



## **ETAPAS DE APRENDIZAJE ASOCIADAS A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO**

**Luis Alberto López Acosta**  
**lopezluis\_0912@hotmail.com**  
**Universidad Autónoma de Yucatán**

### **Resumen**

En el presente trabajo se tuvo como propósito recabar información sobre etapas o niveles cognitivos asociados a la noción de función en estudiantes de bachillerato al momento de resolver una secuencia de actividades. El trabajo se sustentó en la teoría Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Complementariamente se recurrió a la teoría APOE como referente para el entendimiento y explicación de etapas o niveles de aprendizaje matemático.

### **Abstract**

In the present study had the purpose of gathering information about the cognitive levels or stages associated to the function concept in high school students when solved a sequence of activities. The work was supported on the Socioepistemological theory in Mathematics education. Complementary the APOS theory was used as a referent for the understanding and explanation of stages or levels of mathematical learning.

### **Problemática**

En la actualidad se puede decir que existe una urgencia por favorecer la construcción del conocimiento matemático, toda vez que se deja ver, por los organismos que miden el aprendizaje matemático de los estudiantes en el país, la falta de promoción de aprendizajes significativos en nuestras instituciones educativas. Dicho esto, resulta importante generar cada vez más estudios que se centren en la comprensión de los procesos escolares de difusión de los saberes matemáticos, con la finalidad de crear marcos más amplios sobre lo que acontece al seno de las aulas matemáticas, así como aportar nuevas referencias acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Si bien entender el aprendizaje matemático resulta complejo, dado que existen diversas teorías que explican el mismo desde perspectivas distintas como las

cognitivas, didácticas y sociales; lo cierto es que al situarse en un contexto escolar se sabe que en todo proceso educativo intervienen factores de orden cognitivo y social (procesos mentales y procesos sociales de comunicación e interacción). Desde la óptica de este trabajo, se piensa que no es suficiente estudiar el aprendizaje exclusivamente desde una perspectiva, sino por el contrario, resultaría más importante situar el aprendizaje matemático desde una visión sistémica que involucre aspectos como la cognición del individuo, la didáctica, la epistemología de los saberes, así como las condiciones socioculturales que enmarcan o contextualizan las experiencias de los individuos, las cuales definen la forma en que se desenvuelven en sociedad afectando formas de adquisición de conocimientos.

En este sentido, analizar desde tal ángulo la forma en que tales procesos tienen lugar en un grupo de estudiantes y generar posibles explicaciones sobre las etapas o niveles de aprendizaje que se alcanzan, resulta importante en cualquier intento por mejorar la calidad de la enseñanza matemática en las aulas de clase.

Así, en el presente trabajo se plantearon como preguntas de investigación las siguientes: ¿Qué niveles o etapas cognitivas se identifican en estudiantes durante su proceso de aprendizaje de una noción o concepto matemático? ¿Qué papel juegan los aspectos socioculturales en procesos de aprendizaje matemático específicos? En particular lo relativo a la noción de función.

### **Marco teórico**

Al considerar en el estudio aspectos didácticos, epistemológicos, cognitivos y sociales resultó necesario recurrir a la teoría Socioepistemológica en Matemática Educativa, ya que ésta es un marco que se construye como una necesidad de explicar la realidad de la educación matemática mexicana desde sus características particulares, como una sociedad o comunidad que tiene propias necesidades, costumbres, tradiciones, ideologías, prácticas, problemáticas, etc., que determinan o norman las acciones y manera de construir conocimiento, en particular conocimiento matemático.

Además de aceptar al individuo como un ser pensante con cognición propia, se reconoce desde el punto de vista socioepistemológico que esa cognición se encuentra subordinada a las condiciones socioculturales, mirándola en tanto como una cognición social (Montiel, 2005).

De esta forma las investigaciones socioepistemológicas permiten concebir la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el hombre. Es así que en esta teoría se reconoce como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, entendiendo a dicho conocimiento como aquél que atiende a circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre la epistemología y los factores sociales ligados a dicho conocimiento (Cantoral, 2002; citado en Montiel, 2005).

En la perspectiva socioepistemológica no se mira a los conceptos y a sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino se atiende a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Es decir, se intenta crear un modelo que refiera la construcción social del conocimiento matemático y poner al descubierto sus causas reales; el reto es entonces formular epistemologías sobre las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003; citados en Cordero, Cen y Suárez, 2010).

Dado que en el estudio se tuvo como intención situar a estudiantes de bachillerato en niveles o etapas de aprendizaje asociadas a la noción de función, se recurrió complementariamente a la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y colaboradores.

La teoría APOE se basa en el concepto de abstracción reflexiva definida por Piaget y es tomada por Dubinsky como base fundamental para dicha teoría. En este sentido Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado (Oktaç y Roa-Fuentes, 2010).

De acuerdo a la definición del conocimiento matemático propuesta por Dubinsky y Mc Donald (2001), citados en Oktaç y Roa-Fuentes (2010), se destacan cuatro elementos que según ellos determinan el conocimiento matemático de un individuo. Estos cuatro elementos son descritos por Dubinsky como construcciones mentales, las cuales son el principal referente de la teoría y de ahí su nombre APOE: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; que son producto de lo denominado como *descomposición genética*. Bajo el marco APOE:

*Acción*. Consiste en la transformación física o mental de un objeto que es percibida

por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir.

*Proceso.* Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, empero ahora, no necesariamente dirigida por un estímulo externo (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews, Thomas, 1996; citados en Kú, 2009).

*Objeto.* Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia de éste como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y las construye, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Asiala, et al, 1996, citado en Kú, 2009).

*Esquema.* Se puede decir que es una colección coherente de acciones, procesos y objetos, además de otros esquemas que se tienen para un concepto en particular (Asiala, et al, 1996, citado en Kú, 2009).

Cabe mencionar que si bien utilizamos la teoría APOE para determinar los niveles o etapas de aprendizajes en estudiantes de bachillerato relacionados con la noción de función, sólo se hizo referencia a los niveles de acción, proceso y objeto, ya que para identificar el nivel de esquema se requiere estudiar las construcciones mentales de estudiantes relativas a algún concepto relacionando al mismo con otras nociones e incluso en diversos contextos. Como nuestro estudio se centró exclusivamente en la noción de función se imposibilitó mirar el nivel de esquema.

### **Método**

El procedimiento realizado se dividió en cinco etapas. En primera instancia se llevó a cabo un análisis preliminar de los aspectos tanto epistemológicos como didácticos y cognitivos que permitieran dar indicios para el diseño de un instrumento de análisis en una segunda etapa del estudio. Posteriormente se realizó la experimentación en la que se implementó el instrumento en una población de 8 estudiantes que cursaban el segundo semestre de bachillerato. En una cuarta etapa se llevo a cabo el análisis de datos tomando como referencia los marcos de las teorías APOE y Socioepistemológica, así como la documentación de

los resultados obtenidos. Finalmente en la quinta etapa se realizaron las conclusiones del estudio.

El instrumento de recolección de datos, consistió en una serie de actividades destinada a desarrollar aprendizajes matemáticos de la noción función. Dicho instrumento se dividió en cuatro bloques de actividades: de relación entre magnitudes, de estimación, sobre registros numéricos y sobre representaciones gráficas.

## Resultados

De las tareas relativas al establecimiento de relaciones entre magnitudes se obtuvo, en términos generales, que los estudiantes establecieron relaciones con base en el recordatorio de fórmulas o cursos en los que se habría hecho referencia de ciertas magnitudes, además de considerar características como su similitud, por ejemplo, en sus unidades de medida, así como de vivencias que han tenido respecto a dichas magnitudes, tal y como puede verse en las siguientes respuestas:

**E2:** *Distancia-Tiempo:* “Distancia se relaciona con el tiempo porque  $\text{distancia/tiempo}=\text{velocidad}$ ”.

**E1:** *Presión-Tiempo:* “La presión muchas veces es causa del tiempo que dan para elaborar algún trabajo”.

**E5:** *Área-Volumen:* “Medidas para medir cosas”.

**E3:** *Ingreso-Producción:* “Lo vi en comerciales”.

Una vez analizadas estas respuestas se consideró una etapa previa a la de acción, conocida como pre-acción descrita en trabajos como el de Alvarenga (2006). Esta etapa hace referencia a que las acciones del individuo no están encaminadas a la resolución de la actividad planteada, por lo que se consideró que los estudiantes se situaron en ésta tomando en cuenta que, respecto a la noción de función, el establecimiento de relaciones con la dependencia de variables es importante como punto central.

Respecto a la actividad de estimación, se les presentó a los estudiantes dos velas de diferentes tamaños. Lo que se les solicitó fue que estimaran el tiempo en el que se derretiría cierta cantidad de una vela pequeña, con base en la información

recabada de la observación del derretimiento de otra más grande. En esta actividad los estudiantes se situaron en el nivel de acción, ya que en sus respuestas se pudo ver que todos asumieron que el derretimiento de la vela se comporta de manera lineal o proporcional, tal y como puede verse a continuación:

**E1:** La vela medirá 4.5 cm cuando hayan pasado 6.66 minutos. Y medirá 3.5 cm cuando hayan pasado 5.18 minutos. “La vela chica tardó en reducirse 1cm, 1 minuto con 48 segundos y por tanto, la otra vela estaría en las cantidades especificadas. Lo hice por regla de tres”.

**E7:** “Con la vela más pequeña medí que cada 2 minutos, o sea 120 segundos, se derrite 1 cm de vela y, como la vela más grande mide 5.7 cm, calculé que como cada 120 segundos disminuye 1cm y tenemos que llegar a 4.5 cm, los 120 segundos los dividimos entre 0.2 que es la quinta parte de 1 cm, entonces la división dio 24 y al sumarlo con los 120 segundos nos da 144, que es el tiempo buscado para 4.5 cm, y sumando 120 más 144 nos da para 3.5 cm”.

Es importante mencionar entonces que, el uso de la regla de tres se encuentra totalmente condicionado al contexto de la actividad. Por consiguiente se puede decir que si la manera de actuar del estudiante ante estas tareas es condicionada, entonces sus construcciones mentales también lo estarán, por lo que el nivel cognitivo en este caso se encuentra relacionado y ligado a la naturaleza de la tarea.

En un tercer apartado, se les presentó a los estudiantes una actividad con tres tablas para completar las cuales hacían referencia a los costos y ventas que le generaban a una empresa respecto a cierto producto. Se tenían como intención mirar cómo establecen relaciones en abstracto, es decir, en un contexto hipotético. La tarea más importante en este bloque de actividades fue la de determinar expresiones algebraicas que representaran a cada tabla numérica, para ello se les pedía estimar los valores respectivos a cierto mes de cada tabla.

Se obtuvo que la mayoría de los estudiantes pudieron determinar las expresiones matemáticas que representaban el comportamiento de los datos de cada tabla. Por este motivo y de acuerdo a la teoría APOE se situó a los estudiantes en el nivel de proceso.

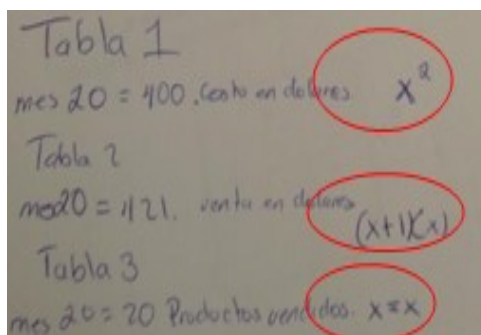


Imagen 1. Expresiones de E1

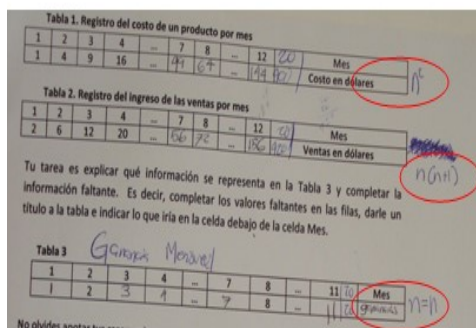


Imagen 2. Expresiones de E2

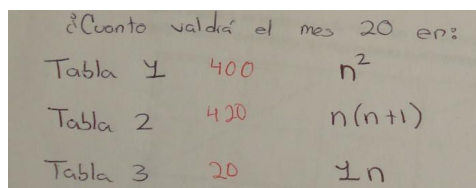


Imagen 3. Expresiones de E3

Dado que la naturaleza de las actividades de este apartado era intramatemática; a diferencia de los dos bloques anteriores en los que el estudiante decidía qué hacer matemáticamente, en este bloque, el ambiente era más familiar para ellos en el

sentido escolar, ya que normalmente en los cursos de matemáticas se suelen plantear actividades como este tipo. Por consiguiente, los estudiantes desarrollan ciertas competencias que les permiten familiarizarse más fácil con este tipo de actividades.

Desde un punto de vista socioepistemológico, se infiere que el nivel alcanzado por los estudiantes en este bloque se encuentra estrechamente relacionado con la naturaleza de la actividad. Esto es, la naturaleza de predecir y modelar es lo que favorece que los estudiantes movilicen sus esquemas y otorguen significados a sus conocimientos y procesos matemáticos. A modo de ejemplo, al solicitarles en la actividad que proporcionen una expresión (fórmula), ésta fue generada por la mayoría de los estudiantes.

En el último bloque de actividades se presentaron tareas en las que se trataba a la función por medio de representaciones gráficas, en ellas se buscaba que los estudiantes determinaran expresiones matemáticas que definieran las relaciones entre las variables presentadas en los gráficos.

Como resultados de esta última serie de actividades se obtuvo que los estudiantes se situaron en una transición entre los niveles de proceso y objeto, ya que en las actividades se pudo mirar una interiorización de sus acciones y procesos definidos por las tareas previas, de manera que hicieron uso de las mismas para resolver las tareas de este bloque.

Por ejemplo al momento de determinar las expresiones matemáticas para dos rectas con base en la relación entre la expresión de la recta  $y = x$  y su gráfica, se obtuvo:

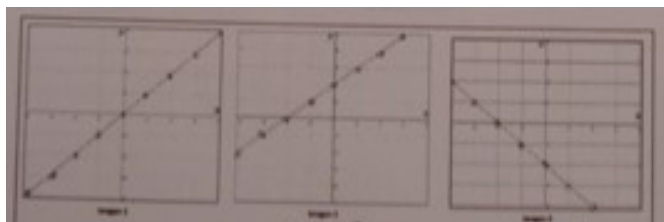


Imagen 4. Gráficas del último bloque de actividades



Respuestas de E6:  $y = x$     $x = y - 2$     $x = -y - 2$

Respuestas de E7:  $y = x$     $x = y + 2$     $x + 2 = y$

Si bien en la actividad anterior sólo un estudiante (E6) logró determinar correctamente las expresiones de las rectas, el resto estableció procedimientos a partir de la resolución de las actividades previas, motivo por el cual se pudo ver una evolución en sus procesos resolutivos. Además al momento de solicitarles que colocaran dos puntos en un plano cartesiano que contenía graficados tres puntos que cumplieran la relación  $y = x^2$ , sin especificarlo en las instrucciones, la mitad de los estudiantes plasmaron dicha expresión matemática junto a sus puntos propuestos, de tal manera que de alguna forma encapsularon los procesos para determinar una relación matemática a tal grado que etiquetaron con la expresión todos los puntos que cumplieran dicha relación.

### Conclusiones

Se puede decir que el marco socioepistemológico permitió potencializar las etapas cognitivas en el orden particular vistas. En efecto, el atender la cognición ligado a lo social, así como lo didáctico y epistemológico en procesos de producción y difusión del conocimiento, favorece la descomposición genética y extiende el análisis de las producciones generadas por los estudiantes.

La influencia de la experiencia que tienen los estudiantes al momento de relacionar variables es notable, pues como se pudo observar en algunas de sus respuestas en el primer bloque de actividades, en primeros términos no se piensa matemáticamente, o bien, no se relacionan las magnitudes de acuerdo a una noción de dependencia entre ellas o reglas específicas de relación, lo cual resulta importante para las consideraciones didácticas.

Se descubrió también que los niveles cognitivos de los estudiantes se encuentran en una estrecha relación con el tipo de actividad planteada al estudiante, de tal forma que se podría decir que si bien es común pensar que lo cognitivo obedece a implicaciones propias de un individuo, la realidad es que las condiciones socio-culturales (su contexto) en las que se encuentra hacen que su manera de actuar se halle condicionada a ciertas características y por consiguiente, lo que piensa y hace también.

Resumiendo los párrafos anteriores, si se reflexiona sobre el entendimiento o razonamiento matemático, desde una perspectiva socioepistemológica, este no es del dominio exclusivo de la matemática misma, es decir, no obedece la lógica de razonamiento matemático (dominio de pensamiento intramatemático), sino que se puede decir que toda tarea o actividad de índole matemático, pasará por un medio contextual que se puede pensar como una componente sociocultural de las personas-experiencias de vida social.

Resulta necesario recalcar que el estudiar de manera sistémica las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y sociocultural respecto a un concepto matemático, permite entender formas alternativas de tratamiento escolar y como consecuencia, se piensa ayudaría a proponer mejores escenarios para que los estudiantes construyan de mejor manera su conocimiento matemático.

### Referencias

- Alvarenga, K. (2006). Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
- Cordero, F., Cen, C., Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.
- Kú, D. (2009). Construcción del concepto de conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal desde el punto de vista de la teoría APOE. En Memorias de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Tamaulipas, Diciembre 12-16, (paper).
- Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Oktaç, A., Roa-Fuentes, S. (2010). Genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.