



## Propósito

Identificar la regla de sustitución para integrales definidas como un cambio de variable en la que se obtiene una integral equivalente más simple.

## Introducción

Diversas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han reportado que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del Cálculo, entre éstas destaca la realizada por Artigue (1995) en la que se menciona que, si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma mecánica algunos cálculos, se encuentran serios problemas para significar los objetos matemáticos de dicha área y sobre todo, hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento.

Ante esto es necesario ofrecer alternativas de aprendizaje en las que el estudiante sea el que construya el concepto, dote de significado al mismo y, en el caso de los métodos, identifique cuándo y para qué se emplean. Por tal motivo se plantea una propuesta de aprendizaje para un método del Cálculo, la regla de sustitución en integrales definidas, para la cual se pretende que el estudiante identifique en qué consiste la regla y para qué se aplica, ya que la enseñanza habitual se enfoca únicamente en reproducir el método.

Esta propuesta está dirigida a estudiantes de nivel medio superior quienes por primera vez tienen contacto con la regla de sustitución para integrales definidas.

## Fundamentación

En Matemática Educativa varias investigaciones se han centrado en estudiar las dificultades presentadas en el aprendizaje del Cálculo, según Contreras y Ordoñez (2003) algunas de éstas son:

- i. La descontextualización de la integral definida como área geométrica
- ii. La falta de significado dotado a la integral produce que los estudiantes no logren diferenciar entre la integral de una función y el área bajo la curva
- iii. La algebrización del Cálculo Integral

Por su parte, Muñoz (2000) menciona que una problemática en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo Integral es la separación entre lo conceptual y lo algorítmico, pues se les enseñan procedimientos para calcular integrales sólo a través de la ejercitación con los llamados métodos de integración. Por ello, se propone la inclusión, en la práctica escolar, de nociones como predicción y acumulación, actividades que favorecieron la construcción de la noción de integral.

El presente trabajo se centra en la regla de sustitución, enfocándose en el cambio de variable, por lo que fue de interés analizar cuál es el tratamiento que se le otorga en el escenario escolar y qué dificultades se presentan en su aprendizaje. Asimismo, se indagó sobre su desarrollo y uso.

Al respecto Flores (2007) plantea la existencia de un problema asociado a su tratamiento escolar, ya que se aborda de manera implícita y los profesores no ponen énfasis en esta herramienta, lo que produce que los estudiantes no logren aplicarla debidamente e incluso no sepan cuándo emplearla. Por ello se propone establecer el cambio de variable como un tema explícito en el currículo. De igual manera, este autor realiza un análisis epistemológico donde se observa que este método fue utilizado desde la antigüedad para resolver ecuaciones, transformándolas en otras más simples de donde se obtiene una raíz al regresar a la variable original. Newton utiliza por primera vez el cambio de variable en la regla de la cadena, evidenciando que ésta surge como un método de sustitución, es decir, como una técnica que permitía transformar la expresión original bajo la mira de encontrar la derivada de una función.

Por otro lado, se realizó un análisis didáctico en los libros Cálculo 2 (Quijano y

Navarrete, 2003) y Cálculo conceptos y contextos (Stewart, 1999); este sirvió como referencia del tratamiento otorgado a la regla de sustitución para integrales definidas en el escenario escolar y al mismo tiempo para identificar en qué situaciones se hace uso de ésta. Con ello se observó, que el tratamiento consiste en definición, ejemplo y ejercicios intramatemáticos, y no se presentan situaciones extramatemáticas en las que se haga uso de la misma. Por tanto, en la propuesta se incluye una situación contextualizada en la que se emplee la regla de sustitución.

## Actividad didáctica

El objetivo de la propuesta es que los estudiantes de sexto semestre de bachillerato identifiquen el cambio de variable como una equivalencia de funciones. Los conocimientos necesarios para su implementación son la integración y composición de funciones.

En cada parte de la actividad se pretende que el estudiante identifique:

1. Equivalencia entre las funciones dadas
2. Igualdad de las áreas debajo de las curvas de ambas funciones
3. El cambio de variable simplifica el cálculo de la integral de una función

Con la implementación de la actividad se espera que el estudiante reconozca que realizar un cambio de variable consiste en determinar una función equivalente más fácil de operar.

Al término de ésta, se propone una situación en la que se aplica la regla de sustitución en integrales definidas que implique al estudiante plantear una integral que lo ayude a resolver el problema, realizar un cambio de variable para obtener una función más simple y finalmente calcular la integral. Con esta actividad se espera que el estudiante dote de significado a la regla y que el profesor valide el aprendizaje de la misma.

## Metodología para la puesta en escena

Al inicio de la sesión el profesor organizará a los estudiantes en equipos de tres personas, con el fin de que discutan sus ideas y argumentos generados en cada apartado de la actividad. Durante la resolución de la misma el profesor fungirá de guía.

Al término, se realizará una breve discusión sobre las respuestas de la actividad, para posteriormente institucionalizar la regla de sustitución. Finalmente, se presentará una situación en contexto extramatemático en la que se aplique la regla.

### Reflexiones

La presente propuesta brinda un tratamiento distinto sobre la regla de sustitución en integrales definidas en tanto que no se centra en la reproducción de ejercicios, sino que su tratamiento incorpora diferentes registros de representación (gráfico y analítico), de manera que el estudiante no asocie únicamente la integración con el área bajo la curva. Además se propone una situación extramatemática en la que se hace uso de este método para dejar ver la funcionalidad del mismo.

### Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-131). México: Editorial Iberoamérica.
- Contreras, A. y Ordoñez, L. (2003). *El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida*. Investigación en educación matemática: VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. 277-288.
- Flores, R. (2007). El cambio de variable: ¿un proceso matemático o un artificio de la matemática? En Crespo, C. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 126-131. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(2), 131-170
- Quijano, M. y Navarrete, C. (2003). *Cálculo 2*. Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán
- Stewart, J. (1999). *Cálculo conceptos y contextos*. México: International Thompson Editores.

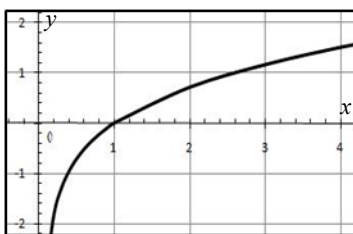
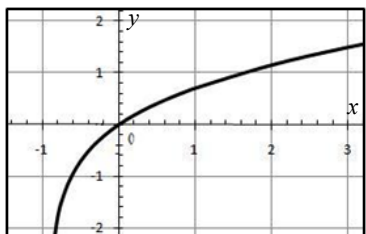
## Propuesta didáctica

### Actividad

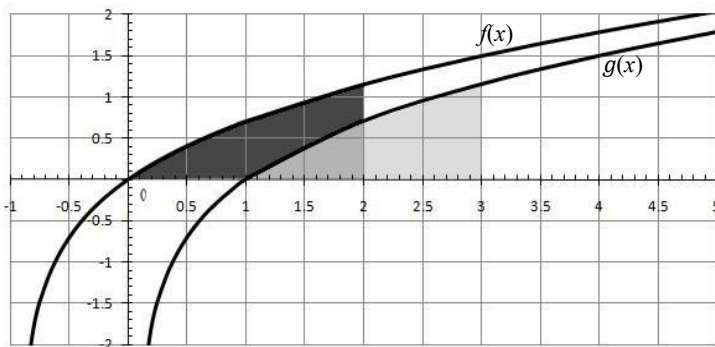
- I. A continuación se te presenta una pareja de funciones con sus respectivas gráficas. Analízalas y responde lo que se te indica.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$



- a) ¿Qué relación existe entre las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$ ?
- b) ¿Cómo obtendrías  $g(x)$  a partir de  $f(x)$ ?
- II. Considera ahora el área bajo la curva  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 2]$  y de  $g(x)$  en  $[1, 3]$ .

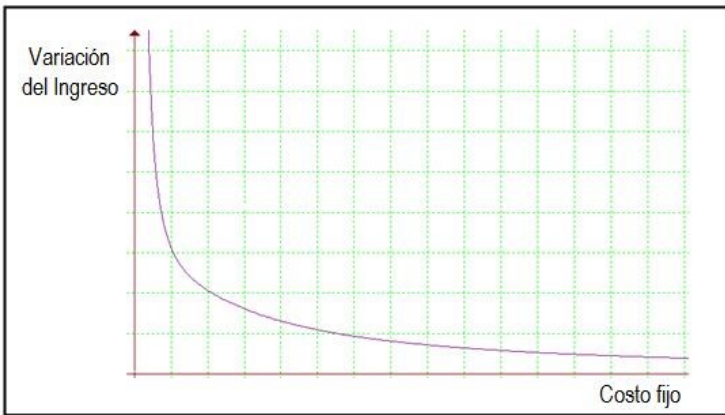


- a) Calcula el área bajo las curvas de  $f(x)$  y  $g(x)$  en los intervalos anteriores.
- b) ¿Cuál es la relación entre ambas áreas?

**Situación**

Instrucción. A continuación se te presenta una situación, analízala y responde lo que se te indica.

- I. Un empresario desea conocer el ingreso obtenido por la venta de unas chamarras, para esto cuenta con el informe de la variación de los ingresos según la producción. (Nota: La producción depende del costo fijo del producto). Dicha información se presenta a continuación:



La función que modela la variación del ingreso está dada por:

$$h(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - \frac{1}{15}}$$

- a) Determina el ingreso obtenido cuando el costo fijo de cada producto está entre 25 y 60 pesos.

**Sugerencia:** El ingreso está en función de la producción, conviene dejar como variable a la producción y no al costo.

- b) Si se sabe que el ingreso depende directamente de la producción, considera  $h(x)$  para determinar la función de la producción .

- c) ¿Cuál será el ingreso obtenido?