$$

ANÁLISIS

Esta propuesta se ciñe a la definición y construcción teórica geométrica del concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio. Es un camino conceptualmente rico porque además ya en el terreno de la geometría analítica exige la interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación de un plano y la comprensión del significado de ecuación de un lugar geométrico, en este caso un plano, en cuanto a que la pertenencia de un punto significa la satisfacción de su ecuación.

SEGUNDA PROPUESTA



Consideramos un triángulo rectángulo formado por P_1, un punto cualquiera P_0 de la recta y el pie S de recta perpendicular por P_1.
La distancia pedida es la longitud del cateto $\overline{P_1S}$

Para obtenerlo podemos, primero, calcular con los datos dados, el módulo de $\overline{P_0P_1}$ y el módulo del vector $\operatorname{Pr}oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}$ y aplicar luego el Teorema de Pitágoras para la obtención de un cateto conocida la hipotenusa y el otro cateto.

$$\overline{P_0P_1} = (4,-3,5,-2,7,-4) = (1,3,3) \Rightarrow \left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{1^2+3^2+3^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\operatorname{Pr}oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}\right| = \frac{1}{|\bar{u}|}.\left|\overline{P_0P_1}x\bar{u}\right| = \frac{1}{\sqrt{4+36+9}}\left|(2,6,3)x(1,3,3)\right| =$$

$$\left|\operatorname{Pr}oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}\right| = \frac{1}{|7|}29 = \frac{29}{7}$$

Planteando el triangulo rectángulo P_0P_1S tendremos: $\left|\overline{P_0P_1}\right|^2 = \left|\overline{SP_1}\right|^2 + \left|\operatorname{Pr}oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}\right|^2$

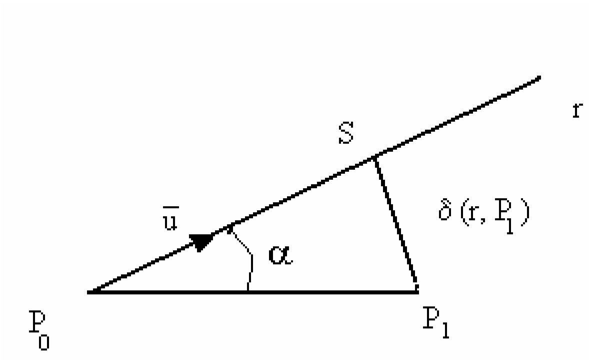
$$\left|\overline{S\ P_1}\right| = \delta(rP_1) = \sqrt{\left|\overline{P_0P_1}\right|^2 - \left|\overline{\operatorname{Pr}oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}}\right|^2}$$

$$\delta(rP_1) = \sqrt{19 - \frac{29}{7}} \cong 1.355...$$

ANÁLISIS

La propuesta segunda, exige un buen manejo de la operatoria del álgebra vectorial y una buena comprensión del concepto de proyección de un vector sobre otro y muestra una concepción totalmente vectorial de la Geometría Analítica.

CASO 3



Teniendo en cuenta la figura observamos que

$$\cos\alpha = \frac{\overline{P_0P_1} x \overline{u}}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right|}$$

$$\overline{P_0P_1} = (1,3,3) \rightarrow$$

$$\left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{1^2+3^2+3^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{2^2+6^2+3^3} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{P_0P_1} x \overline{u}\right|}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right|} = \frac{(1,3,3)x(2,6,3)}{\sqrt{19}\quad 7} = \frac{2+18+9}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{\sqrt{19}} = 0.9504$$

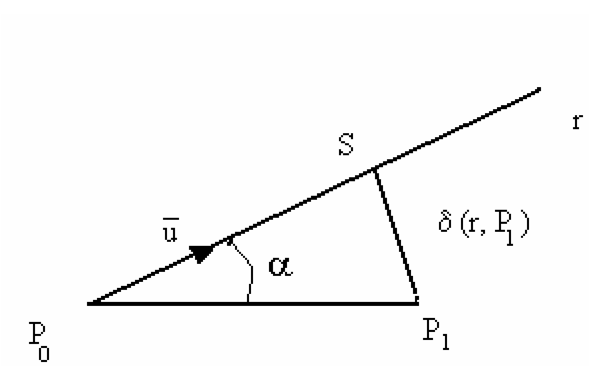
$$\left|\overline{P_0S}\right| = \left|\overline{P_0P_1}\right|\cos\alpha = \sqrt{19}\,\frac{29}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{7}$$

Aplicando Pitágoras $\left|\overline{P_1S}\right| = \sqrt{\left|\overline{P_0P_1}\right|^2 - \left|\overline{P_0S}\right|^2} = \sqrt{19 - \left(\frac{29}{7}\right)^2} \cong 1{,}355$

ANÁLISIS

Esta propuesta tercera, es análoga a la segunda pero muestra un menor grado de conocimiento de las definiciones y propiedades vectoriales: los alumnos prescinden del concepto de vector proyección. Hacen todo el desarrollo con conceptos trigonométricos que los llevan implícitamente , a la deducción del módulo de la proyección de un vector sobre otro, concepto que se supone ya poseían

CASO 4



$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{P_0P_1} x \overline{u}\right|}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right|}$$

$$\overline{P_0P_1} = (1,3,3) \rightarrow$$

$$\left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{1^2+3^2+3^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{2^2+6^2+3^3} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{P_0P_1}x\overline{u}\right|}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right|} = \frac{(1,3,3)x(2,6,3)}{\sqrt{19}\quad 7} =$$

$$\frac{2+18+9}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{\sqrt{19}} = 0.9504$$

Partiendo del coseno del ángulo α obtengo el seno y determino el valor del segmento $\left|\overline{P_1S}\right| = \delta(rP_1)$

$$sen\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{29}{7\sqrt{19}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{841}{931}} = \sqrt{\frac{90}{931}}$$

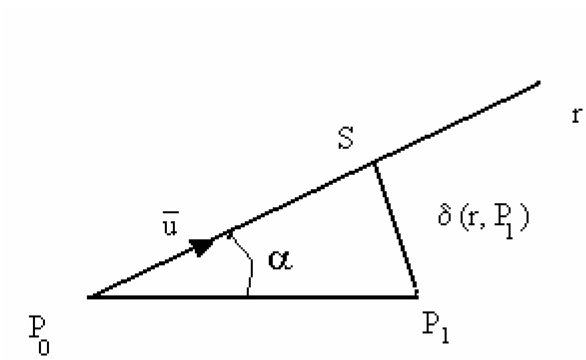
$$\left|\overline{P_0S}\right| = \delta(rP_1) = \left|\overline{P_0S}\right| sen\alpha = \sqrt{19}\sqrt{\frac{90}{931}} = \sqrt{\frac{1710}{931}} \cong 1{,}355..(*)$$

ANÁLISIS

En esta propuesta los alumnos utilizan métodos trigonométricos que podrían haber inducido una aplicación natural del módulo del producto vectorial ya conocido.

CASO 5

Este caso fue trabajado con los mismos alumnos de la propuesta 4 pero a requerimiento del docente por medio de una pregunta guía



El docente plantea al grupo que trabajó la propuesta 4 el siguiente problema.

Con los datos vectoriales del problema inicial ¿Es posible calcular el seno de alfa directamente sin conocer el coseno?

Un alumno recordó la fórmula del módulo del producto vectorial

$$\left|\overline{P_0P_1}\wedge\overline{u}\right| = \left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right| sen\alpha$$

El docente plantea al grupo que trabajó la propuesta 4 el siguiente problema. Con los datos vectoriales del problema inicial ¿Es posible calcular el seno de alfa directamente sin conocer el coseno?

Un alumno recordó a la fórmula del módulo del producto vectorial

$\left|\overline{P_0P_1}\wedge\overline{u}\right| = \left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right| sen\alpha$, y de allí reemplazan en (*): $\left|\overline{P_0S}\right| = \delta(rP_1) = \left|\overline{P_0S}\right| sen\alpha = \dfrac{\left|\overline{P_0P_1}\wedge\overline{u}\right|}{\left|\overline{u}\right|}$

de donde se obtiene la fórmula que pide el programa de la asignatura

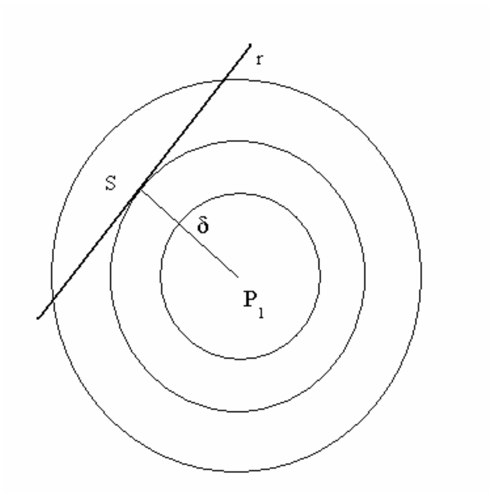
$$\boxed{\delta(rP_1) = \frac{\left|\overline{P_0P_1 x u}\right|}{\left|\overline{u}\right|}}$$

$$\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -9i + 3j + 0k = (-9,3,0)$$

$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{4+35+9} = \sqrt{49} = 7$, $\left|\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2} = \sqrt{90}$

$$\delta(rP_1) = \frac{\left|P_0P \wedge \overline{u}\right|}{\left|\overline{u}\right|} = \frac{\sqrt{90}}{7} \cong 1{,}355$$

Caso 6



Imaginamos una esfera con centro en el punto dado y tratamos de buscar condiciones para que la recta dada la toque tangencialmente y en consecuencia el radio sea la distancia del centro a la recta buscada.

Sea $(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 + = d^2$ la ecuación de esa esfera.

Para buscar la intersección con la recta dada plantemos el sistema

$$\begin{cases} x = 3 + 2t & (1) \\ y = 2 + 6t & (2) \\ z = 4 + 3t & (3) \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 + = d^2 & (4) \end{cases} \qquad P = (4,5,7)$$

Lo resolvemos por sustitución reemplazando (1), (2), (3), en (4) y obtenemos una ecuación de segundo grado en t

$$(3+2t-4)^2 + (2+6t-5)^2 + (4+3t-7)^2 + = d^2$$

$$(-1+2t)^2 + (-3+6t)^2 + (-3+3t)^2 + = d^2$$

$$49t^2 - 58t + 19 = d^2$$

Para que tenga solución única (pueden ser 0 o 1 o 2 soluciones), o sea que la recta sea tangente a la esfera, el discriminante de la ecuación de segundo grado debe ser igual a cero.

$$\Delta = b^2 + ac = 0 \Rightarrow 3364 - 4{,}49(19 - d^2) = 0 \Rightarrow 3364 - 3724 + 196d^2 = 0$$

$$-360 + 196d^2 = 0 \Rightarrow -360 + 196d^2 = 0 \Rightarrow 196d^2 = 360 \Rightarrow d^2 = \frac{360}{196}$$

Tomando el valor positivo obtenemos $d = \sqrt{\frac{90}{49}} = \frac{\sqrt{90}}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{7}$

ANÁLISIS

Esta solución sorprendente implica un pensamiento algebraico geométrico no habitual en alumnos con la formación previa dada.

En el grupo que la presentó uno de los integrantes ha sido un alumno que en otras oportunidades generó situaciones adidácticas inesperadas.

Conclusión

Respecto al marco teórico referencial de la enseñanza para la comprensión 1) El problema planteado promovió la explicación, resolución, construcción de argumentos y armado de un producto, 2) lo que los estudiantes hicieron no sólo muestra su comprensión actual, sino que llegaron a discutir sobre lo que se suponía comprendido por ejemplo la equivalencia de algunos procedimientos y las supuestas ventajas de unos sobre otros.

Lo que mas vale ser destacado como positivo de esta experiencia es precisamente el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes que legitima el espacio dedicado a trabajos de esta tipo y le otorga lo que Godino llama idoneidad emocional, además de la idoneidad cognitiva que surge de la riqueza de las situaciones adidácticas planteadas (Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007).

La metodología de trabajo que transforma el aula en un taller de conocimiento promueve, la perseverancia, responsabilidad y la autoestima que surge de la puesta en juego de sus potencialidad en la resolución de problemas - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

En cuanto a la interacción docente alumno:

Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión. La interacción entre alumnos se favorece por el diálogo y comunicación entre los estudiantes que disparan las respuestas a veces no esperadas - Se favorece la inclusión en grupos y el trabajo colaborativo.

Respecto a autonomía se han contemplado momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación de la propuesta realizada).

Referencias bibliográficas

Anido, M. ; Guzmán, M.; Katz, R. (2007) La construcción de una representación geométrica del espacio vectorial. 9no. Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy - Buenos Aires – Argentina.

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. Y Gómez, P. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericano.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de didáctica de la matemática. Publicaciones del Seminario García de Galdeano. Universidad de Zaragoza. (Traducción de "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", Recherches en Di-dactique des Mathématiques, 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble).

Brousseau, G. (1996) "La Didàctica de les Matemàtiques en la formació del profesorat". Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 11(1), 33-45.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, Volumen XXVII, Nº 2 (en prensa).

Perkins, D. (2004). Teaching for Meaning - Knowledge Alive - To create, communicate, organize, and act on knowledge -- These four skills encompass a neglected curriculum. Educational Leadership : Journal of the Department of Supervision and Curriculum Development, N.E.A.. 62(1), 14.

Polya G. (1981). Matemática y Razonamiento Plausible. Editorial Tecnos, Madrid.