



LA SEMEJANZA, UNA PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

Blasón, Rosa- Juárez, Patricia - Villamonte, Patricia - Rosa Salamone

Institución: Facultad de Ciencia y Tecnología. Universidad Autónoma de Entre Ríos- Argentina.

Dirección electrónica:

rosiblason@yahoo.com patmjuarez@hotmail.com patriciavillamonte@arnet.com.ar

Nivel Educativo: Medio

Palabras claves: semejanza, unidad didáctica, problemas

Resumen

Presentamos una unidad didáctica que aborda la semejanza y trata de introducirla a través de una metodología experimental y activa, que permita desarrollar en el alumno la intuición creadora, fomentar el espíritu crítico, actitudes positivas hacia la geometría, gusto por la belleza de las formas y por resolver problemas.

La utilización de instrumentos de medida variados, la resolución de problemas geométricos atractivos, la investigación histórica hará que este nuevo concepto geométrico pueda ser vivido para luego pasar a la formalización.

La semejanza constituye un nexo de unión con el resto de los contenidos matemáticos y es posible considerar diferentes contextos que nos permitan plantear problemas en los que la resolución requiera su uso dentro de la matemática y fuera de ella.

Las actividades serán trabajadas con una metodología de exploración, investigación, descubrimiento y construcción sobre los objetos que rodean y viven en el mundo del alumno favoreciendo el cultivo de la intuición geométrica que tanto ha hecho evolucionar esta ciencia.

Se plantearán según las fases Rico (1999): motivación y exploración inicial, desarrollo de nuevas ideas y consolidación y ajuste de ritmos.

Introducción

La geometría tuvo su origen en las actividades prácticas del hombre y en los problemas de la vida cotidiana y su transformación en teoría matemática requirió un inmenso período de tiempo. Las propiedades de los conceptos geométricos, al igual que los conceptos mismos, han sido abstraídos del mundo que nos rodea.

La descomposición en figuras simples es la base de la formulación de expresiones para el cálculo de áreas y de volúmenes. Esto nos sugiere que el reconocimiento de figuras iguales y semejantes es un recurso importante para ciertos conceptos de medidas.

Esta unidad didáctica aborda la semejanza y trata de introducirla a través de una metodología experimental y activa, que permita desarrollar la intuición creadora, fomentar el espíritu crítico, actitudes positivas hacia la geometría, gusto por la belleza de las formas y por resolver problemas.

La utilización de instrumentos de medida variados, la resolución de problemas geométricos atractivos, la investigación histórica hará que todo nuevo concepto geométrico pueda ser vivido para luego pasar a la formalización.

La semejanza constituye un nexo de unión con el resto de los contenidos matemáticos y es posible considerar diferentes contextos que nos permitan plantear problemas en los que la resolución requiera su uso dentro de la matemática y fuera de ella.



Las actividades serán trabajadas con una metodología de exploración, investigación, descubrimiento y construcción sobre los objetos que rodean y viven en el mundo del alumno favoreciendo el cultivo de la intuición geométrica que tanto ha hecho evolucionar esta ciencia.

Los momentos de discusión de las actividades propuestas permiten dar sentido y generar avances en la conceptualización de los conocimientos que los alumnos utilizan en la resolución de los problemas. El valor de los mismos reside en la potencialidad que tienen para generar confrontaciones, reflexiones y argumentaciones por parte de los alumnos que les exige buscar razones y argumentar intentando defender la verdad o falsedad de los enunciados. Permiten plantear nuevos problemas obligándolos a reflexionar sobre lo realizado, a explicarlo, a justificarlo, abriendo un espacio para que progresen en la comprensión de los conocimientos.

¿CÓMO SE PLANTEAN LAS ACTIVIDADES?

Las actividades se plantearán según las siguientes fases Rico (1999):

- Motivación y exploración inicial: *“se recuerdan algunos conceptos y se explora con ellos para valorar el conocimiento previo, estimular la motivación y adiestrarse en la manipulación de algunas ideas antes de conceptualizarlas”* (Rico, pág. 221,1999).
- Fase de desarrollo de nuevas ideas: se conceptualizan las nociones fundamentales de la unidad.
- Fase de consolidación y ajuste de ritmo: donde se planifican actividades para consolidar conocimientos más avanzados o conceptos básicos de acuerdo al ritmo de los alumnos.

Vamos a proponer tareas grupales y/o individuales. Teniendo en cuenta que deberán exponer y defender ante los otros grupos su respuesta, tendrán que elaborar una justificación del trabajo realizado y presentar por escrito las conclusiones a las que han arribado. Para que la puesta en común no sea aburrida se seleccionará, con cierta intencionalidad, algunos grupos para exponer los resultados, organizando un debate sobre ellos. Se realiza un balance final para institucionalizar los conceptos.

Conocimientos previos

Los contenidos que creemos deben haber sido trabajado en forma previa son: magnitudes de longitud, área, volumen y amplitud de ángulos. Cuantificación, comparación y transmisión de datos acerca de las magnitudes. Figuras planas y cuerpos geométricos, proporcionalidad numérica y geométrica. Teorema de Thales.

Contenidos de la unidad didáctica

Semejanza de figuras. Criterios de semejanza de triángulos. Relación entre el área y el volumen de figuras semejantes. Representaciones manejables de la realidad: planos, mapas y maquetas. Escala. Utilización de símbolos y del vocabulario geométrico para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas. Utilización diestra de instrumentos de medida y dibujo habituales. Construcción y utilización de modelos geométricos bidimensionales y tridimensionales. Búsqueda de propiedades, regularidades



y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas. Valoración de la semejanza para resolver diferentes situaciones. Interés por investigar sobre la historia de la geometría y sus problemas

Objetivos de la unidad didáctica

- Abordar las situaciones problemáticas haciendo uso de todas las técnicas a su alcance: medir, construir, dibujar, etc. para adquirir los conceptos de la semejanza en figuras planas como espaciales, obteniendo relaciones y propiedades fundamentales.

- Interrelacionar los conocimientos de semejanza con los distintos campos del saber y la vida cotidiana.

Descripción de las actividades

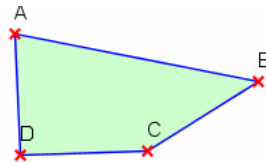
Actividad 1: *Desarrollo de nuevas ideas*

Primera Etapa

Consigna: formen grupos de un máximo de cuatro integrantes y construyan las siguientes figuras: rectángulos de 3×4 cm (Fig. A); $2,8 \times 2,1$ cm (Fig. B); 5×4 cm (Fig. C) y $6 \times 4,5$ cm (Fig. D). De la figura A, ¿hay alguna que sea ampliación o reducción? Si hay alguna figura que cumpla este requisito calculen en que porcentaje se ha ampliado o reducido la figura. Justifiquen.

Segunda Etapa

Consigna: En la anterior etapa hemos llegado a la definición: “Dos figuras son semejantes si son ampliación o reducción de otra”. Para poder identificarlas con facilidad y conocer sus relaciones, construyan un cuadrilátero semejante al dado y anoten todos los pasos que han seguido para su construcción.



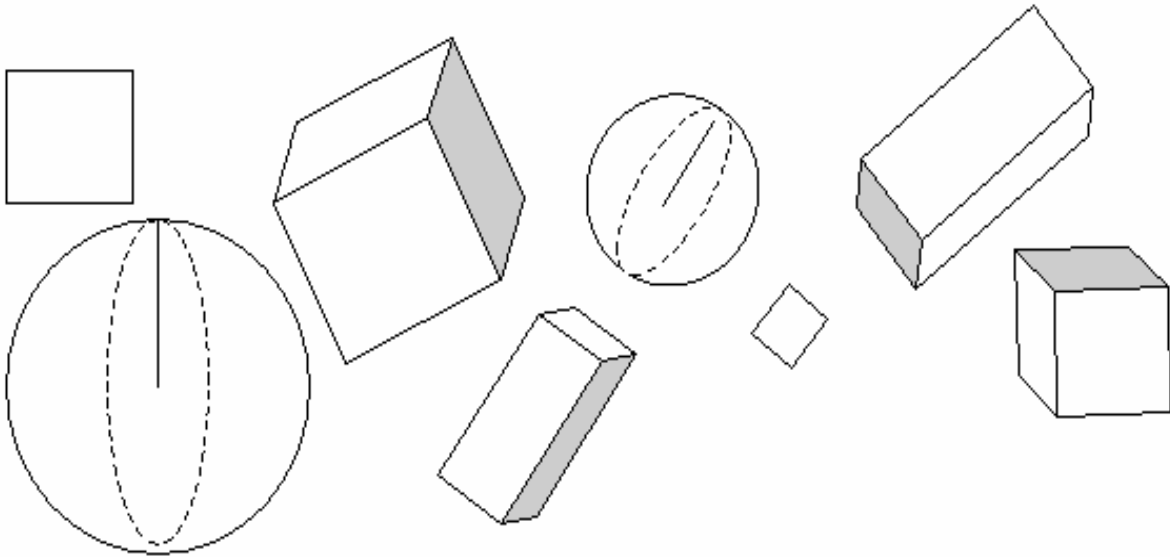
Intenciones: Discutir cuales deben ser las condiciones que debe cumplir una figura para que sea ampliación o reducción de otra en la primera fase y llegar en un segunda fase a la definición de figuras semejantes.

Comentario: La primera parte está planteada para que los alumnos descubran las relaciones entre los lados en las figuras semejantes e identifiquen figuras semejantes como aquellas “que tienen la misma forma” aunque puedan ser de distinto tamaño y que cuando decimos de la misma forma nos referimos a “exactamente de la misma forma” no de un grupo de figuras “de parecida forma” que con en el lenguaje vulgar se suele identificar a la semejanza. La segunda parte apunta a clarificar que esa igualdad de forma implica la igualdad de ángulos homólogos simultáneamente con la proporcionalidad de lados homólogos.



Actividad 2: Desarrollo de nuevas ideas

Consigna: Comparen las siguientes figuras, ¿cuáles son semejantes? En el caso que las figuras sean semejantes calculen la razón de semejanza.



Intenciones: Detectar en las figuras dadas cuáles son semejantes, encontrar la razón de semejanza y ampliar el concepto de semejanza al espacio.

Comentario: La simple observación de las figuras no es suficiente, por lo tanto deberán recurrir a algún instrumento de medida. Para identificar poliedros semejantes tendrán que tener en cuenta que las caras correspondientes sean semejantes, las longitudes de las aristas correspondientes proporcionales y se conserven los ángulos. También deben concluir que la posición espacial no modifica su semejanza.

Actividad 3: Consolidación y ajuste de ritmos

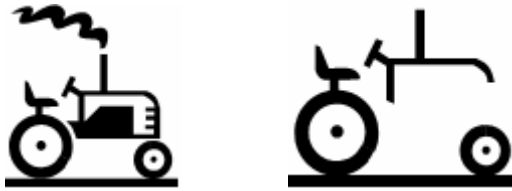
Consigna: ¿Son semejantes todos los triángulos? ¿y los cuadrados? ¿y los rectángulos? ¿todos los demás polígonos regulares? ¿y los no regulares? ¿todos los cubos son semejantes? Y los poliedros, ¿son todos semejantes?, ¿y las esferas?, ¿son todas semejantes? Justifiquen las respuestas.

Intenciones: Generalizar el concepto de semejanza a polígonos y poliedros regulares e identificar que si las figuras no son regulares la generalización no es válida.

Comentario: Tendrán que recurrir a investigar en los libros de texto o bien construir algunas figuras para poder responder a las preguntas de la actividad.



Actividad 4: Consolidación y ajuste de ritmos



Consigna: Completen las ampliaciones que se han hecho de estos dibujos a los que les faltan algunos trazos.

Intenciones: Completar dibujos semejantes a partir de uno dado.

Comentario: Deberán tomar medidas para calcular la razón de semejanza y así obtener la ampliación o reducción de la figura.

Actividad 5: Consolidación y ajuste de ritmos

Consigna: Consigan una fotografía o una postal de un edificio de Paraná. ¿Serían capaces, utilizando sólo la fotografía, de calcular las medidas reales del edificio?

Intenciones: Reconocer si es posible aplicar el concepto de semejanza en la fotografía para hallar las medidas reales de lo registrado en la foto.

Comentario: Las respuestas podrán ser múltiples. Si en la fotografía no aparece algún objeto o persona cuyas dimensiones sean conocidas, será imposible que logren responder a la actividad. En ese caso podrán ir hasta el lugar y medir un objeto que aparezca en la misma. La selección de la foto es una variable didáctica importante porque la semejanza no se conserva si la foto no ha sido tomada perpendicularmente.

Actividad 6: Desarrollo de nuevas ideas

Consigna: Se dividirá la clase en seis grupos y cada grupo realizará las siguientes actividades: Grupo 1: Construyan un triángulo que tenga un ángulo de 35° y otro ángulo de 70° , Grupo 2: Ídem al grupo 1, Grupo 3: Construyan un triángulo de lados 2, 3 y 4 cm., Grupo 4: Construyan un triángulo de lados 4, 6 y 8 cm., Grupo 5: Construyan un triángulo de lados 2,5 y 4 cm con el ángulo incluido de 50° , Grupo 6: Construyan un triángulo de lados 5 y 8 cm. con el ángulo incluido de 50° .

Luego de realizar las construcciones se intercambiarán los trabajos el grupo 1 con el 2, el 3 con el 4 y el 5 con el 6. Cada grupo comparará su triángulo con el triángulo del otro grupo y responderá a las siguientes preguntas: ¿los triángulos que han comparado son semejantes?, ¿cuál es la razón de semejanza?, ¿podrían decir cuáles son las condiciones para que dos triángulos sean semejantes? Justifiquen.

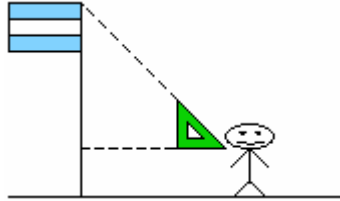
Intenciones: Lograr que los alumnos reconozcan los criterios de semejanza de triángulos.



Comentario: Los triángulos obtenidos en cada par de grupos son semejantes, esto les permitirá concluir que no es necesario el conocimiento de todos los elementos para poder construir triángulos semejantes.

Actividad 7: Consolidación y ajuste de ritmos

Consigna: Es posible medir la altura aproximada de un edificio solo con una escuadra. Observen la figura que explica cómo calcular la altura del mástil de tu colegio.



¿Qué medidas tendrían que tomar para calcular la altura del mástil? Calculen utilizando este procedimiento la altura aproximada del mástil de tu escuela o un edificio cercano.

Intenciones: Modelizar geoméricamente identificando el modelo de semejanza en una situación real.

Comentario: Deben reconocer en el problema las medidas que son necesarias tomar y la unidad de medida (convencional o no) más conveniente para el cálculo de distancias. (metros, centímetros, pasos, etc.)

Actividad 8: Desarrollo de nuevas ideas

Consigna: La duplicación del cubo. Cuentan los historiadores que a la muerte de Pericles, se produjo tal revuelo en Atenas que llevó al Oráculo de Apolo en Delos a sugerir la necesidad de duplicar el volumen del altar cúbico dedicado a Apolo. Aunque los atenienses duplicaron diligentemente todas las “dimensiones” del altar, no cumplieron con el deseo expresado. Un chico para justificar por qué no lograron construir el altar construyó un cubo de 5 cm. de arista y otro cuyas aristas medían el triple del anterior. Hagan lo mismo y respondan: ¿cuál es la razón de semejanza?, ¿cuántas veces entra el cubo chico en el grande? ¿porqué? Calculen la superficie y el volumen de cada uno de los cubos. ¿Cuál es la relación que pueden encontrar entre la superficie y los volúmenes del pequeño y del grande? ¿Se animan a explicar porqué no se pudo construir el altar con esas dimensiones?

Intenciones: Encontrar la relación existente entre la razón lineal, la de área y la del volumen. Mostrar problemas históricos irresolubles que ayuden a ver una geometría no acabada.

Comentario: Construir un modelo que les permita mediante mediciones y cálculos reconocer las relaciones entre áreas y volúmenes de figuras semejantes. Mencionar anécdotas del pasado que acerquen la geometría al alumno, observando las dificultades a las cuales se enfrentaron los antiguos griegos.

Actividad 9: Motivación y exploración

Consigna: Investiguen sobre el tema: “Número de oro” y “Rectángulo áureo”. Incluyan el momento histórico, dónde aparecen y construyan el rectángulo áureo con regla y compás.



Intenciones: Pretendemos que logren situarse en el momento histórico y vean las aplicaciones del número de oro en otras áreas.

Comentario: En el debate se orientará la discusión hacia la relación número de oro y semejanza. La construcción del rectángulo áureo fue pensada para trabajar las dificultades que tienen en seguir instrucciones en una construcción.

Actividad 10: Desarrollo de nuevas ideas.

Consigna: Para dibujar objetos muy grandes o muy pequeños tenemos que aumentar o reducir sus medidas, hacemos un dibujo en escala. Toda escala es una razón entre dos medidas, el numerador indica la longitud del dibujo y el denominador la longitud correspondiente del objeto que está representando. La escala es adimensional ya que las medidas se toman en la misma unidad.

En el mapa de la provincia de Entre Ríos está indicada la escala y la fotocopia del mapa está reducida a la mitad. Marquen en el mapa dos ciudades que estén aproximadamente a 100 Km. Respondan y justifiquen las siguientes cuestiones: en la fotocopia, ¿a cuántos cm están las ciudades que seleccionaron?, en el mapa ¿a cuántos cm. están una de la otra?, ¿cuál es la escala que corresponde a la fotocopia?, si el mapa de la provincia se ampliara de modo tal que su área fuese el doble ¿cuál sería la distancia entre las ciudades?

Intenciones: Reconocer las escalas como una aplicación de la semejanza a la topografía.

Comentario: Es importante que identifiquen e interpreten la escala que figura en el mapa y las unidades de longitud usadas para que la misma resulte adimensional.

Actividad 11: Consolidación y ajustes de ritmos¹

Consigna: ¿Realmente nuestras proporciones son armónicas? ¿Es posible evaluar la belleza física de una persona por medio de una fórmula matemática? Lo que es bello para una persona puede no serlo para otra. Pero es posible mostrar la armonía de proporciones, realizando comparaciones. Por ejemplo, si tomamos la medida de una persona (altura) y la dividimos por la medida que va desde el ombligo hasta el piso, veremos que la razón es la misma que la de la medida desde el cuello hasta la frente en relación a los ojos hasta el cuello. Lo mismo ocurre con otras partes del cuerpo.

Te proponemos que trabajes con un compañero y tomes las medidas, hallando la razón entre ellas y comparándolas.

Intenciones: Reconocer que el coeficiente de proporcionalidad que rige la belleza es el mismo para la mayoría de las personas y ver como aparece el número de oro en el concepto de armonía física que tenían los griegos.

Comentario: Los alumnos deberán tomar con precisión las medidas

Organizadores considerados en las actividades



“Los organizadores son aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas”. (Rico, L. 1999).

En la planificación de la Unidad Didáctica se tuvieron en cuenta los siguientes organizadores:

1) **La dificultad asociada a los procesos de enseñanza de la geometría y actitudes afectivas y emocionales** nos llevó a mostrar a la geometría en un contexto cercano al alumno, proponiéndonos el tratamiento de la semejanza en distintas situaciones, que le ayuden a ver una geometría no inmutable y relacionada con su realidad. Los alumnos tienden a confiar en la intuición y a generalizar, es por eso que en la actividad 2 se incluyen figuras espaciales para que analicen que es lo que se debe tener en cuenta para que se conserve la semejanza en el espacio al igual que en la actividad 8 donde presumen que la razón lineal se mantiene en áreas y volúmenes.

2) **Representaciones y Modelos:** la razón de semejanza la pueden ver de distintas formas, como una fracción, como un número decimal o como un porcentaje, cuestión que queda de manifiesto en las actividades 1 y 2.

En relación a la simbología, en la etapa de institucionalización de la actividad 1 aparece la notación simbólica que se utilizará para expresar que las figuras son semejantes y en la actividad del número de oro aparece el símbolo usado para expresar un número irracional particular. Se ha favorecido la interiorización de representaciones visuales asociadas a los conceptos de ampliación o reducción y de semejanza en las actividades 1, 2, 3 y 4. Dos casos significativos de modelización de fenómenos reales son las actividades de proporción armónica y de medición del mástil de la escuela.

3) **Materiales y recursos:** en varias actividades se utilizan recursos como la escuadra como elemento de medición, los libros de texto, internet, las fotos, los mapas y como materiales didácticos las guías con actividades.

4) Se ha usado la **información histórica** en actividades como el problema de la actividad de la duplicación del cubo, el número de oro y la construcción del rectángulo áureo.

5) **Análisis fenomenológico:** la proporción armónica, la altura del mástil, la actividad del mapa, etc. son ejemplos de este organizador que permite formar un “objeto mental rico” sobre la noción de semejanza en conexión con diversas situaciones y contextos.

Actividades integradoras

1-Dibuja un triángulo y divídelo en nueve triángulos congruentes entre sí y semejantes al triángulo original.¿Cuál es la razón de semejanza? Nombra al menos dos pares de polígonos de la figura que sean semejantes entre sí.

2- Una parcela triangular tiene lados de 500 m., 640 m, 720 m. a) Representala a escala 1: 10.000 b) Mide una altura del triángulo dibujado y calcula el área del triángulo. c)¿Cuál es el área de la parcela triangular?

3- Dibuja los conos rectos C_1 de radio:18 cm. y generatriz:30 cm. y otro semejante C_2 de generatriz: 20 cm. con la escala que prefieras. Halla la razón entre los volúmenes y si tuvieras que construirlos la cantidad de cartón necesario.



4- Construí un círculo cuya área sea el doble de la de un círculo de 2 cm. de radio. ¿Cuál es la razón de semejanza lineal?

Evaluación

La evaluación del aprendizaje debe enriquecer el aprendizaje de la matemática y solo se logra si la misma tiene carácter integral y es implementada en forma continua de manera de retroalimentar el proceso de enseñanza informando a los docentes de los cambios que deben efectuar y a los estudiantes de los progresos y dificultades en el aprendizaje.

La evaluación no puede evadirse de las interacciones sociales que ocurren en el aula y debe ayudar al profesor a evaluar los distintos procesos de aprendizaje, con herramientas más profundas que el típico si entendí de los alumnos, por ejemplo ¿la unidad didáctica que diseñó permitió que el estudiante se involucrara en un juego de producción de conocimiento?, ¿el conocimiento alcanzado por sus estudiantes es apropiado o necesita modificar o seguir generando más realizaciones?

Con respecto al alumno, la situación didáctica, debe tender a que reflexione sobre su propio aprendizaje, esta autoevaluación le permitirá tomar conciencia sobre qué, como y para qué está aprendiendo, entender sus propios procesos cognitivos y desarrollar competencias para controlar y monitorear tales procesos.

No se evalúa con un único instrumento y se tiene en cuenta la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa.

La observación del trabajo en clase se puede realizar por grupo o individualmente atendiendo a las siguientes cuestiones: usos de distintas estrategias en la resolución de problemas, reconocimiento y aplicación de conceptos, grado de interpretación y representación de las actividades, expresión oral y escrita y uso del lenguaje geométrico como medio adecuado de comunicación, interés e iniciativa en el trabajo individual o grupal, hábitos de trabajo.

Por razones de espacio sólo hemos incorporado una evaluación tentativa final.

Evaluación Final

Los criterios de la evaluación que se tendrán en cuenta son:

-Reconocer los diversos significados e interpretaciones del concepto, propiedades y criterios de la semejanza en contextos diversos.

-Llevar a cabo una construcción a partir de instrucciones o datos en forma fiable y prolija.

-Utilizar lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones, modelar situaciones y dar justificaciones.

1-El hermano de Alejandro estudia arquitectura y pasa muchas horas haciendo láminas, planos y maquetas para la materia Diseño. Tuvo que diseñar un edificio de 27 m de altura. La maqueta era una miniatura del edificio y tenía una altura de 90 cm. Las medidas de todas las líneas de la maqueta guardaban la misma proporción.



a) ¿Cuánto mide en la maqueta una ventana de 90 cm. y cuánto debería medir de ancho la puerta de entrada si en la maqueta mide 3,5 cm.?

b) ¿Qué área del edificio representa 1 cm^2 de la maqueta y cuál es la medida de la superficie de los departamentos en la maqueta si en la realidad miden 90 m^2 ?

c) ¿Qué volumen del edificio representa 1 cm^3 de la maqueta?

2- ¿Qué condiciones deben cumplirse para que resulten semejantes: ¿dos esferas? ¿dos cilindros? ¿dos pirámides de base cuadrada?

3- Construye un triángulo con dos ángulos de 80° y 35° respectivamente. Determina los puntos medios de dos lados y únelos ¿son semejantes el triángulo original y el que has obtenido? Justifica

4- Construye un triángulo rms , rectángulo en m cuyos catetos mr y ms midan 5 y 6 cm. respectivamente. Sobre ms a 2 cm. de m marca el punto c , por c traza un segmento perpendicular a rs , determinando el punto de intersección d sobre rs . ¿Los triángulos mrs y cds son semejantes? Justifique.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M. S. y Nelson, H. (2000). *Modelagem matemática no ensino*. Brasil: Contexto.

Alsina Catalá, C, Carmé Burgués Flamarich y Joseph Fortuny Aymemí (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Fiol, M. , Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Giménez Rodríguez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis

Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis.

Jaime Pastor, A. y Gutiérrez Rodríguez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Rico, L., Castro, E., Castro, E. E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L. Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Romera Carrión, C. (1997). *Bases para el diseño de unidades didácticas de matemáticas para la E.S.O.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia