DEL TRAZO DE TANGENTES AL TEOREMA DEL VALOR MEDIO. UN ORGANIZADOR GENÉRICO

José Alejandro López Rentería
j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán

Propósito

Interpretar el Teorema del Valor Medio para derivadas de manera gráfica, como la identidad entre la derivada de una función f, diferenciable y continua, evaluada en un valor c en el intervalo $[A, B]$, y la secante que pasa por $f(A)$ y $f(B)$.

Introducción

En el presente trabajo se propone un tratamiento gráfico del Teorema del Valor Medio (TVM) desde un ambiente tecnológico, para favorecer una aprehensión conceptual de dicha noción.

Como se señala en Artigue (1995), a pesar de que diversos estudios reportan problemas de enseñanza en Matemáticas en distintos niveles educativos, la enseñanza a nivel superior se limita a favorecer una enseñanza de tipo "tradicional", pues aún cuando en este nivel se demanda en las prácticas educativas el establecimiento de mecanismos para la transferencia de conocimiento de lo escolar a lo profesional, éstas tienden a centrarse en la algoritmia y los procedimientos algebraicos del Cálculo, así como a evaluar esencialmente las competencias adquiridas en este dominio.

En ese sentido, se obstaculiza el desarrollo de habilidades y competencias necesarias para el estudio del Cálculo tal como la articulación entre diferentes registros de representación del concepto función; obstáculos que devienen en dificultades cognitivas que se acentúan al realizar conversiones de un registro a otro, o en el trabajo dentro de un mismo registro, por ejemplo, en la dificultad de manejar simultáneamente dos clases de información (informaciones sobre la función y su derivada) en un registro gráfico.

En esta propuesta, se identifica al TVM como una propiedad relevante de una función f y su derivada f', pues bajo ciertas condiciones, es posible predecir el comportamiento de la gráfica de f en un intervalo, conociendo el comportamiento puntual de f' en dicho intervalo. Empero, un análisis didáctico realizado con libros de Cálculo universitario ha permitido identificar que el discurso matemático relativo a este teorema se sitúa en el cálculo de derivadas o bien, en la demostración de teoremas posteriores (como el Teorema de Rolle). Las implicaciones de este tipo de tratamiento didáctico en el aprendizaje de los estudiantes, puede verse traducido en dificultades como las antes citadas.

Por lo anterior, la intención con esta propuesta es introducir el TVM para derivadas, a través del análisis gráfico de funciones, para que los estudiantes doten de un significado geométrico a este resultado matemático del Cálculo. De manera específica, se pretende que ellos determinen, por medio de un organizador genérico, las condiciones bajo las cuales es posible trazar la tangente a la gráfica de una función con igual pendiente que su secante en un intervalo cerrado $[A, B]$, donde A y B son números reales.

Fundamentación

En Cantoral, Cordero, Farfán e Imaz (1990), citado en Salinas y Alanís (2009) se advierte una premisa importante para la enseñanza del Cálculo: "*la estructura general del discurso matemático teórico constituye la base menos propicia para comunicar las ideas de Cálculo*". De forma complementaria, Tall (1990) indica que presentar la matemática de manera formal, tal y como sucede en el nivel superior, no implica que el significado que se desea por conveniencia, sea transferido automáticamente a los estudiantes.

Contrario a lo anterior, se sugiere proveer a los estudiantes con experiencias de aprendizaje que los ayuden a construir su propio concepto, definición e imagen, de cada objeto matemático, de manera que desarrollen capacidades para que sus intuiciones sean cada vez más certeras. Para tal fin, el lenguaje algebraico resulta insuficiente y por ello se propone el uso de la computadora como un nuevo recurso que permite otras formas de comunicación, a través de procesos dinámicos y visuales que podrían ser habilitados para que los estudiantes exploren libremente los conceptos, con el objetivo de que construyan una idea o noción sobre éstos (Tall, 1990).

En la tesis central del trabajo de Tall se establece que un organizador genérico, es un ambiente tecnológico que permite al estudiante explorar tanto ejemplos como contraejemplos de un concepto o proceso matemático, el cual lo ha de ayudar a conseguir experiencias que le proporcionen una estructura cognitiva sobre la que pueda construir conceptos abstractos. Así, con una secuencia diferente a la tradicional encapsulación por repetición de tareas hasta hacerlas rutinarias, se puede desarrollar una imagen del concepto más significativa y una mejor visualización de conceptos del Cálculo (Tall, 1993).

Ciertamente, ideas generales (como funciones diferenciables y no diferenciables) asociadas al origen del Cálculo, pueden ser introducidas en aulas universitarias de matemáticas. No obstante, se pueden explorar ejemplos específicos con propiedades pertinentes a ser investigadas (como el comportamiento de la tangente en una línea recta o en un punto de inflexión) con el fin de evitar generalizaciones limitadas en los estudiantes (Tall, 1990).

Finalmente, Tall (1990) reporta que el uso de organizadores genéricos en un contexto donde los conceptos son introducidos por el profesor, discutidos con los estudiantes y después explorados por ellos mismos, sugiere una gran ventaja sobre las aproximaciones tradicionales en la enseñanza del Cálculo.

Puesta en escena

La propuesta consta de tres actividades, que se experimentaron en un aula de cómputo con un grupo de 8 estudiantes universitarios de los primeros semestres de diversas licenciaturas de una facultad de ciencias, quienes poseen conocimientos previos sobre derivada, tangente, continuidad y diferenciabilidad.

Dichas actividades se realizaron en equipos de trabajo de dos personas, con el objetivo que los estudiantes discutan acerca de sus resultados. El tiempo de implementación de las actividades fue de 80 minutos.

En la puesta en escena de las actividades de la propuesta, se sugiere que el profesor genere espacios de socialización de las soluciones de cada actividad para llegar a consensos o institucionalización del conocimiento en juego, en este caso el TVM. A continuación se indica el objetivo y una breve descripción de cada una de las actividades que conforman la propuesta didáctica.

Actividad 1

Objetivo. Identificar la continuidad y diferenciabilidad de las funciones como una condición para el trazado de tangentes con igual pendiente a la secante de una función f en un intervalo $[A, B]$.

En esta actividad los estudiantes deberán contestar algunas interrogantes a partir de analizar una animación en el software *Sketchpad* (Imagen 1).

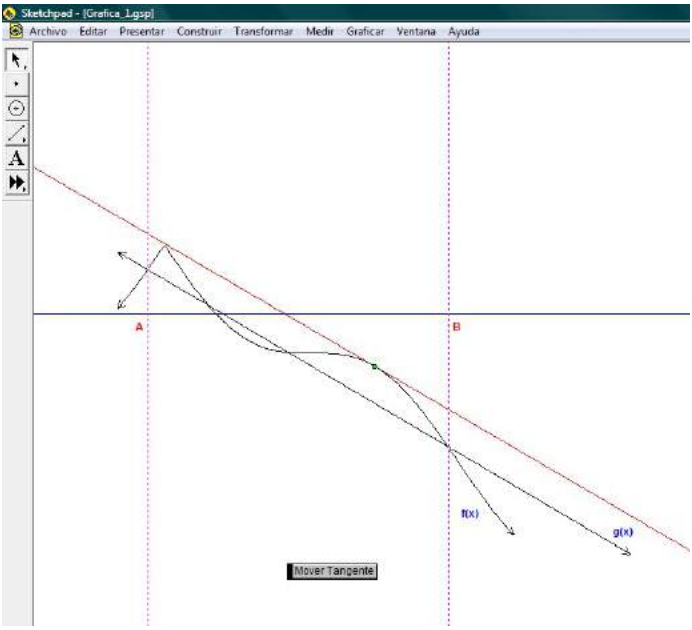

Imagen 1. Pantalla de animación en Sketchpad (*Gráfica_1.gsp)*

Actividad 2

Objetivo. Ejemplificar cómo la discontinuidad y no diferenciabilidad de funciones imposibilita el trazo de tangentes con pendiente igual a la secante de una función f en un intervalo $[A, B]$.

En esta actividad los estudiantes deberán elaborar algunos ejemplos con base en las características identificadas en la actividad anterior.

Actividad 3

Objetivo. Enunciar condiciones de continuidad y diferenciabilidad de funciones como características necesarias de legitimidad del TVM para derivadas.

En la tercera actividad, los estudiantes responderán algunas cuestiones en las que se verán reflejadas sus conjeturas de las actividades anteriores. Posteriormente el profesor abrirá un espacio de discusión para que los estudiantes expongan sus respuestas y el razonamiento que los llevó a determinar sus conclusiones.

Posterior a la implementación de la propuesta, se sugiere que el profesor diseñe una serie de actividades gráficas en las que el estudiante emplee los conocimientos adquiridos.

Conclusiones

De la experimentación de las actividades se obtuvo que los estudiantes identifican y describen ciertas características gráficas de las funciones que se requieren para la validez del TVM, tales como la continuidad (sin huecos) y la diferenciabilidad (suave o sin picos). Dichas características se pueden extraer de los ejemplos y contraejemplos que surgieron en las discusiones por equipos. Se considera que mediante el diseño de actividades posteriores a las planteadas y a partir de los conocimientos obtenidos, podría lograse una formalización de las características desarrolladas en dicho teorema.

A manera de conclusión se afirma que este tipo de actividades dentro de contextos escolares permite que los estudiantes desarrollen su capacidad de análisis, abstracción y visualización; aspectos relevantes en el pensamiento y lenguaje variacional, línea de investigación considerada como eje del rediseño del discurso escolar en Cálculo y Análisis. Por ende, se exhorta a docentes a realizar diseños que enriquezcan la percepción de diversos conocimientos del Cálculo y que resalten el papel activo del estudiante en la construcción de sus propios conocimientos.

Referencias

Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en educación matemática* (pp. 97-140), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 12(3), 355-382.

Spivak, M. (1998). *Calculus, cálculo infinitesimal.* Segunda Edición, México, DF, México: Editorial Reverté, S.A.

Stewart, J. (2003). Cálculo de una variable, trascendentes tempranas. Cuarta edición, Bogotá, D. C., Colombia: Thomson Learning.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus* 12(3 y 4), 49-63.

Tall, D. (1993). Technology and mathematics education. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 189-199.

Propuesta didáctica

Actividad 1

Indicaciones. *Para realizar la siguiente actividad abre el archivo Gráfica_1.gsp.*

1. En el archivo *Gráfica_1.gsp* se presenta la animación de una recta tangente que se desplaza sobre la gráfica de una función. Activa la animación con el botón <u>Mover Tangente</u> y contesta:

¿Existe algún valor entre A y B donde la pendiente de la tangente y la pendiente de $g(x)$ sean iguales? Si lo(s) hay, indícalo(s) sobre la gráfica de $f(x)$.

2. Ahora abre el archivo *Gráfica_2.gsp* donde se presenta la animación de una recta tangente que se desplaza sobre la gráfica de otra función. Activa la animación con el botón Mover Tangente y contesta:

¿Existe algún valor entre A y B donde la pendiente de la tangente y la pendiente de $g(x)$ sean iguales? Si lo(s) hay, indícalo(s) sobre la gráfica de $f(x)$.

Actividad 2

Indicaciones. *Con base en lo observado en la Actividad 1 elabora tres ejemplos donde no sea posible trazar una tangente a $f(x)$ con la misma pendiente a $g(x)$ entre A y B. En cada ejemplo justifica por qué no es posible.*

Actividad 3

Indicaciones. *Con base en lo realizado en las actividades anteriores, responde las siguientes preguntas:*

1. ¿Bajo qué condiciones es posible trazar la tangente a la gráfica de una función?

2. ¿Bajo qué condiciones no es posible trazar alguna tangente a $f(x)$ con la misma pendiente que la secante?

3. A manera de conclusión, escribe un enunciado que sintetice las ideas de las respuestas de los incisos anteriores.