



## PREDICCIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. UN ANÁLISIS CLÍNICO TRANSVERSAL

Alejandro López, Landy Sosa, Eddie Aparicio  
j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com,  
smoguel@uady.mx, alanda@uady.mx  
Universidad Autónoma de Yucatán

### Resumen

El presente artículo problematiza los procesos de construcción de conocimiento escolar, comparándolos con los procesos desarrollados científicamente. Considerando la noción de predicción como objeto de análisis, se da cuenta del tipo de acciones que no se precisan escolarmente y favorecen el desarrollo de recursos y herramientas de construcción de conocimiento matemático; particularmente el asociado al Cálculo.

### Abstract

In this article we discusses the processes of construction of school knowledge, in comparison with scientifically developed processes. Whereas the notion of prediction and analysis to realize the kinds of actions that do not required schools and enabling the development of resources and skills for the construction of mathematical knowledge, particularly that associated with the Calculus.

### Problema de investigación

Este trabajo nace de la inquietud de suponer que predecir matemáticamente en la escuela presupone características epistemológicamente distintas a las del campo científico. Por ejemplo, en el libro Cálculo 1 (Quijano y Navarrete, 2000, p. 92), se presenta la situación siguiente:

*Una infección viral se propaga en cierta población de manera tal que  $V(t) = 130 + 10t^2$  personas contraen el virus en  $t$  semanas. ¿A qué velocidad se propaga el contagio al final de 4 semanas?*

Una solución a la situación descrita sería como sigue: *La velocidad de propagación está dada por la función derivada de la función planteada, es decir,  $V'(t) = 20t$ . Así, basta sustituir  $t=4$  en esta fórmula para obtener la respuesta a la interrogante planteada.*

Es claro que la predicción matemática es la actividad escolar subyacente a la situación anterior, no obstante el significado de la actividad es reemplazado por técnicas y recursos escolares que serán evaluados, a saber, la mnemotecnica (recordar a la derivada de una función como la velocidad instantánea); lo algorítmico (aplicar la técnica algebraica para derivar una función polinomial); la sustitución (reemplazar una variable por un valor numérico).

Desde la perspectiva anterior, predecir en la escuela es equivalente a ejecutar técnicas y recursos específicos como el sustituir un valor en un modelo o fórmula, que deviene de transformar bajo una técnica establecida de otro modelo o fórmula dada; no se hace necesario que el estudiante emplee o desarrolle recursos, habilidades, ni estrategias de identificación de variables, tipos de comportamientos o el establecer relaciones. Dicho así, la predicción en contexto escolar no es desarrollada en un sentido amplio.

En esta investigación se deja ver cómo al analizar formas en que jóvenes escolares de distintas edades llevan a cabo procesos resolutivos de situaciones de variación y cambio, se tienen datos y evidencia de las nociones matemáticas que movilizan, pudiendo identificar algunos recursos y herramientas asociadas a un contexto específico de predicción matemática. Particularmente, se da cuenta de cómo el análisis de la noción de predicción matemática favorece la posibilidad de identificar procesos y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático en el contexto escolar, por ejemplo, el Cálculo.

Según Cantoral y Farfán (2008) la predicción, en especial de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza (el movimiento, el calor, flujos eléctricos,...), era la práctica social que normaba el quehacer de científicos del siglo XVIII, posibilitando el anticipar estados ulteriores de este tipo de fenómenos (consúltese los trabajos de Fourier, Newton, Fermat y Laplace). Se reconoce que en esta práctica científica subyacen características de identificación y establecimiento de relaciones entre variables, análisis de variaciones o comportamientos globales y puntuales para reconocer la ley que gobierna el comportamiento del sistema de un fenómeno y así, generar estrategias y formular modelos matemáticos *ad hoc*. En este contexto, predecir no se reduce a reproducir modelos o algoritmos, ni sustituir valores en un modelo dado.

De modo que, la predicción adquiere en el contexto escolar, un estatus o caracterización distinta al de su epistemología. En consecuencia, se obstaculiza en los estudiantes la construcción de conocimiento matemático genuino y el desarrollo de formas de pensamiento y visión científica, en específico, en relación al Cálculo, no habiendo en consecuencia, una clara articulación entre prácticas escolares y prácticas científicas.

Bajo el supuesto que la noción de predicción matemática podría tener un proceso de desarrollo en la escuela, interesó indagar su estatus en estudiantes de distintos niveles educativos al enfrentarlos a procesos de solución de situaciones en contextos inherentes a su génesis: la necesidad de cuantificar y explicar el cambio en situaciones variacionales. La atención se focalizó en identificar qué tipo de conocimientos y recursos matemáticos son empleados por ellos en situaciones de esta índole.

## Marco teórico

La *socioepistemología* es una teoría en Matemática Educativa que permite entender y explicar cómo se construye conocimiento matemático en torno a una noción matemática y una práctica social ligada a tal o cual noción. En este caso, la noción de predicción matemática. La socioepistemología considera los procesos de sistematización de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004).

Un análisis epistemológico de la práctica de predicción hace ver que el ser humano siempre ha tenido ante su incapacidad de controlar el tiempo, una necesidad de anticipar lo que habrá de suceder en su entorno. Por ejemplo, los astrónomos babilonios registraban en tablillas de arcilla datos sobre el movimiento de los astros y planetas para predecir su posición. El registro de esta información en tablas devino en su análisis para identificar ciertos patrones de regularidad que desentrañó mecanismos para predecir el movimiento. Del mismo modo, desde la antigüedad y hasta la fecha, el uso de gráficas que modelan diversos fenómenos de variación se ha destacado como herramienta predictiva en la práctica de comunidades científicas (consúltese a Tuyub, 2008), generándose a través de éstas, información del comportamiento variacional local y global de los mismos.

Socioculturalmente, la predicción emerge como una actividad humana que detonó la generación de instrumentos (díganse conocimientos y procesos matemáticos) para atender necesidades en la ciencia y cotidianidad de las sociedades, dando lugar al desarrollo de formas de pensamiento propias de una época determinada (Sosa y Aparicio, 2009).

A pesar de ello, en la matemática escolar y en el intento por facilitar el proceso de aprendizaje en los estudiantes, se han transpuesto los conocimientos al punto de separarlos de su epistemología de construcción. Particularmente, conceptos del Cálculo y el Análisis se abordan mediante actividades en las que el estudiante debe precisar de recursos mnemotécnicos, aplicación de fórmulas o reproducción de conocimientos por encima de la construcción de conocimiento, desarrollo de recursos y estrategias matemáticas para predecir (López, 2010).

### Método

La incorporación en forma sistémica de aspectos epistemológicos y cognitivos bajo la metodología de la ingeniería didáctica, permitió diseñar un instrumento experimental, compuesto por una secuencia de actividades predictivas, implementado en una población de nueve estudiantes de nivel educativo básico, medio y superior (tres por cada nivel), cuyas edades oscilan entre los 13 y 19 años, haciendo un registro en video del proceso y las soluciones de cada estudiante.

### Resultados

La información recabada en la experimentación de las actividades, da muestra de la existencia de formas específicas de predicción matemática en jóvenes de diferentes edades ante un mismo conjunto de situaciones variacionales presentadas en escenarios numérico y gráfico, percibiéndose que es plausible hacer evolucionar dicha noción en el contexto escolar.

En las actividades donde se proporcionaba a los estudiantes información mediante tablas y gráficas del movimiento de una partícula acercándose o alejándose de un objeto fijo durante un lapso de tiempo, ellos emplearon recursos matemáticos y no matemáticos para producir formas de predicción como las siguientes:

1.  $E_i \xrightarrow{T} E_f$  . En esta forma de predicción se conoce información sobre el estado inicial de una situación y a partir de una serie de transformaciones se

obtiene información de un estado ulterior de la misma;

2.  $E_f \leftrightarrow E_i \rightarrow T/M$  . Esta forma implica que a través de comparaciones o diferencias entre los datos de distintos estados de la situación, se obtengan características o datos de su comportamiento global.

Asociar las gráficas del movimiento de tres partículas que se alejan de un objeto fijo con información numérica (organizada en tablas), correspondiente a la posición de cada partícula en intervalos iguales de tiempo, proporcionó evidencia del empleo de recursos y desarrollo de estrategias por parte de los estudiantes para predecir matemáticamente. Algunos se exponen en los siguientes episodios de la experimentación.

*B1: ...la línea gruesa es la uno (señala la primera tabla dada y la gráfica de línea gruesa), porque es recta y la uno coincide, porque siempre va aumentando su **velocidad** conforme **múltiplos de tres**, ejemplo: tres, seis, nueve, doce, quince (barre la tabla indicando con su dedo), son números que son **constantes** (refiriéndose a la variación) o con la **tabla del tres**; la línea punteada es la dos (señala la segunda tabla y al tiempo que recorre la tabla hacia abajo, lo hace con la gráfica de izquierda a derecha), porque primero **va más lento** que las demás, pero después de un tiempo parece que las supera; y puse que la delgada es la tres, pues hay un punto donde logra superar a todas, como acá (señala un valor en la segunda tabla: partícula 2) que logra superar a todas en un punto, pero después la supera la dos...*

En la anterior argumentación dada por un estudiante de nivel básico (B) en su solución a la situación planteada, también presente en otros estudiantes, se hallan frases o palabras que hacen referencia a conceptos como la velocidad, rapidez o variación con la que se desplazaban las partículas, pese a que en las tablas y gráficas se presenta información explícita solamente de la relación posición-tiempo de dichas partículas. Asimismo, se percibieron en su explicación las siguientes características de su actividad predictiva:

- i. Identificar lo que está variando (*umenta su velocidad: relación entre las variables distancia y tiempo*);
- ii. Analizar la variación (*umenta conforme múltiplos de tres... son constantes... o con la tabla del tres*);

- iii. Reconocer la ley que describe el comportamiento del sistema (*primero va más lento que las demás, pero después de un tiempo parece que las supera*).

En la predicción realizada por jóvenes de educación superior (S) sobre un estado ulterior de la posición de las partículas, se observaron las siguientes:

- iv. Estudio de elementos puntuales para el reconocimiento de lo global;  
v. Desarrollo de estrategias para predecir un estado posterior a través de la comparación de estados y sus transformaciones.  
vi. Éstas pueden identificarse en el diálogo donde un estudiante de educación superior intenta convencer a otro sobre el por qué de su respuesta:

S1: *Me fijé que al principio la primera tabla es **constante**, la segunda fijate, ¿cuánto avanzó al principio? (señalando la tabla de la partícula 2) Es la que **avanzó menos**, entonces significa que es la gráfica punteada; y la tercera pues **avanzó más** que la segunda... al final... gana la segunda (indicando el extremo derecho de la gráfica punteada)...*

S1: *...aquí es quince (localiza con su bolígrafo el punto que S2 ha señalado sobre la gráfica y lo ubica sobre la parte media del eje "tiempo"), pues están casi igualitas las tres (sobrepone su bolígrafo en forma vertical a las tres gráficas para señalar la altura de las imágenes en un mismo instante de tiempo)...*

S1: *Allá está veinticinco (marca el extremo derecho del eje "tiempo"). Basándote en lo anterior ¿qué gráfica está por encima de las demás?*

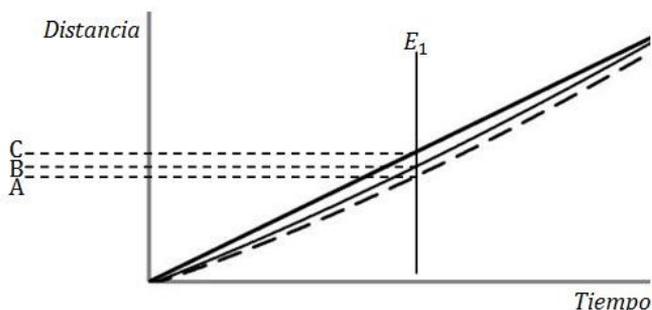
S2: *Pues la segunda (señala la gráfica punteada: partícula 2).*

El razonamiento de S1 puede traducirse como sigue: Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  las gráficas que representan el movimiento de cada partícula y la transformación  $T$  que sufren al pasar de un estado de tiempo ( $E$ ) a otro. Gráficamente, él realizó una serie de comparaciones en diferentes estados.

En la gráfica 1, por ejemplo, se señala un estado  $E_1$  con las transformaciones:

$$T_1: E_{1C} - E_{1B}, \quad T'_1: E_{1B} - E_{1A}$$

donde  $T_1$  es la comparación de  $C$  y  $B$  en un estado,  $T'_1$  es la comparación de  $B$  y  $A$  en ese mismo estado.



Gráfica 1. Representación del movimiento de las partículas en cierto intervalo de tiempo.

Así, aun siendo de diferentes niveles educativos, los estudiantes hicieron visible sus formas de predecir ante la necesidad de analizar la variación de la información presentada en forma numérica y gráfica, posibilitando el desarrollo de pensamiento matemático en cada uno.

### Conclusiones y reflexiones

Los resultados de la investigación dan cuenta de la noción de predicción presente en los estudiantes y sus diferentes formas de predecir mediadas por el uso de recursos como los que se mencionan a continuación:

- Matemáticos.* Análisis de la variación, cálculo de diferencias, observación, estudio de comportamientos puntuales y globales en tablas y gráficas.
- No matemáticos.* Gesticulaciones, argumentaciones contextuales, uso de lenguaje común para describir cambios, generación de consensos.

Los recursos que movilizaron para predecir exhiben diferentes niveles de predicción en cada nivel educativo. Según (Cantoral, 2001) estos se clasifican como *esquema*, *modelo* y *teoría*. Los estudiantes de nivel básico y medio dan evidencia de predecir tanto a nivel esquema como modelo, pues perciben patrones de regularidad en datos empíricos y estudian comportamientos puntuales hasta reconocer el comportamiento global de un sistema de cambios, entre otras acciones. Reconocen y significan también aquello que varía, pero sin llegar a teorizar bajo qué condiciones esto sucede. Los estudiantes de nivel superior sí formularon algunos de sus resultados basados en nociones y métodos de la

variación y cambio, dando evidencia de aspectos teóricos sólo en casos particulares y aislados.

A manera de sugerencia, es recomendable modificar algunas prácticas escolares de modo que se favorezca el desarrollo de habilidades de pensamiento y construcción de conocimiento matemático, al tiempo que se promueva una visión científica del quehacer escolar.

En esta dirección, se propone diseñar y rediseñar actividades centradas no en conceptos o tareas escolares inmutables, sino en la posibilidad de identificar variables, caracterizar comportamientos locales-globales de fenómenos variacionales, cuantificar cambios, establecer supuestos, generar conjeturas, formular códigos que permitan al estudiante transitar entre diferentes registros de representación como el gráfico y el numérico; por encima del automatismo o reproducción de procedimientos.

## Referencias

- Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología y matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 740-753. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- López, J. (2010). *Análisis de recursos y herramientas matemáticas empleadas por estudiantes en actividades predictivas*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.
- Quijano, Q. y Navarrete C. (2000). *Cálculo 1*. Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.
- Sosa, L. y Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN, México, D.F., México.